

# 基于曲面局平特性的散乱数据拓扑重建算法\*

谭建荣, 李立新

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

E-mail: {egi, lilixin}@cmee.zju.edu.cn

http://www.cad.zju.edu.cn

**摘要:** 提出了一种基于曲面局平特性的,以散乱点集及其密度指标作为输入,以三角形分片线性曲面作为输出的拓扑重建算法.算法利用曲面的局平特性,从散乱点集三维 Delaunay 三角剖分的邻域结构中完成每个样点周围的局部拓扑重建,并从局部重建的并集中删除不相容的三角形,最终得到一个二维流形拓扑曲面集作为重建结果.该算法适应于包括单侧曲面在内的任意不自交的拓扑曲面集,并且重建结果是相对优化的曲面三角形剖分,可以应用于科学计算可视化、雕塑曲面造型和反求工程等领域.

**关键词:** 散乱点集;拓扑重建;曲面局平特性;Delaunay 三角剖分;可视化;雕塑曲面造型;反求工程

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

在科学计算可视化、雕塑曲面造型和反求工程等应用领域,经常需要从一个离散点集出发,重建点集所在的原有曲面,这就是曲面重建问题.按点集的组织方式,输入点集可分为高度点元数据、截面线元数据和散乱点元数据 3 种<sup>[1]</sup>.在理论上,前两种数据可以看成是第 3 种数据的特例;在实践中,除了工业 CT 法之外,多数测量或实验方法,尤其是点集所属的基础场曲面具有比较复杂的拓扑结构和几何形状时,给出多方向的高度点元数据或无结构的散乱数据,即散乱点集.因此,基于散乱点集的曲面重建问题,无论在理论上还是在实践中都更具普遍性.解决散乱点集的曲面重建问题一般需要拓扑重建、网格简化与几何重建 3 个步骤<sup>[1~3]</sup>.其中拓扑重建就是要重建各样点之间的拓扑关系,重建的结果为一张(或多张分离的)与原曲面拓扑等价的三角形分片线性曲面.

按原曲面的拓扑类型是否已知,拓扑重建问题可分为任意拓扑<sup>[1~4]</sup>与既定拓扑<sup>[5~7]</sup>两类.可以重建任意拓扑曲面,尤其是重建有边界的任意拓扑曲面的方法是很少的.其中,美国华盛顿大学计算机系 Hoppe 等人<sup>[1]</sup>对这一问题进行了开创性的研究.他们首先给出了一个刻画点集密度的方法,引入了 $\rho$ 密度样本的定义,提出了一个基于等值面抽取的隐式曲面重建算法.加拿大多伦多大学 Guo 等人<sup>[3]</sup>提出了一个基于 $\alpha$ -shape 壳抽取的算法.美国犹他州 Amenta 等学者<sup>[2]</sup>提出了一个基于 Voronoi 邻域特性的重建算法.王青等人<sup>[4]</sup>提出了一个基于局部构造的快速增量算法.这些算法的特点及其与本文提出的算法的比较见表 1.对照可知,本文提出的算法具有适应面广、复杂度低等优点.

## 1 刻画点集密度的几个相关概念

为了实现曲面的拓扑重建,所给出的点集的密度必须足够大才有可能.如果样点集的密度太小,比如一个环面上只取了 4 个样点,则无论如何也不可能重建出一个与原曲面拓扑等价的曲面三角剖分来.可以断定,取点密度的要求应与曲面的局部弯曲程度有关:弯曲越严重,取点密度也应越大.除此之外,曲面的整体弯曲程度以及不同曲面间的接近程度这两个因素也是应该考虑的,也就是说,要求在任何样点的附近空间中都不存在测地很

\* 收稿日期: 2001-02-06; 修改日期: 2001-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69873038;69425005);国家教育部博士点基金资助项目(98033506)

作者简介: 谭建荣(1954 - ),男,浙江湖州人,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为产品信息学,CAX 方法学,工程图形学;李立新(1967 - ),男,山西定襄人,博士,副教授,主要研究领域为 CAD,CAGD.

远的样点或者其他曲面上的样点.为了比较准确地刻画对点集密度的要求,我们给出几个术语.

**Table 1** Comparison among the related algorithms for topology reconstruction  
表 1 拓扑重建的相关算法对照

Algorithm Characteristic	Hoppe's	Guo's	Amenta's	Wang Qing's	Ours
If fitting given points	No	Yes	Yes	Yes	Yes
If result is optimal	No	Yes	Yes	Yes	Yes
If multiple surfaces allowed	No	Yes	Yes	Yes	Yes
If trimmed surface allowed	Yes	Yes	No	Yes	Yes
If non-orientable surface allowed	No	No	No	Yes	Yes
If sampling density required	Yes	No	No	No	Yes
If variable sampling density allowed	Yes	No	Yes	Yes	Yes
If adjacent points number required	Yes	No	No	Yes	No
If user interaction required	No	Yes	No	No	No
Algorithm complexity	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(\text{Mlog}^{3/2}N)$

算法, 特性, 王青的算法, 本文的算法, 插值给定点集, 重建结果优化, 可建多张曲面, 可建带边曲面, 可建单侧曲面, 需知采样密度, 采样密度许变, 需知邻点个数, 需要用户交互, 算法的复杂度, 否, 是.

**定义 1(贴近曲面的三角形).** 如果曲面集  $X$  的一个样点三角形的最小外接球与曲面集  $X$  的交是一片圆盘拓扑曲面  $S$ , 且  $S$  上任一点的法矢与三角形法矢所夹的锐角均小于  $\pi/4$ , 则称此三角形是贴近曲面的三角形.

**定义 2(邻近球与邻近半径).** 假定  $x$  为曲面集  $X$  上的任意一点, 如果以  $x$  为球心, 以  $r(x)$  为半径的球  $O(x)$  满足以下两个条件: (1) 球  $O(x)$  与曲面集  $X$  的交是一片圆盘拓扑曲面  $S(x)$ ; (2) 过  $x$  与  $S(x)$  上另外任意两点所连的三角形都是贴近曲面的, 只要此三角形的外接圆完全落在球  $O(x)$  之内, 我们就可以认为  $S(x)$  是足够平展的, 称  $O(x)$  为点  $x$  处的一个邻近球,  $r(x)$  为相应的邻近半径.

如图 1 所示, 位于点  $b$  处的球即是曲面  $S$  的一个邻近球, 而点  $a$  处的球则不是.

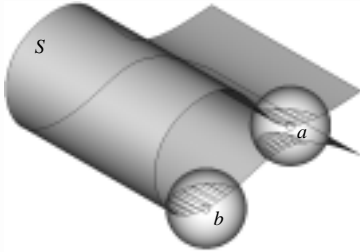


Fig.1 Vicinity sphere vs. vicinity radius  
图 1 邻近球与邻近半径

**定义 3(最大分离半径).** 如记点  $x$  的最大邻近半径为  $r_{\max}(x)$ , 曲面集  $X$  的所有  $r_{\max}(x)$  的下确界称为曲面集  $X$  的最大分离半径, 记为  $r_{\max}(X)$ .

显然, 根据曲面的拓扑流形定义, 即曲面的局平特性, 对于任意指定的光滑且不自交的曲面集  $X$ , 总有  $r_{\max}(X) > 0$ .

为此, 我们参照 Hoppe 关于  $\rho$  密度样本的定义<sup>[1]</sup>, 给出如下定义:

**定义 4( $\delta$  密度点集与采样空洞半径).** 假定  $P$  是曲面集  $X$  上的一个离散点集. 如果以曲面集  $X$  上任一点  $x$  为球心,  $\delta$  为半径的球面内至少有一个样点, 并且  $\delta < r_{\max}(X)/2$ , 则称点集  $P$  为曲面集  $X$  的一个  $\delta$  密度点集, 称  $\delta$  为采样空洞半径. 这里,  $r_{\max}(X)$  是指原曲面集  $X$  的最大分离半径.

在以上定义中之所以要求  $\delta < r_{\max}(X)/2$ , 是为了使每个外接圆半径小于  $\delta$  的样点三角形的外接圆都完全落在其 3 个顶点的最大邻近球中, 从而必是贴近曲面的. 这样, 所有这种三角形构成的集合具有如下特性: 共用其中任意一条边的相邻三角形最多分成两个集合, 落在其中一个集合中的任意两个三角形都夹成锐二面角, 而分别落在两个集合中的三角形都夹成钝二面角. 这就为我们重建足够平展的曲面三角剖分提供了充分条件.

为了使重建的曲面三角剖分与原曲面集  $X$  拓扑等价, 在以下的讨论中, 我们假定点集  $P$  是曲面集  $X$  的一个  $\delta$  密度点集.

## 2 算法实现的 3 个关键步骤

如图 2 所示, 为了从一个  $\delta$  密度点集  $P$  出发完成曲面拓扑重建, 我们的算法分为 3 步: 首先采用 Joe<sup>[8]</sup> 的面交换算法, 完成点集  $P$  在辅助四面体之内的空间 Delaunay 三角剖分  $D(P)$ ; 然后从  $D(P)$  中为每个样点找出其周围的合理三角形形成集合  $T(P)$ ; 最后, 从  $T(P)$  中删除不相容的三角形即得重建结果.

### 2.1 空间Delaunay三角剖分辅助顶点的计算

Joe<sup>[8]</sup>的面交换算法是一个高效的加点法.当 Joe 的算法在辅助四面体内进行时,可以获得更好的速度表现和编程便利.这时,首先需要引入辅助四面体的 4 个顶点,称为辅助顶点.这个辅助四面体将点集  $P$  完全包含在其内部.为了确保点集  $P$  凸包的外层四面体得以在这种算法中全部生成,辅助顶点离点集  $P$  的距离可能要非常远.在 Joe 的算法中,辅助顶点到点集  $P$  的距离通常要取到几万甚至几十万倍于点集  $P$  的直径.而事实上,即便如此也不能保证外层四面体一定可以被生成.与此同时,算法将构造很多像针一样细长的四面体,这对于采用有限精度的浮点运算来说,将可能产生非 Delaunay 三角剖分,甚至是拓扑不相容的四面体集合.

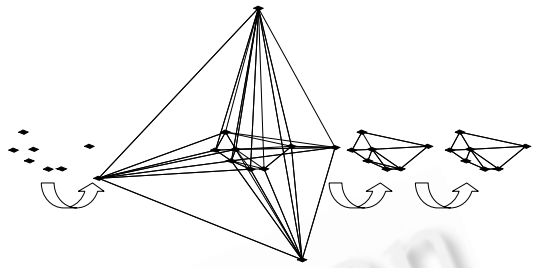


Fig.2 Three main steps for topology reconstruction  
图 2 拓扑重建的 3 个主要步骤

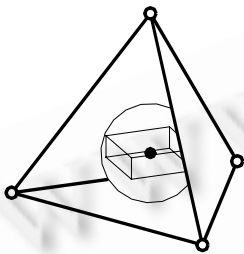


Fig.3 Choice of auxiliary vertexes  
图 3 辅助顶点的取法

但是,当 Joe 的辅助四面体加点法被用来进行曲面拓扑重建时,只要保证那些外接圆半径小于采样空洞半径的所需三角形能够在算法中生成即可.由于这些三角形所具有的最小空外接球的半径与采样空洞半径大致相等,故远小于点集  $P$  最小外接球  $O(P)$  的直径,因此,只要使辅助顶点离  $O(P)$  球心的距离大于  $O(P)$  的直径即可满足要求.由于准确计算  $O(P)$  的直径很费时也不必要,所以我们采用了点集  $P$  的最小包围盒的外接球来取代(即放大) $O(P)$ ,用一个外切于此  $O(P)$  的正四面体的 4 个顶点作为辅助顶点.可以证明,辅助顶点到此  $O(P)$  球心的距离等于此  $O(P)$  半径的 3 倍,如图 3 所示.用公式表示,设点集  $P$  的最小包围盒中心在原点,半径为  $r$ ,则 4 个辅助顶点的坐标分别为

$$(0,0,3r), (0,2\sqrt{2}r,-r), (\sqrt{6}r,-\sqrt{2}r,-r), (-\sqrt{6}r,-\sqrt{2}r,-r).$$

### 2.2 基于曲面局平特性的样点三角形局部构造

在完成  $D(P)$  的构造之后,我们就可以为  $P$  中的每个样点  $i$  递推地从  $D(P)$  中找出其周围合理的三角形.算法的基本思想源于曲面的局平特性,即曲面的局部是平坦的.因此,我们在这一步将为每一个样点找出一个贴近曲面的三角形集合,算法如下.

算法 1. 增量学习算法.

- (1) 从  $D(P)$  内样点  $i$  的相邻样点中找出最近样点  $x$ .
- (2) 从  $D(P)$  内共边  $ix$  的各个三角形中找出边  $ix$  的对角最大的三角形  $ixy$ .
- (3) 从  $D(P)$  内共边  $iy$  且与三角形  $ixy$  张成钝二面角的三角形中,找出边  $iy$  的对角最大的三角形  $iyz$ .如果三角形  $iyz$  的外接圆半径小于  $\delta$ ,将此三角形标记为已选三角形.否则,表明遇到了曲面的边界,则调换  $x,y$ ,转步骤(3).
- (4) 如此进行,直到第 2 次找到一个已选三角形,将样点  $i$  标记为内部点;或者直到第 2 次遇到曲面的边界,将样点  $i$  标记为边界点.

在以上步骤(2)中,如果共边  $ix$  的三角形中已有三角形被选,则只在被选三角形中找出边  $ix$  的对角最大的三角形  $ixy$ .在步骤(3)中,如果共边  $iy$  且与三角形  $ixy$  张成钝二面角的三角形中已有三角形被选中,则只在这些已选三角形中找出边  $iy$  的对角最大的三角形  $iyz$ .这个原则称为“继承优先”原则.它不仅加快了算法的速度,而且显著减少了不相容三角形的数量.所谓不相容三角形,是指两个夹成锐二面角的共边三角形,如图 4 所示的三角形  $Oi1$ .

除了“继承优先”原则,我们在以上算法中还采用了以下 4 个原则:(1) 最近边原则,即确保最近边入选.这一原则的理由是不言而喻的.(2) 张角最大

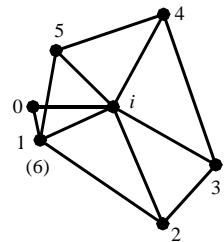


Fig.4 Incompatible triangle  
图 4 不相容的三角形

原则,即所选三角形应是当前边的对角最大的三角形.这一原则是为了使所选三角形的最小角尽量大.实际上,当点集  $P$  退化为平面点集时,这一原则将选择构成平面点集 Delaunay 三角剖分的三角形.(3) 钝面角原则.这一原则将构造比较平展的曲面三角剖分,并能确保算法的完成.(4) 边界判断原则,即三角形的外接圆大于数据空洞.对于有边界的曲面来说,这一原则将确保曲面边界得以重建.根据平面点集 Delaunay 三角剖分的特性可以证明,当所给点集确为平面点集时,这一算法将产生所给点集 Delaunay 三角剖分的一个子集.

### 2.3 不相容三角形的删除

由于三角形的局部构造算法是围绕着每一个样点局部进行的,所以,即便采用了“继承优先”的原则,当所有样点局部构造完成以后,所形成的三角形集合  $T(P)$  中还是可能出现一些不相容边.所谓不相容边,是指该边的相邻三角形中至少有两个夹成锐二面角,如图 4 中的边  $01$  就是一条不相容边.为了完成曲面拓扑重建,必须删除不相容边处的若干三角形,以使所剩三角形集合中的每一条边都变得相容,即要么仅为两个夹成钝二面角的三角形所共有,要么仅为一个三角形所有.为了达到上述目标且不致因错删三角形而出现原本没有的空洞,不相容三角形的删除算法仅仅删除以下两类三角形:

第 1 类,三角形顶点中至少有一个内点,并且过这一内点有一条边的阶为 1;

第 2 类,三顶点均是边界点,一边的阶为 1,而另外两条边处都有夹成锐角的三角形.

这里,某边的阶是指与共此边的相邻三角形的个数.如果以上两类三角形全部删除以后仍有不相容边,就找出任意一条不相容边,在共此边且相互夹成锐角的三角形中任选一个予以保留,删除其余三角形,然后再转而删尽上述两类三角形.如此循环,直到所剩三角形集合中没有不相容边为止.

显然,上述删除算法不会在原有三角形集合上删出空洞,并能保证不相容三角形逐步减少,因而可以删除所有不相容三角形,并保证所剩的三角形集合拓扑相容.

### 3 算例分析

本文提出的算法采用 VC++ 在 PC 机上编程实现,图 5~图 9 所示为算法的几个计算实例.各图中的  $\delta$  值是指采样数据空洞半径与原始点集包围盒的外接球半径之比.图 5 为圆环曲面的拓扑重建实例,图 6 为单侧曲面的拓扑重建实例,图 9 为两张曲面同时完成拓扑重建的实例.图 8 给出了本文的算法失败的一个例子.采自小丑帽曲面上的点集因为采样空洞半径过大而导致了错误的重建结果,即重建结果中出现了一个本不应有的空洞.这一例子说明,当所给点集不是原曲面上的一个  $\delta$  密度点集时,本文的算法给出的结果没有保证.

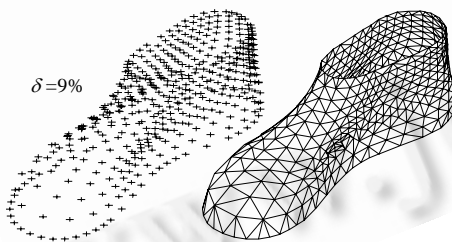


Fig.5 Unorganized points vs. topology reconstruction from a shoe last  
图 5 鞋楦曲面的散乱点集与拓扑重建

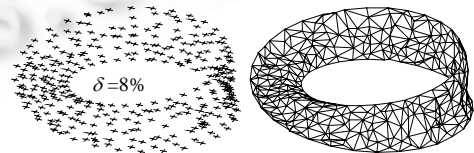


Fig.6 Unorganized points vs. topology reconstruction from a Möbius  
图 6 莫比乌斯带的散乱点集与拓扑重建

Joe 的面交换算法的复杂度为  $O(M\log^2 N)^{[8]}$ . 由于空间 Delaunay 三角剖分中各样点的相邻样点总数平均为 27.07(数学期望),是一个常数,因此,本文的算法第 2 步的复杂度是  $O(N)$ . 根据我们的实践,出现不相容边的概率是很小的,因此删除算法的时间复杂度可以忽略.

应该指出的是,理论分析 Joe 算法的复杂度是很困难的,所以 Joe 给出的是一个基于算例的经验复杂度.对于 Joe 的算法,我们在如图 5 所示的鞋楦曲面上随机取点进行了试算.通过对各个样本的耗时分析,我们发现这一算法的实际复杂度应该比  $O(M\log^2 N)$  还要小,  $O(M\log^{3/2} N)$  是一个更为准确的估计.表 2 是各个样本规模及 Joe 算法相应的耗时列表(CPU 为 Celeron300A,操作系统 Win98).

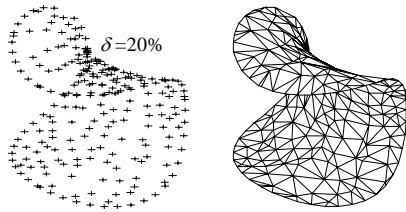
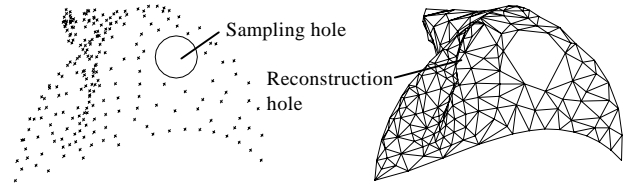


Fig.7 Unorganized points vs. topology reconstruction from a saddle  
图 7 马鞍面的散乱点集与拓扑重建



采样空洞, 重建空洞.  
Fig.8 Sampling hole vs. reconstruction hole from a clown cap surface  
图 8 小丑帽曲面的采样空洞与不应有的重建空洞

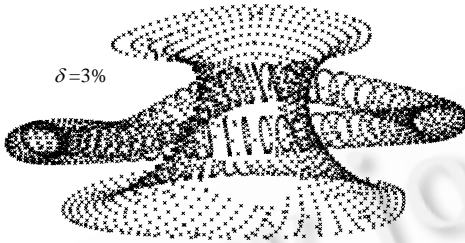


Fig.9 Unorganized points vs. topology reconstruction from two surfaces  
图 9 两张曲面的散乱点集及其同时完成的拓扑重建

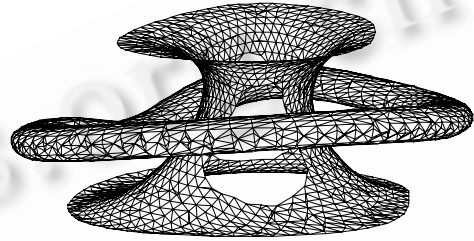


Table 2 Runtime of Joe's algorithm  
表 2 Joe 算法的耗时列表

$N$	$T(s)$	$100000T/N^2$	$10000T/(N\log^2N)$	$10000T/(N\log^{3/2}N)$	$10000T/(N\log N)$
10	0.001 876	1.876 000	1.876 000	1.876 000	1.876 000
100	0.040 007	0.400 070	1.000 175	1.414 461	2.000 350
1 000	0.623 941	0.062 394	0.693 268	1.200 775	2.079 803
2 000	1.365 243	0.034 353	0.626 442	1.138 166	2.067 905
3 000	2.172 707	0.024 141	0.599 019	1.116 992	2.082 860
4 000	3.147 942	0.019 675	0.606 548	1.151 172	2.184 821
5 000	4.046 835	0.016 187	0.591 540	1.137 691	2.188 087
6 000	4.966 397	0.013 796	0.579 871	1.127 123	2.190 841
7 000	6.172 358	0.012 597	0.596 401	1.169 478	2.293 220
8 000	7.070 689	0.011 048	0.580 169	1.146 196	2.264 452
9 000	8.025 443	0.009 908	0.570 295	1.134 048	2.255 086
10 000	9.116 534	0.009 117	0.569 783	1.139 567	2.279 134

#### 4 结 论

理论分析与实际算例表明,本文提出的算法具有如下特点:

(1) 适应面广.由于算法的出发点是曲面的局平特性,所以只要所给的散乱点集足够密,并且这一点集所属的基础场是一张(或若干张分离的)光滑曲面,本文的算法就可以重建相应的三角形分片线性曲面.这个基础场可以是包括单侧曲面在内的不自交任意拓扑曲面的集合.因此,本文的算法可以应用于科学计算可视化、雕塑曲面造型、反求工程等领域.

(2) 重建结果优化.由于本文在样点三角形的局部构造中采用了“张角最大”原则,因此,重建结果是相对优化的曲面三角形剖分.事实上,当点集所属的基础场是一个平面区域时,本文的算法给出的重建结果是给定点集 Delaunay 三角剖分的一个子集.

(3) 速度快.本文的算法的复杂度即是 Joe 关于空间点集 Delaunay 三角剖分算法的复杂度.虽然理论分析这一算法的复杂度是很困难的,但算例表明,算法的经验复杂度大约是  $O(N\log^{3/2}N)$ .

**References:**

- [1] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., *et al.* Surface reconstruction from unorganized points. *Computer Graphics*, 1992,26(2): 71~78.
- [2] Amenta, N., Bern, M., Kamvysselis, M. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm. In: Cohen, M., ed. *SIGGRAPH 98 Conference Proceedings*. Boston: Addison Wesley, 1998. 415~421.
- [3] Guo, B., Menon, J. and Willette, B. Surface reconstruction using alpha shapes. *Computer Graphics Forum*, 1997,16(4):177~190.
- [4] Wang, Qing, Wang, Rong-qing, Bao, Hu-jun, *et al.* A fast progressive surface reconstruction algorithm for unorganized points. *Journal of Software*, 2000,11(9):1221~1227 (in Chinese).
- [5] Vemuri, B.C., Mitiche, A., Aggarwal, J.K. Curvature-Based representation of objects from range data. *Image and Vision Computing*, 1986,4(2):107~114.
- [6] Brinkley, J. Knowledge-Driven ultrasonic three-dimensional organ modeling. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1985,7(4):431~441.
- [7] Schmitt, F., Barsky, B., Du, W. An adaptive subdivision method for surface fitting from sampled data. *Computer Graphics*, 1986, 21(2):179~188.
- [8] Joe, B. Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations. *Computer Aided Geometric Design*, 1991,8:123~142.

**附中文参考文献:**

- [4] 王青,王融清,鲍虎军,等.散乱数据点的增量快速曲面重建算法.软件学报,2000,11(9):1221~1227.

## **An Algorithm for Topology Reconstruction from Unorganized Points Based on Local Flatness of Surface\***

TAN Jian-rong, LI Li-xin

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: {egi,lilixin}@cmee.zju.edu.cn

<http://www.cad.zju.edu.cn>

**Abstract:** An algorithm for topology reconstruction is promoted that takes as input an unorganized set of points with known density and carries out as output simplicial surfaces. This algorithm uses the local flatness of surface, searches the local reconstruction for every point from the 3D Delaunay triangulation, and from the union of such locale reconstruction, carries out corresponding manifolds by deleting incompatible triangles. With an optimizing surface triangulation as result, this algorithm is suitable for surfaces of arbitrary topology, including nonorientable ones, hence can be applicable to visualization in scientific computing, sculpture surface modeling, and reverse engineering.

**Key words:** unorganized points; topology reconstruction; flatness of surface; Delaunay triangulation; visualization; sculpture surface modeling; reverse engineering

---

\* Received February 6, 2001; accepted April 24, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.69873038, 69425005; the National Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China No.98033506