

区间三角 Bézier 曲面的降阶逼近*

杨勤民, 杨勋年, 汪国昭

(浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027);

(浙江大学 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

E-mail: yxn@math.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

摘要: 给出了高次区间 B-B(Bernstein-Bézier)曲面的降阶逼近算法.这里主要采用了线性规划方法,对降一阶情况还给出了分析求解方法.降阶逼近的结果可用于满足不同 CAD 系统之间数据转换的需要,也可用于节省一些几何操作的计算时间.

关键词: 计算机辅助几何设计;区间三角 B-B(Bernstein-Bézier)曲面;降阶逼近

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

曲线、曲面在 CAD/CAM 系统中至关重要,它们在计算机中的表示、显示和计算都有广泛的研究.为了减少存储量、提高计算效率,曲线曲面的降阶逼近被纳入正题.有时由于系统条件的限制也必须将高次的曲线曲面降为低次. Brunnett G, 胡事民等人在这方面都做了较多的工作^[1,2]. Sederberg 等人提出了区间 Bézier 曲线的概念^[3],以区间作为控制顶点,避免了在曲线曲面求交等问题中丢失交点的现象,克服了误差估计上的一些困难,提高了几何数值计算的稳定性.之后,区间曲线、区间曲面的研究迅速发展成为一个热点^[4,5].陈发来等人首次对区间 Bézier 曲线的降阶进行了研究^[6].三角 Bézier 曲面和张量积曲面一样也是几何造型系统中的一种重要形式,但区间三角 Bézier 曲面的降阶逼近并不能由曲线简单推广得到,为此,本文探讨区间三角 Bézier 曲面的降阶问题.本文的主要工作是寻求一张低次的区间三角 B-B(Bernstein-Bézier)曲面来包裹高次的区间三角 B-B 曲面,使此种包裹尽可能的紧密.

我们将首先介绍区间三角 B-B 曲面的基本概念,接着采用线性规划的方法对高次的区间三角 B-B 曲面用低次的区间三角 B-B 曲面来包裹,最后给出几个计算实例.

1 区间三角 B-B 曲面

区间的运算采用如下定义^[3]:

设 $[u], [v]$ 是两个区间, α 为常数, “*” 是通常的运算符, 如 “+”, “-”, “·”, “/” 等等, 则 $[u]*[v] = \{x*y | x \in [u], y \in [v]\}$, $\alpha*[u] = \{\alpha*x | x \in [u]\}$.

设 T 是以 T_1, T_2, T_3 为顶点的三角形, P 是 T 内的任意一点, P 关于 T 的重心坐标为 (u, v, w) , 则 $0 \leq u, v, w \leq 1$, 且 $u + v + w = 1$.

令 $[F] = \{[F_{ijk}] = ([F_{\underline{x};ijk}, F_{\bar{x};ijk}], [F_{\underline{y};ijk}, F_{\bar{y};ijk}]), [F_{\underline{z};ijk}, F_{\bar{z};ijk}]) | i, j, k \text{ 为非负整数, } i + j + k = n\}$, 则区间三角 Bernstein-Bézier 曲面定义为

* 收稿日期: 2001-03-07; 修改日期: 2001-05-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60073023); 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030600)

作者简介: 杨勤民(1977 -), 男, 湖北钟祥人, 硕士, 主要研究领域为计算机图形学, 计算机辅助几何设计; 杨勋年(1971 -), 男, 安徽六安人, 博士, 副教授, 主要研究领域为几何造型, 计算机图形图像, 计算几何; 汪国昭(1944 -), 男, 江西婺源人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 医学图像可视化.

$$B^n([F]; P) = \sum_{i+j+k=n} [F_{ijk}] B_{ijk}^n(P) = \sum_{i+j+k=n} ([F_{\underline{x};ijk}, F_{\bar{x};ijk}], [F_{\underline{y};ijk}, F_{\bar{y};ijk}], [F_{\underline{z};ijk}, F_{\bar{z};ijk}]) B_{ijk}^n(P), \tag{1}$$

简称为区间三角 B-B 曲面或区间三角 Bézier 曲面. $[F_{ijk}]$ 称为标架, 其中 $B_{ijk}^n(P) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$ 为 Bernstein-Bézier 基函数.

由区间运算的性质知区间三角 B-B 曲面相当于一些三角 B-B 曲面^[7]的并集, 即

$$B^n([F]; P) = \{B^n(f; P) \mid f = \{f_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \mid i + j + k = n\} \text{ 且 } \forall f_{ijk} \in f \text{ 有 } f_{ijk} \in [F_{ijk}]\}.$$

2 区间三角 B-B 曲面的降阶

定义区间三角 B-B 曲面的厚度如下:

定义 1. 设 $B^n([F]; P)$ 是由式(1)给出的区间三角 B-B 曲面, 定义 $B^n([F]; P)$ 的厚度为

$$W(B^n([F]; P)) = \frac{2}{3(n+1)(n+2)} \sum_{i+j+k=n} (F_{\bar{x};ijk} - F_{\underline{x};ijk}) + (F_{\bar{y};ijk} - F_{\underline{y};ijk}) + (F_{\bar{z};ijk} - F_{\underline{z};ijk}).$$

设 $B^n([F]; P)$ 是由式(1)给出的一张 n 次区间三角 B-B 曲面, 给定 $m < n$, 要求一张 m 次的区间三角 B-B 曲面

$$B^m([H]; P) = \sum_{i+j+k=m} [H_{ijk}] B_{ijk}^m(P), \text{ 使}$$

$$B^n([F]; P) \subset B^m([H]; P), \text{ 且 } W(B^m([H]; P)) = \min,$$

其中 $[H_{ijk}] = ([H_{\underline{x};ijk}, H_{\bar{x};ijk}], [H_{\underline{y};ijk}, H_{\bar{y};ijk}], [H_{\underline{z};ijk}, H_{\bar{z};ijk}])$.

先将 $B^m([H]; P)$ 升阶, 在形式上写为 n 次的区间三角 B-B 曲面. 设 $B^m(f; P) = \sum_{i+j+k=m} f_{ijk} B_{ijk}^m(P)$, 三角 B-B 曲面的升阶公式为^[7]

$$\left. \begin{aligned} G^0(f) &= f; \\ G^l(f) &= \{G^l(f_{ijk}) = \frac{1}{m+l} (iG^{l-1}(f_{i-1,j,k}) + jG^{l-1}(f_{i,j-1,k}) + kG^{l-1}(f_{i,j,k-1})) \mid i+j+k=m+l, l=1,2,\dots,n-m\}. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

定义相应的区间三角 B-B 曲面的升阶公式为

$$B^{m+l}(G^l([H]); P) = \sum_{i+j+k=m+l} G^l([H_{ijk}]) B_{ijk}^{m+l}(P).$$

其中

$$G^l([H]) = \{G^l([H_{ijk}]) = ([G^l(H_{\underline{x};ijk}), G^l(H_{\bar{x};ijk})], [G^l(H_{\underline{y};ijk}), G^l(H_{\bar{y};ijk})], [G^l(H_{\underline{z};ijk}), G^l(H_{\bar{z};ijk})]) \mid i+j+k=m+l, l=0,1,2,\dots,n-m\}.$$

升阶后, $B^n(G^{n-m}([H]); P)$ 中所含的曲面可分为两类: 一类是由 $B^m([H]; P)$ 中的曲面升阶得到的, 另一类是无法与 m 次曲面等价的曲面. 可以证明这些曲面的并集仍然是相等的. 有如下定理:

定理 1. $B^n(G^{n-m}([H]); P)$ 与 $B^m([H]; P)$ 表示同一张区间三角 B-B 曲面.

证明: $B^n(G^{n-m}([H]); P)$, $B^m([H]; P)$ 中的各标价均为长方体形的闭区域, 这些区域经过线性运算后仍为长方体形的闭区域, 所以 $\forall P \in T$, $B^n(G^{n-m}([H]); P)$, $B^m([H]; P)$ 均表示为一个长方体形的闭区域. 根据函数曲面升阶后曲面不变的性质以及区间三角 B-B 曲面升阶的定义易知, 升阶后得到的长方体各个面与升阶前得到的相同, 即 $B^n(G^{n-m}([H]); P) = B^m([H]; P)$. 再由 P 的任意性知对区间曲面进行直接升阶得到的区间曲面仍是同一张区间曲面.

根据此定理, 若要将 n 次曲面降为 m 次, 可以先求出 $B^n(G^{n-m}([H]); P)$, 再将其还原为 $B^m([H]; P)$. 由升阶公式(2), 可得到还原公式:

若已知 $G^{n-m}(f)$, 则

$$\begin{aligned} G^l(f) &= \{G^l(f_{ijk}) = \frac{1}{k+1} [(m+l+1)G^{l+1}(f_{i,j,k+1}) - iG^l(f_{i-1,j,k+1}) - jG^l(f_{i,j-1,k+1})] \mid \\ &\quad k=m+l, m+l-1, \dots, 0, i+j=m+l-k\}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $l = n-m-1, n-m-2, \dots, 0$.

对于区间三角 B-B 曲面,若已知 $G^{n-m}([H])$, 可用上述公式依次求出 $G^{n-m-1}([H]), G^{n-m-2}([H]), \dots, G^0([H])$. 而 $[H] = G^0([H])$.

在利用还原公式(3)之前,要确保 $B^n(G^{n-m}(f); P)$ 是次数不超过 m 的多项式. 设 $G^{n-m}(f) = \tilde{f} = \{\tilde{f}_{ijk} | i+j+k=n\}$, 则有下列定理:

定理 2. $B^n(\tilde{f}; P) = \sum_{i+j+k=n} \tilde{f}_{ijk} B_{ijk}^n(P)$ 表示一个次数不超过 m 的三角 B-B 曲面的充要条件是

$$\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{f}_{i,j,n-i-j} = 0,$$

其中 k_1, k_2 为非负整数,且 $m+1 \leq k_1+k_2 \leq n$.

证明: $B^n(\tilde{f}; P) = \sum_{i+j+k=n} \tilde{f}_{ijk} B_{ijk}^n(P)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \tilde{f}_{ijk} \\ &= \sum_{i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} u^i v^j (1-u-v)^{n-i-j} \tilde{f}_{i,j,n-i-j} \\ &= \sum_{i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \sum_{l_1+l_2 \leq n-i-j} (-1)^{l_1+l_2} \frac{(n-i-j)!}{l_1!l_2!(n-i-j-l_1-l_2)!} u^{i+l_1} v^{j+l_2} \tilde{f}_{i,j,n-i-j} \\ &= \sum_{i+j+l_1+l_2 \leq n} \frac{n!}{i!j!l_1!l_2!(n-i-j-l_1-l_2)!} (-1)^{l_1+l_2} u^{i+l_1} v^{j+l_2} \tilde{f}_{i,j,n-i-j} \\ &= \sum_{k_1+k_2 \leq n} \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} (-1)^{k_1+k_2-i-j} u^{k_1} v^{k_2} \tilde{f}_{i,j,n-i-j}, \end{aligned}$$

则 $B^n(\tilde{f}; P)$ 的次数不超过 m 等价于: $k_1+k_2 \geq m+1$ 时, $u^{k_1}v^{k_2}$ 的系数为 0. 即 $\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{f}_{i,j,n-i-j} = 0$,

$k_1+k_2 = m+1, m+2, \dots, n$.

设 $G^{n-m}([H]) = [\tilde{H}] = \{[\tilde{H}_{ijk}] = \{[\tilde{H}_{x:ijk}, \tilde{H}_{\bar{x}:ijk}], [\tilde{H}_{y:ijk}, \tilde{H}_{\bar{y}:ijk}], [\tilde{H}_{z:ijk}, \tilde{H}_{\bar{z}:ijk}]\} | i+j+k=n\}$, 则 $[\tilde{H}]$ 中各区间的顶点也应满足定理 2 中的充要条件, 才能将其还原为 m 次.

$[\tilde{H}]$ 的求解可归结为如下线性规划问题:

$$\min \sum_{i+j+k=n} (\tilde{H}_{\bar{x}:ijk} - \tilde{H}_{x:ijk}) + (\tilde{H}_{\bar{y}:ijk} - \tilde{H}_{y:ijk}) + (\tilde{H}_{\bar{z}:ijk} - \tilde{H}_{z:ijk}), \tag{4}$$

使得

$$\begin{cases} \tilde{H}_{x:ijk} \leq F_{x:ijk} \\ \tilde{H}_{\bar{x}:ijk} \geq F_{\bar{x}:ijk} \\ \tilde{H}_{y:ijk} \leq F_{y:ijk} \\ \tilde{H}_{\bar{y}:ijk} \geq F_{\bar{y}:ijk} \\ \tilde{H}_{z:ijk} \leq F_{z:ijk} \\ \tilde{H}_{\bar{z}:ijk} \geq F_{\bar{z}:ijk} \\ (i+j+k=n) \end{cases}, \tag{5}$$

$$\begin{cases}
 \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{H}_{x;i,j,n-i-j} = 0 \\
 \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{H}_{\bar{x};i,j,n-i-j} = 0 \\
 \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{H}_{y;i,j,n-i-j} = 0 \\
 \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{H}_{\bar{y};i,j,n-i-j} = 0 \\
 \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{H}_{z;i,j,n-i-j} = 0 \\
 \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-i-j} \binom{k_1}{i} \binom{k_2}{j} \tilde{H}_{\bar{z};i,j,n-i-j} = 0 \\
 k_1 + k_2 = m + 1, m + 2, \dots, n
 \end{cases} \quad (6)$$

式(4)保证了包裹最紧密,方程组(5)保证 $B^n([F];P) \subset B^n([\tilde{H}];P)$,方程组(6)保证了 $B^n([\tilde{H}];P)$ 是次数不超过 m 的三角 B-B 曲面,进而可精确降为 m 次的三角 B-B 曲面.

该问题可用 Matlab 等软件包来解决,得到 $[\tilde{H}]$ 后,利用还原公式(3)求出 $[H]$,从而得到 $B^m([H];P)$.

3 分析法求解

当 m 比较靠近 n ,例如 $m=m-1$ 时,可用分析法求解.

设

$$\begin{cases}
 \tilde{H}_{x;ijk} = F_{x;ijk} - \varepsilon_{x;ijk}^2 \\
 \tilde{H}_{\bar{x};ijk} = F_{\bar{x};ijk} - \varepsilon_{\bar{x};ijk}^2 \\
 \tilde{H}_{y;ijk} = F_{y;ijk} - \varepsilon_{y;ijk}^2 \\
 \tilde{H}_{\bar{y};ijk} = F_{\bar{y};ijk} - \varepsilon_{\bar{y};ijk}^2 \\
 \tilde{H}_{z;ijk} = F_{z;ijk} - \varepsilon_{z;ijk}^2 \\
 \tilde{H}_{\bar{z};ijk} = F_{\bar{z};ijk} - \varepsilon_{\bar{z};ijk}^2
 \end{cases}, \quad (7)$$

则上述线性规划问题转化为

$$\min \sum_{i+j+k=n} \varepsilon_{x;ijk}^2 + \varepsilon_{\bar{x};ijk}^2 + \varepsilon_{y;ijk}^2 + \varepsilon_{\bar{y};ijk}^2 + \varepsilon_{z;ijk}^2 + \varepsilon_{\bar{z};ijk}^2, \quad (8)$$

使得

$$\begin{cases}
 \varphi_{1l} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} \varepsilon_{xi,j,n-i-j}^2 - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} F_{xi,j,n-i-j} = 0 \\
 \varphi_{2l} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} \varepsilon_{\bar{x}i,j,n-i-j}^2 - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} F_{\bar{x}i,j,n-i-j} = 0 \\
 \varphi_{3l} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} \varepsilon_{yi,j,n-i-j}^2 - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} F_{yi,j,n-i-j} = 0 \\
 \varphi_{4l} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} \varepsilon_{\bar{y}i,j,n-i-j}^2 - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} F_{\bar{y}i,j,n-i-j} = 0 \\
 \varphi_{5l} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} \varepsilon_{zi,j,n-i-j}^2 - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} F_{zi,j,n-i-j} = 0 \\
 \varphi_{6l} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} \varepsilon_{\bar{z}i,j,n-i-j}^2 - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-i-j} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} F_{\bar{z}i,j,n-i-j} = 0
 \end{cases} \tag{9}$$

应用 Lagrange 乘子法求解上述问题并定义

$$f(\varepsilon_{xi,jk}, \varepsilon_{\bar{x}i,jk}, \dots, \varepsilon_{zi,jk}, \lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{6l} \mid i+j+k=n, l=0,1,\dots,n) = \sum_{i+j+k=n} \varepsilon_{xi,jk}^2 + \varepsilon_{\bar{x}i,jk}^2 + \varepsilon_{yi,jk}^2 + \varepsilon_{\bar{y}i,jk}^2 + \varepsilon_{zi,jk}^2 + \varepsilon_{\bar{z}i,jk}^2 + \sum_{i=1}^6 \sum_{l=0}^n \lambda_{il} \varphi_{il} .$$

由 $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{xi,jk}} = 0, \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\bar{x}i,jk}} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\bar{z}i,jk}} = 0, i+j+k=n$, 得到

$$\begin{cases}
 \varepsilon_{xi,jk} [(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{1l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1] = 0 \\
 \varepsilon_{\bar{x}i,jk} [(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{2l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1] = 0 \\
 \varepsilon_{yi,jk} [(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{3l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1] = 0 \\
 \varepsilon_{\bar{y}i,jk} [(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{4l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1] = 0 . \\
 \varepsilon_{zi,jk} [(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{5l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1] = 0 \\
 \varepsilon_{\bar{z}i,jk} [(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{6l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1] = 0 \\
 i+j+k=n
 \end{cases} \tag{10}$$

由 $\frac{\partial f}{\partial \lambda_{il}} = 0, i=1,2,\dots,6$, 得到 $\varphi_{il} = 0$.

在方程组(10)的第 1 个等式中共表示了 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个方程,对每一组 i, j, k 而言,要么 $\varepsilon_{xi,jk} = 0$, 要么

$(-1)^{n-i-j} \sum_{l=i}^{n-j} \lambda_{1l} \binom{l}{i} \binom{n-l}{j} + 1 = 0$. 而 $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}$ 中共有 $n+1$ 个未知数,至多能使 $n+1$ 个等式为 0, 所以

$\{\varepsilon_{xi,jk} \mid i+j+k=n\}$ 中至少有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ 个元素为 0. 同理, $\{\varepsilon_{\bar{x}i,jk} \mid i+j+k=n\}$,

$\{\varepsilon_{yi,jk} \mid i+j+k=n\}, \dots, \{\varepsilon_{\bar{z}i,jk} \mid i+j+k=n\}$ 中分别至少有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个元素为 0. 对每组 $\{\varepsilon_{xi,jk}, \varepsilon_{\bar{x}i,jk}, \varepsilon_{yi,jk}, \varepsilon_{\bar{y}i,jk}, \varepsilon_{zi,jk},$

$\varepsilon_{\bar{z}i,jk} \mid i+j+k=n\}$, 从中任取 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个元素,令其为 0,代入方程组(9)中,计算剩余 $n+1$ 元素.若有解则代入

式(8)中,计算目标函数的值.重新选其他元素,令其为 0,重复上述步骤,计算出所有可能的目标函数值,可得到最小目标函数所对应的 $\{\varepsilon_{\underline{x};ijk}, \varepsilon_{\bar{x};ijk}, \varepsilon_{\underline{y};ijk}, \varepsilon_{\bar{y};ijk}, \varepsilon_{\underline{z};ijk}, \varepsilon_{\bar{z};ijk} \mid i+j+k=n\}$.由式(7)算出 $\{\tilde{H}_{\underline{x};ijk}, \tilde{H}_{\bar{x};ijk}, \tilde{H}_{\underline{y};ijk}, \tilde{H}_{\bar{y};ijk}, \tilde{H}_{\underline{z};ijk}, \tilde{H}_{\bar{z};ijk} \mid i+j+k=n\}$ 即 $[\tilde{H}]$,进而求得 $[H]$.

在实际应用中若有其他要求,可适当增加一些约束条件,然后求解.

4 实 例

例 1:图 1 中将降阶前、后的图形进行了比较,原始的区间三角 B-B 曲面为 4 次,标架为

$$\begin{aligned} [F_{004}] &= ([80,82],[80,82],[70,72]); [F_{103}] = ([70,72],[80,82],[70,72]); \\ [F_{013}] &= ([90,92],[80,82],[70,72]); [F_{202}] = ([60,62],[70,72],[70,72]); \\ [F_{112}] &= ([80,82],[70,72],[40,42]); [F_{022}] = ([100,102],[70,72],[70,72]); \\ [F_{301}] &= ([50,52],[60,62],[70,72]); [F_{211}] = ([70,72],[60,62],[50,52]); \\ [F_{121}] &= ([90,92],[60,62],[40,42]); [F_{031}] = ([110,112],[60,62],[70,72]); \\ [F_{400}] &= ([55,57],[55,57],[70,72]); [F_{310}] = ([60,62],[50,52],[70,72]); \\ [F_{220}] &= ([80,82],[50,52],[70,72]); [F_{130}] = ([100,102],[50,52],[70,72]); \\ [F_{040}] &= ([105,107],[55,57],[70,72]). \end{aligned}$$

其厚度为 2.

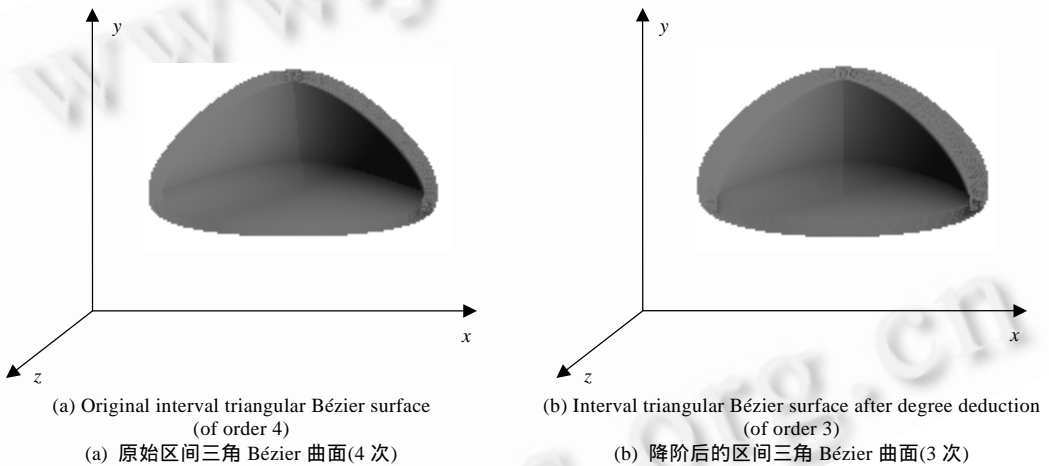


Fig.1 Contrast between the approximative interval triangular Bézier surface and it's original surface
图 1 区间三角 Bézier 曲面降阶前、后的图形比较

采用分析法求解,降阶后为 3 次,标架为

$$\begin{aligned} [H_{003}] &= ([80,82],[80,82],[70,72]); [H_{102}] = ([66.7,68.7],[78.3,82],[70,72]); \\ [H_{012}] &= ([93.3,95.3],[78.3,82],[70,72]); [H_{201}] = ([48.3,55.3],[61.7,63.7],[70,72]); \\ [H_{111}] &= ([77.5,84.5],[61.7,66.2],[10,32]); [H_{021}] = ([106.7,113.7],[61.7,63.7],[70,72]); \\ [H_{300}] &= ([55,57],[55,57],[70,72]); [H_{210}] = ([61.7,63.7],[48.3,52],[70,72]); \\ [H_{120}] &= ([98.3,100.3],[48.3,52],[70,72]); [H_{030}] = ([105,107],[55,57],[70,72]). \end{aligned}$$

其厚度为 3.47.降阶前、后的厚度比为 1:1.735.

例 2:如图 2 所示,将 1/8 拟区间球面(这里采用三角 B-B 曲面逼近球面)进行了降阶逼近.原始的区间三角 B-B 曲面为 5 次,采用 Matlab 中的函数求解线性规划的最优值进行降阶,降阶后为 4 次,降阶前、后的厚度比为 1:1.529.



(a) Original one eighth approximate interval spherical surface (of order 5)
(a) 原始 1/8 拟区间球面(5 次)

(b) Interval triangular Bézier surface after degree reduction (of order 4)
(b) 降阶后得到的区间三角 Bézier 曲面(4 次)

Fig.2 Approximate degree reduction of an eighth approximate interval spherical surface
图 2 1/8 拟区间球面的降阶逼近

References:

- [1] Brunnet, G., Schreiber, T., Braun, J. The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1996,13(8):773~788.
- [2] Hu, Shi-min, Zuo, Zheng, Sun, Jia-guang. Approximate degree reduction of triangular Bézier surfaces. *Tsinghua Science and Technology*, 1998,3(2):1001~1004.
- [3] Sederberg, T.W., Farouki, R.T. Approximation by interval Bézier curves. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1992,15(2): 87~95.
- [4] Hu, Chun-yi, Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., *et al.* Robust interval algorithm for Surface intersections. *Computer Aided Design*, 1997,29(9):617~627.
- [5] Tuohy, S.T., Maekawa, T., Shen, G., *et al.* Approximation of measured data with interval B-splines. *Computer Aided Design*, 1997,29(11):791~799.
- [6] Chen, Fa-lai, Lou, Wen-ping. Degree reduction of interval Bézier curves. *Computer Aided Design*, 2000,32(10):571~582.
- [7] Farin, G. Triangular Bernstein-Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, 1986,3(8):773~788.

Approximate Degree Reduction of Interval Triangular Bézier Surfaces*

YANG Qin-min, YANG Xun-nian, WANG Guo-zhao

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: yxn@math.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

Abstract: An efficient algorithm of bounding interval triangular B-B (Bernstein-Bézier) surfaces with lower degree interval triangular B-B surfaces is presented. The algorithm is based on linear programming techniques. An analytical method is also given for degree reduction of one order. The result of degree reduction approximation can be used for the purpose of data transmission among various CAD systems, as well as for the saving of computation time for some geometric operations.

Key words: computer aided geometric design; interval triangular B-B (Bernstein-Bézier) surface; approximate degree reduction

* Received March 7, 2001; accepted May 15, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60073023; the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1998030600