平面无序点集曲线重建的跟踪算法*

钟 纲, 杨勋年, 汪国昭

(浙江大学 数学系,浙江 杭州 310027);
(浙江大学 计算机图像图形研究所,浙江 杭州 310027)
E-mail: zhonggang@css.zju.edu.cn; yxn@math.zju.edu.cn
http://www.zju.edu.cn

摘要: 由无序离散点集重建出曲线曲面模型,在反求工程与计算机视觉中都有着广泛的应用.根据实际采样中离散点分布相对集中的特点,给出了一个用简单曲线拟合平面上的无序点集的跟踪算法.该方法仅从当前跟踪点的邻近点集与曲线重建光顺准则出发,无须迭代,可快速、有效地跟踪得到无序点集的一个中轴点列,最后再由此点列拟合出参数曲线.实验结果表明,该方法是一个简单、有效的曲线重建方法.

关 键 词: 无序点集;曲线重建;跟踪算法;最小生成树
中图法分类号: TP391 文献标识码: A

正文反求工程(reverse engineering)的一个主要任务是由物理模型重建出几何表示模型,这其中包括数据采集、预处理、曲面拟合和建立 CAD 模型 4 个步骤[1].其核心问题是如何从采样点集出发重建出曲线、曲面的模型.又如,在计算机视觉中通常要考察如何从图像或扫描获得的离散数据点重建出几何模型,以利于形状分析和识别[2].上述二者都要求由已知的无序、带噪音的采样点集拟合出一条或多条曲线,反映出该点集的形状和走向,这就是人们常说的曲线重建问题.它无论是在反求工程还是在计算机视觉中都有着广泛的应用.

曲线拟合在逼近论和几何造型中都是一个重要的研究课题.从有序散乱点重建曲线,已经有了许多成熟的方法[3~5].对无序数据点的曲线重建,近年来已逐步受到人们的重视.到目前为止,现有的工作大致可分为 3 类.第 1 类方法采用回归或最小二乘拟合的方法.如 Levin,Lee 等人利用 moving least-square 方法,对原始点集进行两次局部最小二乘回归,细化点云,重建出曲线[6~8],但这种方法最大的缺点是所需计算量太大.第 2 类方法主要采用图像细化的方法来实现曲线重建.如 Pottmann 等人将原始的数据点集投影到平面网格上,以生成二值图像,Goshtasby 先由离散点构造势函数并生成灰度图像,最后利用图像细化算法来得到重建曲线[9,10],但该方法获得的重建曲线并不能很好地反映点云端点的形状,并且重建曲线的准确性甚至正确性受到网格分辨率的影响.第 3 类方法是由相应的曲线模型出发,直接进行重建.如 Fang,Taubin 等人分别利用弹力模型与隐式曲线模型,把已知数据点作为约束条件,直接求解曲线参数,得到重建曲线[11,12].这种方法常需要优化或迭代求解,对于噪音过多的数据点集,该方法也不够理想.

在反求工程与计算机视觉中,大量数据是从连续和光滑的物体上采样得到的,因此,在本文中我们考虑无序数据点集是从一条光滑、简单的曲线上采样得到并进行曲线重建的情形.由于采样、测量误差等原因,我们所得到的数据点并非完全落在曲线上,但同时又集中于采样曲线的附近,本文的目的也就是要由这些已知条件出发给出一个简单、有效的曲线重建算法.考虑到无序采样点的分布特点和待重建曲线的光滑、光顺性假设条件,

* 收稿日期: 2001-04-13; 修改日期: 2001-06-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971079);国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030600)
作者简介: 钟纲(1975－),男,湖南衡阳人,博士,主要研究领域为计算机图形学,计算机辅助几何设计;杨勋年(1971－),男,安徽六安人,博士,副教授,主要研究领域为几何造型,计算机图形学,计算几何;汪国昭(1944－),男,江西婺源人,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,医学图像三维重建.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

因此,构造目标函数 $I_1=\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}(\theta_i-\bar{\theta}_k)^2 l_i^2$,要找到合适的 $\bar{\theta}_k$,使得 I_1 达到最小值.

1.2.2 光顺项的选取

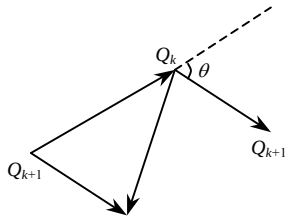

Fig.2 Sketch map of fairing
图 2 光顺示意图

为了保证重建曲线具有一定的光顺性,同时也为了减少局部采样不均匀对重建结果的影响,也要满足一定的光顺性条件.对于一条连续曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$ 进行光顺处理的一个常用标准就是它的弹性势能达到最小.若将 t 视为弧长参数,即有 $\int[\boldsymbol{Q}''(t)]^2\mathrm{d}t=\min$.将它离散表示就是 $\sum_{j=1}^{k}\left(\Delta^2\boldsymbol{Q}_j\right)^2=\min$,其中 $\Delta^2\boldsymbol{Q}_j$ 是在 $\boldsymbol{Q}_j$ 点处的二阶差分.因此对于跟踪点列 $\{\boldsymbol{Q}_j\}_{j=0}^{k+1}$ 即要使 $\sum_{j=1}^{k}\left(\Delta^2\boldsymbol{Q}_j\right)^2$ 达到最小.在上述和式中只有最后一项 $\left(\Delta^2\boldsymbol{Q}_k\right)^2$ 含有未知量 $\boldsymbol{Q}_{k+1}$,因此只需使 $\left(\Delta^2\boldsymbol{Q}_k\right)^2=\left\|(\boldsymbol{Q}_{k+1}-\boldsymbol{Q}_k)-(\boldsymbol{Q}_k-\boldsymbol{Q}_{k-1})\right\|^2$ 取到极小即可,如图 2 所示.根据余弦定理得,

$$\left(\Delta^2\boldsymbol{Q}_k\right)^2=\left\|\boldsymbol{Q}_k-\boldsymbol{Q}_{k-1}\right\|^2+\left\|\boldsymbol{Q}_{k+1}-\boldsymbol{Q}_k\right\|^2-2\left\|\boldsymbol{Q}_k-\boldsymbol{Q}_{k-1}\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{Q}_{k+1}-\boldsymbol{Q}_k\right\|\cos(\theta)\ .$$

当 $\theta=0$ 时, $\left(\Delta^2\boldsymbol{Q}_k\right)^2$ 取到最小值.它的几何意义是使新的跟踪方向与上一步的方向尽量一致.因此,构造光顺项的目标函数 $I_2=\left(\bar{\theta}_k-\pi/2\right)^2$,找到一个合适的 $\bar{\theta}_k$,使得 I_2 尽可能地小.

综合上述对逼近性和光顺性的分析,为保证重建曲线既能反映离散点集的形状特征,同时又具有较高的质量,我们希望 I_1 , I_2 能同时达到较小值,即要选取合适的 $\bar{\theta}_k$ 值满足

$$I_1+\lambda I_2=\min,$$

其中 λ 是调节因子,用于控制重建曲线的逼近效果与光顺效果.根据上述方程,可以得到

$$\bar{\theta}_k=\left(\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}l_i^2\theta_i+\lambda\cdot\pi/2\right)\Big/\left(\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}l_i^2+\lambda\right),$$

从而决定了跟踪方向 $\boldsymbol{T}$.在本文中,我们选取 $\lambda=\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}l_i^2$,可获得满意的结果.

1.3 跟踪步长的确定

已知跟踪方向 $\boldsymbol{T}$,需要沿该方向找到一点 $\boldsymbol{Q}_{k+1}$,使其位于点集 S 的中心.记跟踪步长为 $\bar{l}_k$.选取目标函数为点集 S 内各点 $\boldsymbol{P}_i$ 与 $\boldsymbol{Q}_{k+1}$ 的连线距离的加权平方和,其中选取向量 $\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{P}_i$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的夹角的余弦作为权值,从而保证距跟踪方向 $\boldsymbol{T}$ 越近的点对步长的影响越大.即目标函数为 $I_3=\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}\left\|\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{Q}_{k+1}\right\|^2\cdot\cos(\theta_i-\bar{\theta}_k)$,选择合适的 $\bar{l}_k$ 使得 I_3 值达到最小.由余弦定理可知

$$I_3=\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}\left[l_i^2+\bar{l}_k^2-2l_i\bar{l}_k\cos(\theta_i-\bar{\theta}_k)\right]\cos(\theta_i-\bar{\theta}_k)\ ,$$

所以要使 I_3 达到最小值,由上述方程可以得到

$$\bar{l}_k=\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}l_i\cos^2(\theta_i-\bar{\theta}_k)\Big/\sum_{\boldsymbol{P}_i\in S}\cos(\theta_i-\bar{\theta}_k)\ ,$$

这就是新的跟踪步长.从而得到新的跟踪点

$$\boldsymbol{Q}_{k+1}=\boldsymbol{Q}_k+\bar{l}_k\cdot\boldsymbol{T}\ .$$

1.4 影响半径 r 的选取

在前面的讨论中,我们考察的点集 S 都是以 $\boldsymbol{Q}_k$ 为圆心, r 为半径的位于局部坐标系一、四象限内的半圆中的数据点的集合,如图 1 所示.但这个 r 值的选取非常关键,若太小,则上述半圆完全落在区域 Ω 中,邻域内的点集不能反映点云在该点附近的走势;若太大,则会造成结果不太精确.在此,我们选取 $r=w\times d$,其中 w 为 $\boldsymbol{Q}_k$ 点所处网格的权值, d 为网格的宽度.这样使得图 1 中半圆的两个端点落在区域 Ω 外部,因而点集 S 能大致反映出点云在该局部的形状.通常,对于分布比较均匀的点集,我们取 d 略大于该点集的欧氏最小生成树的最大边长.

另一方面,若所考察的无序点集存在不同部分相距较近的情况(如图 3 所示),由于当前跟踪点 $\boldsymbol{Q}_k$ 的邻近点集 S 中可能会含有其他部分的点,因而也就会对跟踪得到的下一点 $\boldsymbol{Q}_{k+1}$ 的准确性,甚至正确性产生影响.因此,在此处引入最小生成树的方法.先根据原无序点集构造完全图,由此生成它的欧氏最小生成树,在前面的跟踪步骤中关于点集 S 的选取时,考察最小生成树在该半圆区域内的子集.记半圆内距点 $\boldsymbol{Q}_k$ 最近的数据点为 $\boldsymbol{N}$,令该子图中所有与点 $\boldsymbol{N}$ 处于同一连通分支的数据点构成的集合为 S .利用上述跟踪算法,得到相应的 $\bar{\theta}_k$ 和 $\bar{l}_k$,以避免其他部分点的干扰.图 3(a)和图 3(b)分别是采用了最小生成树和未采用最小生成树时获得的重建曲线.从中可以看出,最小生成树的引入可以有效地排除点的干扰,确保曲线的形状正确.

(a) Curve reconstructed by minimum spanning tree
(a) 采用最小生成树的重建曲线

(b) Curve reconstructed without minimum spanning tree
(b) 未采用最小生成树的重建曲线

Fig.3 Comparison of the reconstructed curves by or without minimum spanning tree
图 3 是否引入最小生成树得到的重建曲线的比较

1.5 终止条件

我们以跟踪的形式得到一个点列,当符合以下条件时,跟踪过程结束:

(1) 当所考察的半圆内含有初始点 $\boldsymbol{Q}_0$ 时,表示所获得的点列构成一条封闭的曲线,跟踪结束.

(2) 当所考察的半圆内无数据点云中的点,或者由上述跟踪算法所获得的步长值 $\bar{l}$ 小于某预先设定的阈值时,表示已经跟踪到曲线的一端,此时再从 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_0$ 出发,继续前述的跟踪算法,直至也满足条件(2),即跟踪到曲线的另一端,结束.

2 后置处理与曲线拟合

通过上述过程,我们跟踪得到了一个有序点列.由于点云在各局部分布的不均匀性,会使得跟踪出来的点列反映的是曲线的局部形状而非整体形状,从而造成某个局部的曲线形状失真.为了使最终曲线光顺以及反映点云形状,对生成的跟踪点列进行如下调整:

如图 4 中所示,设 $\boldsymbol{Q}_{i-1}$, $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{Q}_{i+1}$ 为已知的有序点列中的 3 个连续的点,考虑如何调整点 $\boldsymbol{Q}_i$ 的位置.过点 $\boldsymbol{Q}_i$ 作平行于 $\boldsymbol{Q}_{i-1}\boldsymbol{Q}_{i+1}$ 的直线 a ,直线 b 为过 $\boldsymbol{Q}_i$ 点且垂直于 a 的直线,交直线 $\boldsymbol{Q}_{i-1}\boldsymbol{Q}_{i+1}$ 于点 $\boldsymbol{M}$.设点 $\boldsymbol{Q}_i$ 所处的网格权值为 w ,宽度为 d ,取半径 $r = w\times d$,作一系列以 r 为半径,圆心落在线段 $\boldsymbol{MQ}_i$ 上的圆.分别计算出上述各圆内所含的原始离散数据点的个数,选取其中所含数据点最多的圆,并以此圆心作为调整后的 $\boldsymbol{Q}_i$ 点的位置 $\overline{\boldsymbol{Q}_i}$.对跟踪点列中所有的点进行上述调整操作,从而获得了一系列更加趋近于点云中心线的有序离散数据点.

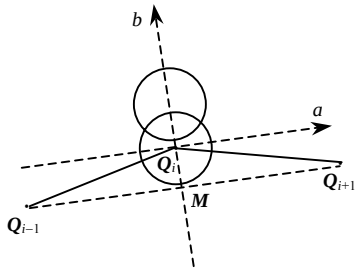

Fig.4 Adjust the position of a tracing point
图 4 调整跟踪点的位置

图 5(a)为跟踪过程中未添加光顺性条件并且未经过后置处理重建曲线,图 5(b)为加入光顺性条件并经过后置处理以后得到的重建曲线.后置处理通过微调跟踪点列各点的位置,使其克服点集分布不均带来的影响,尽量趋近于点云的中心线.比较两图可以看出,光顺性条件以及后置处理的引入有效地改善了曲线的形状.

这样,我们获得了一系列有序的数据点,它反映了点云的大致走向,接下来的工作是根据以上点列获得连续的参数表示.对于有序点列的拟合,已经有了成熟的方法,可以利用 Hoschek 和 Lasser 在文献[13]中介绍的 B 样条拟合离散数据点的方法,也可以利用经典的型值点反求 B 样条控制顶点的方法,从而获得一条二次或三次 B

样条曲线,作为原离散点云的重建曲线.

(a) Curve reconstructed without fairness term (b) Curve reconstructed with a fairness term
(a) 未含光顺项的重建曲线 (b) 含光顺项的重建曲线

Fig.5 The shape of the reconstructed curve can be improved by introducing a fairness term
图 5 光顺项的引入改善重建曲线的形状

3 实例与分析

我们在微机平台(PIII500,128Mb RAM)上实现了本文提出的算法以及文献[7]的算法.下面给出用这两种算法重建曲线的几个例子,如图 6 所示.其中离散数据点是通过如下方式获得的:采样位于曲线 $\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{N}(t)r(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)-\boldsymbol{N}(t)r(t)$ 之间的区域的数据点,其中 $\boldsymbol{C}(t)$ 是一平面曲线, $\boldsymbol{N}(t)$ 是 $\boldsymbol{C}(t)$ 在该平面上的法向量, $r(t)$ 是一条可变的半径.

(a) Our method (b) Lee's method
(a) 本文的方法 (b) Lee 的方法

Fig.6 Reconstructed curves
图 6 重建曲线

由大量实例可以看出,本文的算法可以重建出能准确反映原始点集形状的曲线.与 Lee 的方法相比较,该算法的一个明显优势是在保证重建曲线质量的同时,所需的计算时间大大减少.分析算法可以看出,本文的算法需要一次计算最小生成树,而每步跟踪方向与跟踪步长的确定也只需由当前跟踪点局部邻域信息一次计算得到.而 Lee 的方法不仅需要计算点集的 Delaunay 三角化,而且还需对每一个原始数据点计算一条回归直线和一条二次回归曲线,从而耗费了大量的计算量.表 1 给出了在各种例子下用本文的方法与采用 Lee 的方法所花费的时间对比,从中可以看出我们的方法在这方面有较大优势.

Table 1 Runtime comparison between our method and Lee's
表 **1** 本文的方法与 Lee 的方法在运行时间上的比较

Methods①	Runtime② (s)	
	Fig.6(a)	Fig.6(b)
Our method③	1.16	1.75
Lee's method④	136.85	124.11

①方法,②运行时间,③本文的方法,④Lee 的方法.

4 结 论

本文给出了一个由无序散乱点重建简单曲线的跟踪算法.该算法成功地模拟了连续曲线的跟踪过程,通过引入质量控制机制,可以重建出高质量的曲线.通过算法比较分析和大量实例证明,该算法计算简单,易于实现,具有有效、快速的特点.当然,我们现在处理的只是简单光滑曲线的重建问题,对于存在自交的情况以及点云具有明显角点的情况,仅使用该算法还不能很好地得到解决.对上述情况的处理以及向空间的推广将是今后需要考虑的问题.

References:

[1] Várady, T., Martin, R.R., Cox, J. Reverse engineering of geometric models——an introduction. Computer Aided Design, 1997, 29(4):255~268.

[2] Singh, R., Cherkassky, V., Papanikolopoulos, N. Self-Organizing maps for the skeletonization of sparse shapes. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000,11(1),241~248.

[3] Korsters, M. Curvature-Dependent parameterization of curves and surfaces. Computer Aided Design, 1991,23(8):569~578.

[4] Sarkar, B., Menq, C.-H. Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data. Computer Aided Geometric Design, 1991,8(4):267~290.

[5] Yang, Xun-nian, Wang, Guo-zhao. Planar point set fairing and fitting by arc splines. Computer Aided Design, 2001,33(1):35~43.

[6] Levin, D. The approximation power of moving least-squares. Mathematics of Computation, 1998,67(224):1517~1531.

[7] Lee, I.K. Curve reconstruction from unorganized points. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(2):161~177.

[8] Kégl, B., Linder, T. Learning and design of principal curves. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(3):281~297.

[9] Pottmann, H., Randrup, T. Rotational and helical surface approximation for reverse engineering. Computing, 1998,60(4):307~322.

[10] Goshtasby, A.A. Grouping and parameterizing irregularly spaced points for curve fitting. ACM Transaction on Graphics, 2000, 19(3):185~203.

[11] Fang, L., Gossard, D.C. Multidimensional curve fitting to unorganized data points by nonlinear minimization. Computer Aided Design, 1995,27(1):48~58.

[12] Taubin, G., Rondfard, R. Implicit simplicial models for adaptive curve reconstruction. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996,18(3):321~325.

[13] Hoschek, J., Lasser, D. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Wellesley, MA: A.K. Peters, 1993.

A Tracing Algorithm for Planar Curve Reconstruction from a Set of Unorganized Points*

ZHONG Gang, YANG Xun-nian, WANG Guo-zhao

(*Department of Mathematics*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *China*);

(*Institute of Computer Graphics and Image Processing*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *China*)

E-mail: zhonggang@css.zju.edu.cn; yxn@math.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

Abstract: Curve reconstruction from a set of unorganized points plays an important role in the fields of reverse engineering and computer vision. In this paper, a new tracing algorithm is presented for planar curve reconstruction based on the regular distribution property of the point set. The following central point within a small local region of current tracing point can be obtained based on the influence of neighboring points as well as the smoothness and fairness principle. Finally, a sequential of central points can be traced out efficiently without any iteration and a parametric curve can be reconstructed by interpolating the central points. The experimental results show that the tracing algorithm is an efficient method for curve reconstruction.

Key words: unorganized point; curve reconstruction; tracing algorithm; minimum spanning tree

---

* Received April 13, 2001; accepted June 26, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.19971079; the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1998030600