

基于正交完备 U-系统的图形分类与识别方法*

蔡占川¹, 孙伟¹⁺, 齐东旭^{1,2}

¹(中山大学 信息科学与技术学院, 广东 广州 510275)

²(澳门科技大学 资讯科技学院, 澳门)

A Classification and Recognition Method for Planar Figures Based on Complete Orthogonal U-System

CAI Zhan-Chuan¹, SUN Wei¹⁺, QI Dong-Xu^{1,2}

¹(School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

²(Faculty of Information Technology, Macao University of Science and Technology, Macao, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-20-84110175, E-mail: sunwei@mail.sysu.edu.cn

Cai ZC, Sun W, Qi DX. A classification and recognition method for planar figures based on complete orthogonal U-system. *Journal of Software*, 2006,17(Suppl.):21-27. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s21.htm>

Abstract: In order to probe into classification and recognition method for planar figures in effect, a class of complete orthogonal piecewise k -degree polynomials, so-called U-system, is introduced. U-system is a class of complete orthogonal piecewise k -degree polynomials in $L^2[0,1]$. The expansion in U-series has advantageous properties for approximations in both quadratic norm and uniform. Based on U-system, new U descriptors are defined, and the property of U descriptors and its proof are presented. To classify and recognize figures, a new normalized U descriptor is defined, which is invariant in the rotation, translation and scale transform. The experimental results show the accuracy and efficiency of new normalized U descriptors in classification and recognition method for planar figures.

Key words: Fourier descriptor; U descriptor; normalization; figure classification; recognition

摘要: 为了探索有效的图形分类与识别的新方法, 引进一类正交完备的分段 k 次多项式系统(简称 U-系统). U-系统是一类属于 $L^2[0,1]$ 的正交完备分段 k 次多项式系统. 该系统下的 U 级数展开式具有良好的平方逼近及一致逼近性质. 基于 U-系统理论, 提出了 U 描述子的概念, 给出了 U 描述子的性质并在理论上予以证明. 为了更好地对图形分类与识别, 对 U 描述子进行了归一化, 同时在理论上证明了归一化 U 描述子具有旋转、平移、尺度大小等不变的性质. 实验表明, 归一化的 U 描述子能够高效、准确地对图形进行分类与识别, 与 Fourier 描述子相比, 具有更好的识别率.

关键词: Fourier 描述子; U 描述子; 归一化; 图形分类; 识别

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60133020 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2004CB318000 (国家重点基础研究发展规划(973)); the Guangdong Provincial Science-Technology Project of Guangdong Province of China under Grant No.2004A10302005 (广东省科技攻关项目); the Guangzhou City Science-Technology Project of China under Grant No.2004A10302005 (广州市科技攻关项目)

Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

平面图形的描述与识别是图像分析与处理中重要的基本问题之一.平面图形大致可以通过两种途径描述.其一,内部描述,即通过描述物体在图像平面中所占据的区域.该方法与图像区域分割直接相连.某些区域分割技术将直接导出形状描述算法,如四分树描述法.因而,一些区域特征诸如矩、面积、骨架等在物体识别中得到了广泛的应用.其二,外部描述,即利用物体边缘及其特征值描述.该方法直接与边缘及直线检测相联系.由于该算法能够获得较为直观且严谨的外形描述,它们在某些场合的应用取得了令人满意的效果^[1].

随着研究的不断深入,出现了不同的图形分类与识别的方法.如轮廓矩不变量^[2]、傅立叶描述子^[3-6]、自回归模型和基于边界特征点等方法.Kauppien 比较了各种典型图形分类与识别方法的能力^[3],实验表明傅立叶描述子是最佳的方法.然而,傅立叶描述子从广为人知的 Fourier(三角函数)系出发,其基函数都是光滑的,由于具有 Gibbs 现象,不能实现通常几何图形的有限且精确的表达,因而也就不能精确地表达图形的特征^[7].

事实上,图形往往既包含光滑的部分,又包含间断的部分.如果能有一类自适应的正交函数系出现,它能兼顾间断与光滑,则一定能很好的表达平面图形.正是基于此,为了有效地刻画图形的特征,我们在一类特别的 $L^2[0,1]$ 正交完备函数系(称为 U-系统^[8-11])的基础上研究了 U 描述子及其在图形分类与识别方法中的应用.由于 U 系统兼顾了连续与间断,因此,使用 U 系统有限项能够精确表达图形的特征^[7].

20 世纪 80 年代,齐东旭与冯玉瑜提出了 U-系统,并在当时给出了较完整的理论基础.在文献^[12]中,他们又把 Harr 函数系和 Walsh 函数系推广到三角域上.Micchelli 和 Xu 从 U-系统受到启发,构造了不变集 R^n 上的正交多小波,使用这种正交多小波发展了 Galerkin 方法和 collocation 方法,然后进行了关于积分方程求解的一系列工作,表明了 U-系统的应用潜力^[13].最近,文献^[7,14,15]又在 U 系统的理论和应用方面相继做了一些工作,取得了较为理想的效果.U-系统是分层次的,完整的说法是“ k 次 U-系统, $k=0,1,2,3,\dots$ ”.零次 U-系统($k=0$)就是 Walsh 正交函数系. k 次 U-系统是一类分段 k 次多项式组成的 $L^2[0,1]$ 正交完备函数系.它包含无穷次可微的函数,更包含在 $[0,1]$ 内的点 $x=q/2^r$ 处出现各种间断的分段函数,其中 2^r 为区间 $[0,1]$ 的等分数目, $q=1,2,\dots,2^r-1$.U-系统含有不同层次的间断,恰好有利于图形的表达.

本文的主要结果是:基于 U-系统理论,提出了 U 描述子的概念,并且给出了 U 描述子的性质并予以证明.为了更好地对图形分类与识别,使其具有旋转、平移、尺度大小等不变的性质,对 U 描述子进行了归一化处理,提出了归一化 U 描述子,并且在理论上证明了归一化 U 描述子经几何变换(平移、旋转、缩放)的不变性.实验表明,归一化的 U 描述子能够高效、准确地对图形进行分类与识别,具有很好的识别率.

1 参数曲线图形正交分解的算法

设 $t \in [0,1]$,为简便起见,以一次 U-系统为例来说明.不妨假设将 $[0,1]$ 区间 2^n 等分,这时被逼近函数表达为 $F_f(t) = f_i(t), t \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right), i=0,1,\dots,2^n-1$,记 $P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lambda_0 u_0(t) + \lambda_1 u_1(t) + \dots + \lambda_{2^{n+1}-1} u_{2^{n+1}-1}(t)$.

给定图形的曲线表示成参数的(当 $k=1$ 时图形为直线形)多项式形式: $\begin{cases} x(t) = F_x(t) \\ y(t) = F_y(t) \end{cases}$ 有 $\lambda_j = \int_0^1 P(t) u_j(t) dt$, $j=0,1,\dots,2^{n+1}-1$.于是,对给定的 $F_f(t)$,可以用 $P(t)$ 作有限精确表达.相应地,我们称 $P(t)$ 为 $F_f(t)$ 的正交分解.称 $\{\lambda_j | j=1,2,3,\dots\}$ 为图形 $F_f(t)$ 的 U-谱.特别地,当 $j=0$ 时, λ_0 称为图形的“DC”分量.由于 $P(t)$ 能够有限且精确表达

$F_f(t)$.所以,我们就可以定义参数曲线图形的能量. $P(t)$ 的能量定义如下: $E = \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j^2 \right)^{1/2}$.

2 U 描述子及其性质

在这一部分,我们给出 U 变换的离散形式——U 描述子的概念及其性质.

经采样的某一图形曲线可以表示为 $z(n) = x(n) + iy(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$, i 为虚数单位.为了叙述方便,我们以一次 U 系统为例来说明.为方便记法, U_k 表示一次 U 系统的第 k 个基.利用式(1)计算这 N 个点的 U 变换系数

$\lambda(k), \lambda(k)$ 称为 U 描述子.

$$\lambda(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)U_k \left(\frac{n}{N-1} \right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

$$z(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda(k) \left(U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) \right)^{-1}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2)$$

上述定义的 U 描述子在几何变换下所具有的性质见表 1.

Table 1 Prosperity of U descriptors

表 1 U 描述子的性质

Geometry transform	Curves for figures	U descriptors
Identical	$z(n)$	$\lambda(k)$
Translation	$z_1(n) = z(n) + z_0$	$\lambda_1(k) = \lambda(k) + Nz_0\delta(k)$, 其中, $\delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$
Scale	$z_1(n) = \alpha z(n)$	$\lambda_1(k) = \alpha \lambda(k)$
Rotation	$z_1(n) = z(n)e^{i\theta_0}$	$\lambda_1(k) = \lambda(k)e^{i\theta_0}$

在此,我们仅给出平移变换的证明,其他同理可证.

定理 1. 若 $z_1(n) = z(n) + z_0$, 则 $\lambda_1(k) = \lambda(k) + Nz_0\delta(k)$, 其中, $\delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$.

证明:事实上,若 $z_1(n) = z(n) + z_0$, 则

$$\lambda_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) + \sum_{n=0}^{N-1} z_0 U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) = \lambda(k) + z_0 \sum_{n=0}^{N-1} U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) = \lambda(k) + Nz_0\delta(k),$$

故

$$\lambda_1(k) = \lambda(k) + Nz_0\delta(k), \delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

为了保证 U 描述子具有旋转、平移和尺度的不变性,定义归一化的 U 描述子如下:

$$du(k) = \frac{\|\lambda(k)\|}{\|\lambda(1)\|}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

下面证明 $du(k)$ 具有平移、旋转和尺度的不变性.见定理 2.

定理 2. 归一化的 U 描述子具有旋转、平移和尺度不变性.

证明:事实上,不妨设图形平移位移为 $z_0(a, b)$, 放大 r 倍, 旋转角度为 θ 后, 新图形的 U 描述子为 $\lambda'(k)$, 则

$$\begin{aligned} \lambda'(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left((z(n) + z_0)re^{i\theta} U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) \right) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (z(n) + z_0) U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) \right) re^{i\theta} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} z(n) U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) + \sum_{n=0}^{N-1} z_0 U_k \left(\frac{n}{N-1} \right) \right) re^{i\theta} = (\lambda(k) + Nz_0\delta(k))re^{i\theta}, \\ \delta(k) &= \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$du'(k) = \frac{\|\lambda'(k)\|}{\|\lambda'(1)\|} = \frac{\|\lambda(k)\|}{\|\lambda(1)\|} = du(k),$$

即归一化的 U 描述子具有旋转、平移和尺度的不变性.

3 图形的特征提取

3.1 预处理

给定任意物体的图像,可以通过图像分割的办法找到物体所在的区域,如图 1 所示.对该区域的边界进行轮廓跟踪,用逆时针排序的像素点坐标 $A_i (i=0, 1, 2, \dots, N)$ 表示物体的形状,且 $A_0 = A_N$. 为了减少计算量,给定阈值(近

似精度)M,我们利用多边形近似算法来提取边界特征点,从而作为原始轮廓曲线的近似^[3,16,17],如图 2 所示.同时,为了进一步减少物体形状边界的存储量和降低运算量,我们采用 Chen 和 Su 的提取曲线上局部区域的最大曲率点作为近似多边形的特征点^[3],如图 3 所示.



Fig.1 Object after segmenting the image

图 1 图像分割后的物体



Fig.2 The object's boundary after taking object's outline

图 2 物体轮廓跟踪后的边界图形



Fig.3 Approximate polygon and feature points

图 3 近似多边形和特征点

3.2 图形的U分解

事实上,为了保证形状的精度,采样点的数目 N 通常会很大($N \geq 256$),计算 U 描述子的运算量会很大,同时,由于多边形边界曲线离散化采样的误差也会在一定程度上降低 U 描述子的精度,所以,我们采用对多边形边界曲线的近似方法,对近似多边形的各条直线段进行连续的 U 变换.为简便起见,以一次 U -系统为例说明该算法.由已知两点作标,利用两点式可以求出各条直线段的函数表达,将其参数化后,利用第 1 节中的图形的正交分解算法中的公式,我们可以求得图形的 U -谱.

3.3 提取图形的特征

将 U -谱归一化后,可以得到归一化的 U 描述子.相应地,我们称归一化的 U 描述子为图形的特征向量.

4 图形的分类

在取得图形的特征向量之后,下面的任务是设计分类器进行图形分类.为了更好地与文献[3,16]中的结果进行比较,我们采用与文献[3,16]中相同的最小距离分类器.定义两个图形 A, B 的距离为: A, B 的 U 描述子差的 2-范数,即 $Distance = \| du'_A - du'_B \| = \sqrt{\sum_{k=2}^M | du'_A(k) - du'_B(k) |^2}$ 不难看出, $Distance$ 值越大,说明 A, B 形状的越相异; $Distance$ 值越小,说明 A, B 形状的越相似.特别地,当 $Distance=0$ 时,说明 A, B 为同一物体.

5 图形的识别系统

根据以上分析,一个完整的图形分类与识别系统如图 4 所示.

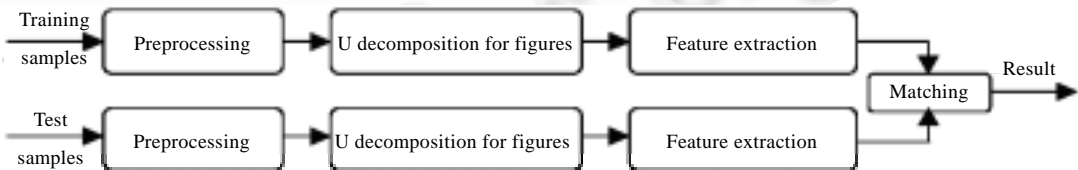


Fig.4 Classification and recognition system for planar figures

图 4 图形分类与识别系统

6 实验结果及分析



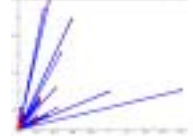





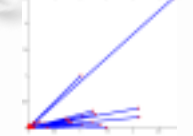


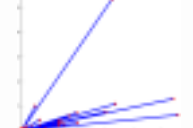


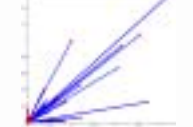





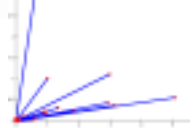






下面,我们通过两个实验来验证 U 描述子对图形分类与识别的能力.

实验 1. 以 9 种形状不同的工具作为基本形状进行分类测试,检验归一化 U 描述子识别任意物体形状的能力(实验数据来源于文献[3,16])见表 1.把每一种工具($Fi, i=1, \dots, 9$)随机旋转,得到 15 个具有不同的旋转方向的图像,再对每幅图像进行随机的放大和平移,得到 5 个新的图像,总共得到 $9 \times 15 \times 5=675$ 幅不同的图像.表 2 给出了每一种工具的边界图形和特征向量的图示.图 5 给出了使用 U 描述子测量 9 种工具的能量图,实验表明, U 描述子的平均识别率为 99.4%,而在文献[3]中表明,傅立叶描述子的平均识别率为 99%.由于 U 系统能够实现物体边界

图形的有限且精确的表达,因而 U 描述子具有更高的识别物体形状的能力.

Table 2 Extracting boundary polygon and eigenvector from 9 tools

表 2 9 种工具提取的边界图形及图形的特征向量

	工具	提取的边界图形	图形的特征向量
F1			
F2			
F3			
F4			
F5			
F6			
F7			
F8			
F8			

实验 2. 从飞机模型库中选取 5 种形状不同的飞机模型作为基本形状进分类测试,检验归一化 U 描述子识

别任意物体形状的能力.把每一种飞机模型 $G_i(i=1,\dots,5)$ 随机旋转,得到 10 个具有不同的旋转方向的图像,再对每幅图像进行随机的放大和平移,得到 5 个新的图像,总共得到 $16 \times 10 \times 5=800$ 幅不同的图像.表 3 给出了每一种飞机的边界图形和特征向量的图示.图 6 给出了使用 U 描述子测量 5 种飞机的能量图,实验表明,傅立叶描述子的平均识别精度为 97.8%,U 描述子的平均识别精度为 98.8%.由于 U 系统能够实现物体边界图形的有限且精确的表达,因而 U 描述子具有更高的识别物体形状的能力.

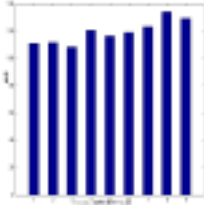


Fig.5 Energy chart using U descriptors

图 5 使用 U 描述子测量的 9 种工具的能量图

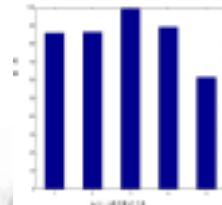


Fig.6 Energy chart using U descriptors

图 6 使用 U 描述子测量的 5 种飞机的能量图

Table 3 Extracting boundary polygon and eigenvector from 5 planes

表 3 5 种飞机提取的边界图形及图形的特征向量

	G1	G2	G3	G4	G5
飞机					
提取的边界图形					
图形的特征向量					

7 结束语

本文基于正交完备 U-系统定义了 U 描述子及其归一化的概念,给出了 U 描述子的性质并予以证明.在理论上证明了归一化 U 描述子的旋转、平移和尺度不变性.同时,采用提取曲线上局部区域的最大曲率点作为近似多边形的特征点的方法,通过连续的 U-变换来计算物体形状的 U 描述子.该方法减少了由于边界曲线等间距的离散化所带来的误差,同时极大地降低了运算量.通过实验,对傅立叶描述子和 U 描述子的识别能力进行了比较.实验表明,与 Fourier 描述子相比,归一化的 U 描述子具有更好的识别物体的能力,能够正确地识别具有旋转、平移和尺度变换的物体的形状,是快速识别物体形状的一种有效的新方法.

由于本文方法的识别率依赖于图像轮廓提取的质量,这在一定程度上影响了识别率.然而,U 系统作为一种新的信号分析方法,被成功地用于图形的分类和识别研究,是十分有意义的探索.它为拓展 U 系统理论的应用给出了一个新的尝试.

References:

- [1] Wang M, Li J, Huang XH. Research on classification and recognition method for planar figures. *Micro Processors*, 2001,8(3): 22-25 (in Chinese with English abstract).
- [2] Liu YS, Yang LH, Sun Qn. Contour-Based moment invariants and their application to the recognition of object shapes. *Journal of*

- Image and Graphics (A), 2004,9(3):308–313 (in Chinese with English abstract).
- [3] Wang T, Liu WY, Sun JG, Zhang HJ. Using Fourier descriptors to recognize object's shape. Journal of Computer Research and Development, 2002,39(12):1714–1719 (in Chinese with English abstract).
- [4] Kauppien H, Seppanen T. An experiment comparison of auto regressive and Fourier based descriptors in 2D shape classification. IEEE Trans. on PAMI, 1995,2:201–207.
- [5] Persoon E, Fu KS. Shape discrimination using Fourier descriptors. IEEE Trans. on PAMI, 1986,8:388–397.
- [6] Zahn T, Roskies RZ. Fourier descriptors for plane closed curves. IEEE Trans. on Computers, 1972,C-21:269–281.
- [7] Qi DX, Tao CJ, Song RX, Ma H, Sun W, Cai ZC. Representation for a group of parametric curves based on the orthogonal complete U-system. Chinese Journal of Computers, 2006,29(5):778–785 (in Chinese with English abstract).
- [8] Qi DX, Feng YY. On the convergence of Fourier-U series. Journal of University of Science and Technology of China (Issue of Mathematics), 1983,13(5):7–17 (in Chinese with English abstract).
- [9] Qi DX, Feng YY. On the orthogonal complete system $\{U\}$. Acta Scientiarum Natur. Universitatis Jilinensis, 1984,(2):21–31 (in Chinese with English abstract).
- [10] Feng YY, Qi DX. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1984,15(4): 834–844.
- [11] Qi DX. Fractal and Computer Application (M). Beijing: Science Press, 1994 (in Chinese).
- [12] Feng YY, Qi DX. On the Harr and Walsh systems on a triangle. MRC Technical Summary Report, No.2235, University of Wisconsin-Madison, 1981.
- [13] Micchelli CA, Xu YS. Using the matrix refinement equation for the construction of wavelets on invariant sets. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1994,1:391–401.
- [14] Qi DX. Frequency spectrum analysis in digital geometry (special report). In: Conference Book of Geometry Design & Computing 2005. Hefei, 2005.
- [15] Ding W, Yan WQ, Qi DX. Digital watermark image embedding based on U-system. In: Proc. of the 6th Int'l Conf. on Computer Aided Design & Computer Graphics. Wen Hui Publishers, 1999,3(12):893–899.
- [16] Chang CC, Hwang SM, Buehrer DJ. A shape recognition scheme based on relative distances of feature points from the centroid. Pattern Recognition, 1991,24(11):1053–1063.
- [17] Sklansky J, Gonzalez V. Fast polygonal approximation of digitized curves. Pattern Recognition, 1980,12:327–331.

附中中文参考文献:

- [1] 王敏,李君,黄心汗.平面图形的分类与识别方法研究.微处理机,2001,8(3):22–25.
- [2] 刘亦书,杨力华,孙倩.轮廓矩不变量及其在物体形状识别中的应用.中国图形图像学报(A),2004,9(3):308–313.
- [3] 王涛,刘文印,孙家广,张宏江.傅立叶描述子识别物体的形状.计算机研究与发展,2002,39(12):1714–1719.
- [7] 齐东旭,陶尘钧,宋瑞霞,马辉,孙伟,蔡占川.基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达.计算机学报,2006,29(5):778–785.
- [8] 齐东旭,冯玉瑜.关于 Fourier-U 级数的收敛性.中国科技大学学报(数学专辑),1983,13(5):7–17.
- [9] 齐东旭,冯玉瑜.关于正交完备系 $\{U\}$.吉林大学自然科学学报,1984,(2):21–31.
- [11] 齐东旭.分形及其计算机生成.北京:科学出版社,1994.



蔡占川(1974 -),男,河北馆陶人,博士生,
主要研究领域为计算机图形学,信号处理.



齐东旭(1940 -),男,教授,博士生导师,主
要研究领域为计算机图形学,数值逼近.



孙伟(1972 -),男,博士,主要研究领域为计
算机图形学,网络与信息安全.