基于未知扰动的冲突证据合成方法*

林作铨, 牟克典+, 韩 庆

(北京大学 数学科学学院 信息科学系,北京 100871)

An Approach to Combination of Conflicting Evidences by Disturbance of Ignorance

LIN Zuo-Quan, MU Ke-Dian+, HAN Qing

(Department of Informatics, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China)

+ Corresponding author: E-mail: kedianmu2003@hotmail.com

Received 2003-03-19; Accepted 2004-05-11

Lin ZQ, Mu KD, Han Q. An approach to combination of conflicting evidences by disturbance of ignorance. *Journal of Software*, 2004,15(8):1150~1156.
http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1150.htm

Abstract: The combination of conflicting evidences has been one of the important issues in Dempster-Shafer theory since the example of Zadeh paradox produced by Dempster's rule of combination was found. There is no solution accepted universally as yet. In this paper, an approach to handling this problem is proposed. Before adopting the Dempster's rule to combine belief functions, the assignments of mass functions are pretreated by the disturbance of ignorance. The pretreatment is in favor of the normalization of combination. Compared with other alternatives, the new approach is consistent with Dempster's rule in the form and flexible to combination, especially, it can be theoretically explained by the generalized Bayesian formula.

Key words: uncertain reasoning; Dempster-Shafer theory; combination of conflicting evidence

摘 要: 自从发现 Dempster 合成可能导致悖论以来,冲突证据合成一直是 Dempster-Shafer 理论的重要研究方向之一,迄今尚未有统一的解决方法被广泛接受.提出一种新的冲突证据合成方法,即在 Dempster 合成之前,基于未知扰动对 mass 函数进行预处理,并通过预处理来解决标准化问题.与其他相关方法相比,这种新方法不仅和 Dempster 规则形式上一致,合成过程比较灵活,并且可以通过扩展的 Bayes 公式得到理论上的解释.

关键词: 不确定推理;Dempster-Shafer 理论;冲突证据合成

中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

不确定知识的表示和推理是人工智能中重要的研究方向之一.在专家系统等相关领域中已经提出了各种不同的不确定推理理论和方法,例如确定因子法[1]、概率推理方法[2]、不精确推理方法[3]、Dempster-Shafer 理论[4]等.这些理论和方法在各自的应用领域都有不同的优点和缺陷[5].

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.69925203, 60373002 (国家自然科学基金)

作者简介: **林作铨**(1963－),男,福建泉州人,博士,教授,主要研究领域为计算机科学,人工智能;**牟克典**(1975－),男,博士,主要研究领域为不确定推理;**韩庆**(1976－),男,博士,主要研究领域为知识表示和推理.

与概率推理[2]相比,Dempster-Shafer(简称 D-S)理论在不确定性的度量方面更为灵活,推理机制更加简洁,尤其在信任分配上对未知的考虑更接近于人类专家的思维习惯,因而在基于知识的系统(knowledge based system)、信息融合等领域得到了广泛的应用.

在 D-S 理论中,信任更新是通过 Dempster 合成规则来实现的.尽管 Dempster 合成规则形式比较简单、适合机器实现,但遗憾的是,Dempster 合成的标准化过程可能导致推理结果出现悖论[6].自从 Zadeh 发现这个问题以来,冲突证据合成一直是 D-S 理论所关注的重要问题之一[7,8],迄今尚未有统一的解决方案被广泛接受.

本文提出了一种新方法来处理冲突证据合成问题.第 1 节简要回顾 Dempster 合成规则以及可能导致的 Zadeh 悖论.第 2 节将提出基于未知扰动的冲突证据合成方法,即通过未知扰动来对信任分配进行预处理,并借助于极小合情度原则来得到合成的信任分配.第 3 节将本文提出的新方法和其他相关工作从定性和定量两个方面进行了比较.最后,我们对本文的主要结果进行了总结.

1 Dempster 合成及 Zadeh 悖论

在 D-S 理论中,基于一定的证据对于假设的信任是通过 mass 函数[4]来刻画的.设 Θ 是辨识框架,$\mathcal{P}(\Theta)$表示 Θ 的幂集,mass 函数是从 $\mathcal{P}(\Theta)$到[0,1]的映射 m, 满足:

$$m(\varnothing)=0;\quad \sum_{X\subseteq\Theta} m(X)=1 \tag{1}$$

非零 mass 函数所对应的假设子集 $X\subseteq\Theta$,一般称为信任焦元.基于 mass 函数,对于假设子集 $X\subseteq\Theta$,其信任函数 Bel 定义为

$$Bel(X)=\sum_{Y\subseteq X} m(Y) \tag{2}$$

其合情度(plausibility)Pls 定义为

$$Pls(X)=1-Bel(\neg X)=1-\sum_{Y\subseteq\neg X} m(Y) \tag{3}$$

其中 $\neg X$ 为假设 X 的否定.

对于任何一个假设的信任函数及其否定假设的信任函数之和未必一定等于 1,即

$$\forall X\subseteq\Theta,\quad Bel(X)+Bel(\neg X)\le 1.$$

这意味着,一个证据不支持原假设并非就一定支持其否定假设,即允许未知的存在,显然这更符合人类的自然思维习惯.事实上,假设的信任函数表示证据对于此假设的支持程度,而其合情度则表示证据不否定此假设的程度,因此在 D-S 理论中,采用一个区间 $[Bel, Pls]$ 而不是单个的精确值来刻画信任程度.

对于两个截然不同的 mass 函数 m_1 和 m_2,通过 Dempster 合成规则可以得到如下更新的复合 mass 函数:

$$m_{1,2}(Z)=m_1\oplus m_2(Z)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{X\cap Y=Z} m_1(X)\cdot m_2(Y)}{1-\kappa}, & \varnothing\subset Z\subseteq\Theta\\ 0, & Z=\varnothing\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\kappa=\sum\limits_{X\cap Y=\varnothing} m_1(X)m_2(Y)$ 为冲突因子,相当于正交运算过程中分配给空集的信任.

事实上,在上面的合成规则中,通过冲突因子 κ 进行的标准化可能会导致合成结果与直觉相悖.Zadeh 发现,Dempster 合成在处理冲突证据的时候可能将 100%的信任分配给小可能假设[6],从而导致如例 1 所示的悖论.

例 1:Zadeh 悖论.对于同一个患者,医生 A 和 B 经过诊断分别提出如下的 mass 函数分配:

$$m_A(\{脑膜炎\})=0.99,\ m_A(\{脑瘤\})=0.01;\ m_B(\{脑震荡\})=0.99,\ m_B(\{脑瘤\})=0.01,$$

进行 Dempster 合成,则有

$$m_{A,B}(\{脑瘤\})=m_A\oplus m_B(\{脑瘤\})=1,$$

这意味着,Dempster 合成规则在重新分配 mass 函数的时候,将 100%的信任分配给了{脑瘤},即综合医生 A 和 B 的观点,该患者可以被确定为患有脑瘤.事实上,从医生 A 和 B 对于各自 mass 函数的分配来看,他们都认为该患者患有脑瘤的可能很小,仅为 0.01,显然合成结果是与这种直观分析相悖的.

自从Zadeh提出这个问题以来,D-S理论的研究者从两个不同的角度来认识和解决这个问题,而认识的分歧点在于,如何看待Dempster证据合成过程中对于空集的非零mass分配.Shafer等人在提出D-S理论的时候,沿用概率测度定义中的封闭世界假设,在mass函数的定义中要求$m(\varnothing)=0$.从这个角度来说,Dempster合成的主要替代方案有[7]:

1. 将正交运算分配给空集的mass函数κ直接分配给Θ.
2. 通过平均运算来确定合成信任函数:

$$Bel_{1,2}(Z)=\frac{1}{2}\left[\sum_{X\subseteq Z}m_1(X)+\sum_{Y\subseteq Z}m_2(Y)\right] \tag{5}$$

而SMETS等学者[9]则从另一角度,即基于开放世界假设来看待D-S证据合成,允许对于空集分配非零mass,即$m_{1,2}(\varnothing)\geq 0$,并且从可转化信任函数模型(TBM)出发讨论了$m_{1,2}(\varnothing)>0$的本质含义.非严格地讲,从开放世界假设的角度,上面的例子中$\kappa=0.9999$意味着综合医生A和B的诊断,该患者最可能的疾病不是最初确定的辨识框架集合{脑震荡,脑膜炎,脑瘤}中的任何一种,而是其他某种疾病.基于开放世界假设,那么Dempster合成中的标准化是不必要的,因此就有以下的替代策略[7]:

3. 取消Dempster规则中通过除以$1-\kappa$而进行的标准化,允许给空集分配非零mass函数.
4. 通过并、交运算来给出复合mass函数的上下界:

$$m_{C1,2}(Z)=\sum_{X\cap Y=Z}m_1(X)m_2(Y) \tag{6}$$

$$m_{D1,2}(Z)=\sum_{X\cup Y=Z}m_1(X)m_2(Y) \tag{7}$$

其实$m_{D1,2}$给出的是"证据1或证据2"成立情况下的复合mass函数,而不是"证据1和证据2"成立的情况.

事实上,Paass[9]曾经对SMETS等学者坚持的开放世界假设是否完全可以替代封闭世界假设提出质疑.在本文中,我们无意讨论开放世界假设和封闭世界假设哪个更适合D-S理论,这里我们采用与概率推理一致的基本假设,即封闭世界假设,在遵循Shafer提出的mass函数定义的基础上来看待Zadeh悖论问题.基于这样的基本假设,替代策略当然需要标准化,对于替代策略2来说,显然是标准化的,但是它舍弃了Dempster合成规则中所采用正交合成思想,在形式上和Dempster规则不太一致.事实上,保持或者尽量接近Dempster规则应该是比较理想的替代合成规则的特点之一[10].而对于替代策略1所提出的将冲突因子直接作为未知分配给Θ的做法尽管保持了封闭世界假设,但按照这种策略,在例1中,将$\kappa=m_{1,2}(\varnothing)=0.9999$分配给$\Theta$作为未知,则$Bel_{1,2}$({脑瘤})=0.0001,而$Pls_{1,2}$({脑瘤})=1,对{脑瘤}给予这么大的潜在支持(合情度)显然是不太合理的.事实上,SMETS已经发现这种策略可以导致合情度方面的悖论[11].

基于上面所述的分歧以及各方法本身的缺陷,迄今为止尚未有替代策略被D-S理论所广泛接受.下面,我们将提出冲突证据合成的新方法.

2 基于未知扰动的冲突证据合成

本文特指采用Dempster合成规则可以导致Zadeh悖论[6],即将100%信任重新分配给小可能假设的那类证据为冲突证据.事实上,在实际生活中,人类专家如果遇到这类冲突的证据,一般情况下会采取保守的策略,引进相关的元知识(meta knowledge)对信任分配进行重新审视.

在前面的信任函数的定义中,基于证据E对假设X的信任直接用$Bel(X)$(或$m(X)$)表示.事实上,与概率推理类似,这是一种条件信任$Bel(X|E)$(或$m(X|E)$).如果进一步引进元知识K_M,则依据SMETS等人提出的扩展的Bayesian理论[12],基于元知识K_M对于假设X的条件信任可以表示为

$$Bel(X|K_M)=Bel^1+Bel^2+Bel^3 \tag{8}$$

其中:

$$Bel^1=Bel(X|E,K_M)Bel(E|K_M),$$
$$Bel^2=Bel(X|\neg E,K_M)Bel(\neg E|K_M),$$

$$Bel^3 = Bel(X|E \cup \neg E, K_M)Bel(E \cup \neg E|K_M).$$

事实上,在概率论中,$Bel^3 \equiv 0$,而在 D-S 理论中,由于允许未知的存在,故 $Bel^3 \geq 0$.如果进一步假定元知识 K_M 是针对证据 E 的,即 K_M 仅仅与 E 有关,与假设 X 关于证据条件独立[12],因此就有

$$Bel(X|E, K_M) = Bel(X|E).$$

如果对所有的 X 都有 $Bel(X|E, K_M) = Bel(X|E)$,且 $Bel(E|K_M) = 1-\alpha$ (其中 $0<\alpha<1$), $Bel(E, \neg E|K_M) = \alpha$,则有

$$Bel(X|K_M) = \begin{cases} (1-a)Bel(X), & \forall X \subseteq \Theta \\ 1, & X = \Theta \end{cases} \tag{9}$$

依据 mass 函数和信任函数的关系[4]:

$$\forall X \subseteq \Theta,\ m(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X-Y|} Bel(Y) \tag{10}$$

进一步可以得到

$$\forall X \subset \Theta,\ m(X|K_M) = (1-\alpha)m(X)\ ;\ m(\Theta|K_M) = m(\Theta) + \sum_{X \subset \Theta} \alpha m(X) \tag{11}$$

显然,这种情形就是 Shafer 曾经提出的信任折扣思想[4].事实上,Shafer 最初提出这种想法是为了能在信任分配的时候对证据的不确定性进行表示.例如,对于医生 A 来说,如果有证据(元知识)表明 A 喝醉了,就对 A 分配的信任分配再赋以元信任(meta belief)进行折扣,将折扣的部分作为未知追加给辨识框架.

事实上,Shafer 所提出的这种元信任仅仅是相对于证据的,即所依据的元知识仅仅和证据有关,但在实际中更一般的情况下,当人类专家碰到冲突证据的时候所引进的元知识 K_M 则不仅和证据 E 相关,而且也可能和假设 X 相关,即 $Bel(X|E,K_M)=Bel(X|E)$未必总是成立.例如,在前面的 Zadeh 悖论例子中,我们之所以认为 Dempster 合成结果"$m_{A,B}$({脑瘤})=1"是不合理的,是因为我们通过比较医生 A 和 B 分别提出的 mass 分配,得到了元知识"医生 A 和 B 的观点总的来说有分歧,但关于脑瘤的信任程度基本一致,都很小".基于此,我们认为合成结果是与直观相悖的.

根据扩展的 Bayesian 理论我们知道,人类专家基于元知识的信任折扣实质上就是对原来的信任分配进行某种方式的扰动,将扰动量作为部分未知追加给辨识框架.基于这种策略,我们提出下面的冲突证据合成方法.

不妨设 m_1 和 m_2 分别是基于证据 E_1 和 E_2 的冲突 mass 函数,通过 Dempster 合成可导致 Zadeh 悖论,即将 100%信任分配给小可能假设 Z_m (显然这种小可能假设是唯一的),则我们引进相关元知识 K_M,对于原始 mass 函数进行预处理,用基于元知识 K_M 的 mass 函数 $m_1(X|K_M)$和 $m_2(X|K_M)$来进行 Dempster 合成,得到复合 mass 函数,即

$$m_{1,2}^{K_M}(Z) = m_1 \oplus^{K_M} m_2(Z) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{X \cap Y = Z} m_1(X|K_M) \cdot m_2(Y|K_M)}{1-\kappa^{K_M}}, & \varnothing \subset Z \subseteq \Theta \\ 0, & Z = \varnothing \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\kappa^{K_M} = \sum_{X \cap Y = \varnothing} m_1(X|K_M) m_2(Y|K_M)$.并且,按照扩展的Bayesian理论以及mass函数和信任函数的关系,我们可以得到

$$\forall X \subseteq \Theta,\ m_i(X|K_M) = m_i^1 + m_i^2 + m_i^3 \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} m_i^1 &= m_i^1(X|E_i, K_M)Bel(E_i|K_M), \\ m_i^2 &= m_i^2(X|\neg E_i, K_M)Bel(\neg E_i|K_M), \\ m_i^3 &= m_i^3(X|E_i \cup \neg E_i, K_M)Bel(E_i \cup \neg E_i|K_M), \end{aligned}\right\},\ i = 1,2 \tag{14}$$

如果我们采用 Shafer 提出的信任折扣,则合成结果只与信任折扣因子 a 相关.更一般的情况下,即使我们引进相关的元知识对信任分配进行重新审视,我们也并不能确定从 $m_i(X|E_i)$借助于扩展的 Bayesian 公式得到 $m_i(X|K_M)$,但本质上是通过引进元知识对信任进行折扣,所以肯定对相对于 m_i 的任意焦元 X 来说,

$$\forall X \subset \Theta, m_i(X|K_M) = m_i^{\varepsilon}(X|E_i) = m_i(X|E_i) - \varepsilon_i^X ; m_i(\Theta|K_M) = m_i^{\varepsilon}(\Theta|E_i) = m_i(\Theta|E_i) + \sum_{X\subset\Theta, m_i(X|E_i)>0} \varepsilon_i^X \quad (15)$$

其中 $m_i(X|E_i) > \varepsilon_i^X \ge 0$, 且 $\sum_{X\subset\Theta} \varepsilon_i^X > 0, i = 1,2$.

由于在导致Zadeh悖论的冲突mass分配中, $m_1(\Theta|E_1) = m_2(\Theta|E_2) = 0$,因此,上面的信任折扣就是重新分配的未知,故我们称上面的信任折扣方法为未知扰动.显然,相应合成结果可以表示为

$$m_{1,2}^{\varepsilon}(Z) = m_1 \oplus^{\varepsilon} m_2(Z) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{X\cap Y=Z} m_1^{\varepsilon}(X) m_2^{\varepsilon}(Y)}{1-\kappa^{\varepsilon}}, & \varnothing \subset Z \subseteq \Theta \\ 0, & Z = \varnothing \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\kappa^{\varepsilon} = \sum_{X\cap Y=\varnothing} m_1^{\varepsilon}(X) m_2^{\varepsilon}(Y)$.

事实上,冲突证据合成问题可以转化为如何确定相应的信任折扣因子 $\{\varepsilon_i^X,\ i=1,2,\ X\subset\Theta\}$ 的问题.我们知道,信任折扣最终作为未知分配给了辨识框架 Θ ,而未知对于辨识框架的任何子集合的信任都有贡献,当然对于小可能假设 Z_m 的合情度 $Pls(Z_m)$ 也有贡献,而合情度反映了证据不否定此假设的程度,既然我们已经获得元知识" Z_m 是小可能假设",那么我们通过选择信任折扣因子使得 Z_m 的合情度达到极小显然是合理的.基于这样一个原则,我们通过极小化

$$Pls_{1,2}^{\varepsilon}(Z_m) = 1 - \sum_{Y\subseteq\neg Z_m} m_{1,2}^{\varepsilon}(Y)$$

来确定相应的信任折扣因子 $\{\varepsilon_i^X, i = 1,2, X \subset \Theta\}$.

基于此,我们定义基于未知扰动的复合 mass 函数为

$$m_{1,2}^{\varepsilon^*}(Z) = m_1 \oplus^{\varepsilon^*} m_2(Z) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{X\cap Y=Z} m_1^{\varepsilon^*}(X) m_2^{\varepsilon^*}(Y)}{1-\kappa^{\varepsilon^*}}, & \varnothing \subset Z \subseteq \Theta \\ 0, & Z = \varnothing \end{cases} \quad (17)$$

其中 ε^* 使得 $Pls_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(Z_m) = \min_{\varepsilon}\left(Pls_{1,2}{}^{\varepsilon}(Z_m)\right)$.

如果我们选择 Shafer 信任折扣方式作为预处理方式,则

$$m_1^{\varepsilon^1}(X) = (1-\varepsilon_1)\cdot m_1(X) , \forall X \subset \Theta ;\ \ m_1^{\varepsilon^1}(\Theta) = m_1(\Theta) + \sum_{X\subset\Theta} \varepsilon_1 \cdot m_1(X) = \sum_{X\subset\Theta} \varepsilon_1 \cdot m_1(X) ;$$

$$m_2^{\varepsilon^2}(Y) = (1-\varepsilon_2)\cdot m_2(Y) , \forall Y \subset \Theta ;\ \ m_2^{\varepsilon^{21}}(\Theta) = m_2(\Theta) + \sum_{X\subset\Theta} \varepsilon_2 \cdot m_2(X) = \sum_{X\subset\Theta} \varepsilon_2 \cdot m_2(X) .$$

这样,基于未知扰动的复合 mass 函数为

$$\forall \varnothing \subset Z \subseteq \Theta ,\ \ m_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(Z) = m_1 \oplus^{\varepsilon^*} m_2(Z) = \frac{\sum_{X\cap Y=Z} m_1^{\varepsilon_1^*}(X)\cdot m_2^{\varepsilon_2^*}(Y)}{1-\sum_{X\cap Y=\varnothing} m_1^{\varepsilon_1^*}(X) m_2^{\varepsilon_2^*}(Y)} \quad (18)$$

其中 ε^* 使得 $Pls_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(Z_m) = \min_{\varepsilon}\left(Pls_{1,2}{}^{\varepsilon}(Z_m)\right)$.

对于这种基于未知扰动的冲突证据合成方法,从理论上来看,由于我们要求未知扰动

$$\sum_{X\subset\Theta} \varepsilon_i^X > 0, \quad i = 1,2 ,$$

即 $m_i^{\varepsilon}(\Theta) > 0$,则 $m_1^{\varepsilon}(\Theta) m_2^{\varepsilon}(\Theta) > 0$,因此可以解决标准化过程中将100%信任分配给小可能假设的问题.同时,我们要求 $Pls_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(Z_m) = \min_{\varepsilon}\left(Pls_{1,2}{}^{\varepsilon}(Z_m)\right)$,使得合成结果对小可能假设的潜在支持也达到极小,与直观相符合.

现在我们重新审视 Zadeh 悖论(例 1).

例 1(续):为计算简单起见,我们不妨设对于小可能假设的信任分配不做扰动且 $\varepsilon_A = \varepsilon_B$,对其他信任分配做如下扰动:

$$m_A^{\varepsilon_A}(\{\text{脑膜炎}\}) = 0.99 - \varepsilon_A ,\ m_A^{\varepsilon_A}(\{\text{脑震荡,脑膜炎,脑瘤}\}) = \varepsilon_A ,$$

$$m_A^{\varepsilon_A}(\{脑瘤\})=0.01;\ m_B^{\varepsilon_B}(\{脑震荡,脑膜炎,脑瘤\})=\varepsilon_B,$$

$$m_B^{\varepsilon_B}(\{脑震荡\})=0.99-\varepsilon_B,\ m_B^{\varepsilon_B}(\{脑瘤\})=0.01,$$

则通过极小化{脑瘤}的合情度:

$$Pls_{A,B}^{\varepsilon}(\{脑瘤\})=1-\frac{(0.99-\varepsilon_A)\varepsilon_B+(0.99-\varepsilon_B)\varepsilon_A}{0.01\times 0.01+\varepsilon_A+\varepsilon_B-\varepsilon_A\cdot\varepsilon_B}$$

得到 ε^*=0.0098,则基于未知扰动的复合 mass 函数为

$$m_{A,B}{}^{\varepsilon^*}(\{脑瘤\})=0.0151,\ m_{A,B}{}^{\varepsilon^*}(\{脑震荡\})=0.4900,$$

$$m_{A,B}{}^{\varepsilon^*}(\{脑膜炎\})=0.4900,\ m_{A,B}{}^{\varepsilon^*}(\{脑膜炎,脑震荡,脑瘤\})=0.0049.$$

显然,由于未知扰动的影响,通过合成分配给{脑瘤}的 mass 有所增加,但这种合成结果还是可以接受的.

3 比较与讨论

在 D-S 理论中,一般认为辨识框架是由两两互斥的假设构成的完备空间,包含了正确答案.在这种假设下,不允许给空集分配非零 mass,因此,标准化是必须的.在这方面,本文提出的新方法与 Dempster 合成规则以及替代方案(1)、(2)是一致的,都遵从这个基本假设.

文献[8]对策略(1)进行了改进,但在标准化问题上与策略(1)基本保持一致.尽管替代策略(1)与本文提出的新方法都考虑了未知的作用,但具体的应用策略有很大不同.就替代策略(1)来说,在合成之后,将分配给空集的非零 mass 作为未知直接重新分配给辨识框架,尽管这种策略也实现了合成结果的标准化,但缺乏相应的直观和理论解释.相比之下,本文的新方法借助于扩展的Bayesian理论,通过引进元知识对mass分配进行未知扰动预处理,本质上是对原来的 mass 分配赋以元信任,直观上接近人类专家的信任折扣思想;同时,非零未知扰动使得在 Dempster 合成中不可能给小可能假设重新分配 100%的 mass.

除了上面的定性比较,通过下面的例子,我们对坚持标准化的相关方案也做定量比较.

例 2:定量比较.

设 $\Theta=\{A,B,C\}$为辨识框架, m_1 和 m_2 为如下两个截然不同的 mass 函数:

$$m_1(\{A\})=0.90,\ m_1(\{C\})=0.10;\ m_2(\{B\})=0.90,\ m_2(\{C\})=0.10.$$

(1) Dempster 合成结果:

$$m_{1,2}(\{C\})=1.00,$$

显然 $\{C\}$ 是一个小可能假设,却被重新分配 100%的信任,造成 Zadeh 悖论.

(2) 将冲突因子直接分配给辨识框架(即替代策略(1)):

$$m_{1,2}(\{C\})=0.01,\ m_{1,2}(\Theta)=0.99,\ Pls_{1,2}(\{C\})=1.00,$$

显然给小可能假设的合情度不合理.

(3) 应用平均策略[7](即替代策略(2))得到的合成结果:

$$m_{1,2}(\{A\})=0.45,\ m_{1,2}(\{B\})=0.45,\ m_{1,2}(\{C\})=0.10.$$

(4) 基于未知扰动的冲突证据合成方法

为了计算简单起见,我们不妨设 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$,则通过如下未知扰动预处理:

$$m_1^{\varepsilon}(\{A\})=0.90-\varepsilon,\ m_1^{\varepsilon}(\{C\})=0.10,\ m_1^{\varepsilon}(\Theta)=\varepsilon;\quad m_2^{\varepsilon}(\{B\})=0.90-\varepsilon,\ m_2^{\varepsilon}(\{C\})=0.10,\ m_2^{\varepsilon}(\Theta)=\varepsilon.$$

根据极小合情度原则可知 ε^*=0.08,则相应的合成 mass 分配为

$$m_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(\{A\})=0.40,\ m_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(\{B\})=0.40,\ m_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(\{C\})=0.16,\ m_{1,2}{}^{\varepsilon^*}(\Theta)=0.04.$$

显然,基于未知扰动的冲突证据合成与前面提到的平均策略得到的合成结果接近.但前者引进了未知,更符合 D-S 理论在不确定推理方面的本质特性.同时,新方法在实际应用中会比 Dempster 合成规则和平均策略更为灵活.就 Dempster 合成规则和平均策略而言,所涉及的待合成的 mass 分配是对等的.事实上,由于 Agent 之间背景、技术等因素的差别,在很多实际情况中,这些 mass 分配并不是对等的,即对于证据的元信任可以不相同.本

文提出的新方法可以处理这个问题.例如,在上面的例2中,我们把不同的mass分配看作医生A和B的诊断结果,如果医生A和B在诊断上具有不同的经验和声望,我们也可以像日常生活中一样,对他们的诊断结果所做的扰动也可以不一样.如果实际中需要,我们可以做类似于$\varepsilon_1=\frac{1}{2}\varepsilon_2=\varepsilon$的扰动,在某种意义上,这意味着$m_1$比$m_2$要可信.在这样的情况下,可以得到如下的合成结果:

$$m_{1,2}^{\varepsilon^*}(\{A\})=0.551,\ m_{1,2}^{\varepsilon^*}(\{B\})=0.256,\ m_{1,2}^{\varepsilon^*}(\{C\})=0.153,\ m_{1,2}^{\varepsilon^*}(\Theta)=0.040.$$

正如所期望的,通过合成,给$\{A\}$分配的mass大于给$\{B\}$分配的mass.

4 结 论

Dempster-Shafer理论由于其在不确定性度量上的灵活性以及简洁、易用的推理机制,在很多应用领域受到关注.自从Zadeh发现Dempster合成规则可以导致悖论以来,冲突证据合成问题一直是D-S理论中比较关注的问题之一.本文提出一种新的冲突证据合成方法,即在Dempster合成之前,基于未知扰动对mass函数进行预处理,并通过预处理来解决标准化问题.与其他相关方法相比,这种新方法不仅和Dempster规则形式上一致、合成过程比较灵活,并且可以通过扩展的Bayes公式得到理论上的解释.

References:

[1] Shortcliffe EH, Buchanan BJ. A model of inexact reasoning in medicine. In: Shafer G, Pearl J, eds. Readings in Uncertain Reasoning. San Mateo: Morgan Kaufmann, 1990. 259~273.

[2] Pearl J. Probabilistic Reasoning Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. San Mateo: Morgan Kaufmann, 1988.

[3] Freksa C, Fuzzy systems in AI: An overview. In: Kruse R, Gebhardt J, Palm R, eds. Fuzzy Systems in Computer Science. Wiesbaden: Vieweg, Braunschweig, 1994. 155~169.

[4] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976.

[5] Walley P. Measures of uncertainty in expert systems. Artificial Intelligence, 1996,83(1):1~58.

[6] Zadeh LA. Review of books: A mathematical theory of evidence. AI Magazine, 1984,5(3):81~83.

[7] Murphy CK. Combining belief functions when evidence conflicts. Decision Support Systems, 2000,29(1):1~9.

[8] Sun Q, Ye XQ, Gu WK. A new combination rules of evidence theory. Acta Electronica Sinica, 2000,28(8):117~119 (in Chinese with English abstract).

[9] Smets P. Belief functions. In: SMETS P, Mamdani A, Dubois D, Prade H, eds. Nonstandard Logics for Automated Reasoning. London: Academic Press, 1988. 253~586.

[10] Xu LY, Zhang BF, Xu WM, Xu HY, Guo FF. Evidence ullage analysis in D-S theory and development. Journal of Software, 2004,15(1):69~75 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/69.htm

[11] Smets P. The combination of evidence in the transferable belief model. IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(5):447~458.

[12] SMETS P. Belief functions: the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem. International Journal of Approximate Reasoning, 1993,9(1):1~35.

附中文参考文献:

[8] 孙全,叶秀清,顾伟康.一种新的基于证据理论的合成公式.电子学报,2000,28(8):117~119.

[10] 徐凌宇,张博锋,徐炜民,徐怀宇,郭非凡.D-S理论中证据损耗分析及改进方法.软件学报,2004,15(1):69~75.http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/69.htm