

## 凸多面体的快速形态和算法\*

刘文予, 李华, 朱光喜

(华中科技大学 电子与信息工程系, 湖北 武汉 430074)

(图像信息处理与智能控制教育部重点实验室, 湖北 武汉 430074)

E-mail: liuw\_y\_2002@mails1.hust.edu.cn

http://www.sicimage.hust.edu.cn

**摘要:** 在研究传统形态算法的基础上, 将凸多面体的形态和算法简化为面与面的形态和; 结合三维物体的法矢球模型, 引入参考平面的概念. 参考平面将三维空间的凸多边形分解成两部分, 分别计算对应的两部分的形态和, 并去掉重复边和面. 提出一种凸多面体的快速形态算法, 与传统方法相比, 该方法简单、直观, 算法效率可提高 6~10 倍. 实验证明, 该方法是可行的、有效的.

**关键词:** 凸多面体; 形态和; 快速算法; 参考平面; 法矢球

**中图法分类号:** TP391 **文献标识码:** A

形态算子应用于形状的描述是目前图形学中研究的热点. Lozano-Perez 为了解决机器人运动过程中的碰撞问题, 首次提出了实现两凸多面体形态差算法<sup>[1]</sup>, 当两凸多面体的顶点数均为  $O(n)$  时, 算法复杂度为  $O(n^2 \log n)$ . Schwartz 为计算两凸多边形的最小距离, 提出了一种实现两凸多边形形态和的算法<sup>[2]</sup>. 该算法的复杂度为  $O(m+n)$ , 其中  $m$  和  $n$  分别为两多边形的顶点数. 随后, Lozano-Perez 将形态差的概念应用到空间安排 (spatial planning) 中<sup>[3]</sup>. 他提出的二维凸多边形形态差算法的复杂度为  $O(m+n)$ . Kaul 和 Rossignac<sup>[4]</sup> 提出了实现两多面体形态和的两种算法, 一种适用于任意多面体, 另一种针对凸多面体, 两种算法的复杂度均为  $O(n_1 \times n_2)$ , 其中  $n_1, n_2$  分别为两多面体的顶点数. 1990 年, Ghosh 用形态运算实现了多边形包含、空间安排等问题, 并提出了计算任意两个二维平面区域形态差的算法<sup>[5]</sup>. 他将集合理论运用于形态差计算, 使计算复杂度降低了. 由于集合理论适用于整个欧氏空间, 凸多边形的形态差算法推广至高维任意物体随之成为可能. 1993 年, Ghosh 又在原有算法基础上提出了一种二维多边形、三维多面体形态和、差在理论上统一的算法<sup>[6,7]</sup>, 通过引入“负形状”这一概念, 形态和、差被归结为同一种运算. 由于凸物体可以表示为纯“正”或纯“负”的物体, 凹物体可以表示为正、负物体之和, 故算法在凸、凹物体的计算上也得到统一. 文中提出了一种新的多边形、多面体表示方法, 这种方法不仅使统一的算法概念更易于理解, 而且提高了计算效率.

我们在文献[8]中提出了一种曲线、曲面和多面体的形态和算法统一模型, 并具体实现了任意两个多面体的形态和算法<sup>[9]</sup>, 把多面体形态和算法简化为点和面、边和边、面和面的形态和运算, 由于要检测两个多面体中任意两点、两边、两面之间是否满足 DHS (different half space) 关系<sup>[9]</sup>, 因此算法较为复杂. 形态学方法广泛应用于扫描曲面造型、字体合成及非同拓扑结构物体的自动内插,

\* 收稿日期: 2000-01-13; 修改日期: 2000-05-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69973018); 湖北省自然科学基金资助项目(99J009)

作者简介: 刘文予(1963-), 男, 湖南株州人, 教授, 主要研究领域为计算机图形学, 多媒体通信及信息处理, 计算机视觉, 计算机网络; 李华(1975-), 女, 河南郑州人, 博士, 主要研究领域为计算机图形学, 多媒体通信; 朱光喜(1945-), 男, 广西桂林人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为多媒体通信, CSLW.

但由于形态和算子的膨胀特性,使得直接用形态和算子进行图形变换会产生病态结果<sup>[10]</sup>. 解决这个问题的办法是把非凸物体进行凸分解,产生一系列的子凸体,然后分别对子凸体进行形态操作,再进行合并. 因此,快速的凸多面体形态算法是形态学在图形学中应用的基础. 本文把凸多面体的形态和算法简化为面与面的形态和,并由三维空间中的凸多边形通过最大凸包距离点的直线分解成两部分,分别计算对应的两部分的形态和,从而提出了一种凸多面体的快速形态和算法. 与前述方法相比,本文提出的方法简单、直观,算法复杂度低. 与传统方法相比,算法效率可提高 6~10 倍.

### 1 凸多面体的快速形态算法

**定义 1.** 如果集合  $X \subset E^R$  的补集  $X'$  是  $E^R$  的开集,  $X$  为  $E^R$  的闭集称为  $X$  的闭包,记为  $\bar{X}$ .

**定义 2.** 一个点集  $A$  的规则性  $\gamma(A)$  由式  $\gamma(A) \equiv G(i(A))$  定义,其中  $G(A)$  和  $i(A)$  表示  $A$  的闭包和内部,称满足  $\gamma(A) \equiv A$  的集合是规则的.

下面的讨论都针对规则的实体多面体和多边形来进行.

**定义 3.** 设  $E^3$  中的集合  $X$  和结构元素  $B$  为  $E^3$  或其子空间  $E^2, E^1$  中的一个点集,称集合  $X$  关于结构之集  $B$  的形态和算子定义为如下实体:

$$X \oplus B = \{x; B_x \cap X \neq \emptyset\},$$

其中  $B_x = \{x-b; b \in B\}$ .

性质 1.  $\lambda(X \oplus B) = \lambda X \oplus \lambda B$ .

性质 2.  $X \oplus (B \cup C) = (X \oplus B) \cup (X \oplus C)$ .

利用性质 2,可以把几个物体的形态运算分解成单个物体的形态运算,并可以通过布尔运算把复杂的物体分解成简单物体的形态运算.

性质 3.  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ .

把  $B$  进行分解,  $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n$ , 利用性质 3,对  $B_i$  进行重新排序,以提高形态运算的速度.

**定理 1<sup>[3]</sup>.** 两个多面体的形态和的闭包与坐标系的选择无关,与坐标变换无关,只与前后形状有关.

**定理 2.** 两个实体集合  $A$  和  $B$  的形态和边界  $E(A \oplus B)$  是它们各自边界的形态和边界的子集,即  $E(A \oplus B) \subset E(E(A) \oplus E(B))$ .

**定理 3<sup>[2]</sup>.** 设任意两个多面体的实体  $A, B$ , 记  $E(A \oplus B)$  的闭包为  $\bar{X}(A \oplus B)$ , 则有  $\bar{X}(A \oplus B) = \bar{X}(E(A) \oplus E(B) \cup V(A) \oplus F(B) \cup V(B) \oplus F(A))$ , 式中  $V$  表示顶点集,  $F$  表示面集.

**推论 1.**  $A \oplus B$  的面只能是  $E(A) \ominus E(B), F(A) \oplus E(B), F(B) \oplus E(A)$  中的某一个.

定理 3 与推论 1 给出求两个三维多面体形态和的方法,但复杂度较高.

在实际应用中,凸多面体的形态和算法更具广泛性. 下面,我们给出两个凸多面体的形态和快速算法.

**定理 4.** 对于两个凸三维多面体  $A, B$ , 有  $A \oplus B = \overline{F(A) \oplus F(B)}$ .

证明:由定理 3,

$$\overline{A \oplus B} = \overline{F(A) \oplus V(B) \cup F(B) \oplus V(A) \cup E(A) \oplus E(B)},$$

因为,  $E(A) \subset F(A), V(A) \subset F(A)$ , 由形态和的单调性,则有:

$$F(A) \oplus V(B) \subset F(A) \oplus F(B),$$

$$F(B) \oplus V(A) \subset F(B) \oplus F(A),$$

$$E(A) \ominus E(B) \subset F(B) \oplus F(A).$$

所以,  $\overline{A \oplus B} \subset \overline{F(A) \oplus F(B)}$ .

又因为  $F(A) \subset A, F(B) \subset B$ , 则有  $F(A) \oplus F(B) \subset A \oplus B$ . □

根据三维物体法矢球的统一形态算法模型<sup>[8]</sup>,任一三维物体都可用惟一的法矢球来表示,则两个物体的形态运算转化为法矢球的集合运算.凸多面体的法矢球由3部分组成,多面体中的面对应于法矢球上的一个点,多面体中的一条边对应于由与边相邻的两个面法矢球上的两个点的连线,即法矢球的一条弧,多面体中的顶点对应于法矢球上由顶点相邻的边对应的弧线所围成的一个球面片.多面体中除面以外,边和顶点的法矢不惟一.因为多面体是凸的,没有凹点和凹边,则法矢球上任一点只存在惟一法矢.图1为三维曲面及法矢球表示,

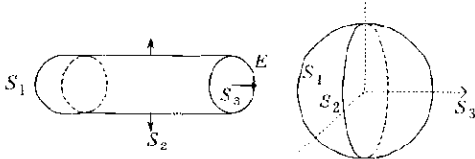


Fig.1 The normal vector sphere of surface  
图1 曲面的法矢球表示

$S_1$  为半球面,对应于法矢球上的  $S_1$  半球,圆柱面  $S_2$  对应于法矢球上的最大圆周  $S_2$ ,平面  $S_3$  对应于法矢球上的一个点  $S_3$ ,平面与圆柱面的交线圆周  $E$  对应法于矢球上除  $S_3$  点以外的右半球.根据法矢球的统一形态算法模型,法矢球上相同的法矢

才能进行计算,因此,物体  $A$  中的任意一个面  $f$ ,只能与  $B$  中的与  $f$  相同法矢的面进行计算,或  $f$  与  $B$  中包含有与  $f$  法矢相同的边和顶点进行计算,由定理4可知,边和顶点的形态计算可转换成面和面的形态运算.

**定理5.** 凸多面体  $A, B$  上的两个面  $f_a$  和  $f_b$  的法矢夹角如果大于  $120^\circ$ ,则  $f_a \oplus f_b$  一定不是  $A \oplus B$  的边界.

证明:法矢球上的一个最大圆周为  $360^\circ$ ,它至少包含3个面,由法矢球模型及定理4可知,若  $f_a$  与  $B$  中的面  $f_b$  进行形态运算,则  $f_b$  只能是以下两个条件之一:或者  $f_b$  与  $f_a$  的法矢相同,或者  $f_b$  中包含有某个顶点,此顶点的法矢变化范围中包含有与  $f_a$  相同的法矢.对于第1种情况,显然  $f_a$  与  $f_b$  法矢夹角为  $0$ .对于第2种情况,如果  $f_a$  与  $f_b$  的法矢夹角大于  $120^\circ$ ,则一定可以找到与  $f_b$  相邻的一个面  $f_c$ , $f_c$  与  $f_b$  有共同的公共边或共同的公共顶点, $f_c$  与  $f_a$  的法矢夹角小于  $120^\circ$ ,则  $f_a \oplus f_b$  可用  $f_a \oplus f_c$  代替. □

定理4和定理5给出一种求两个凸多面体的形态和的算法,由于只计算面与面之间的形态和,并且无须作复杂的DHS条件判断<sup>[9]</sup>,因此,算法效率得以提高.

## 2 三维空间中的两个二维多边形的快速形态算法

**定理6.** 设  $A, B$  为  $E^3$  中的两个凸多边形,则有  $\overline{A \oplus B} = \overline{E(A) \oplus E(B)}$ .

定理6表明,若计算两个凸多边形的形态和,只需计算  $A$  与  $B$  的边的形态和,并删除多余的边,即可得到结果.设多边形为  $f_a$  和  $f_b$ , $f_a$  和  $f_b$  的法线生成的平面记为参考平面  $P$ ,在  $f_a$  中找一条与参考平面  $P$  平行的最长直线,记为  $l$ ,显然, $l$  一定经  $f_a$  的某个顶点,记为  $g'$ .设  $l$  与  $f_a$  的另一个交点为  $x$ ,把  $f_a$  分成两个部分  $g', a', b, x$  和  $x, c', d', e'$ , $f, g'$ ,两个交点为  $g', x$ .同理,设多边形  $f_b$  中与参考平面  $P$  平行的最长直线为  $l'$ ,两个交点为  $b$  和  $y$ , $l'$  把  $f_b$  分成两个部分, $y, f, a, b$  和  $b, c, d, e, y$ ,如图2所示.

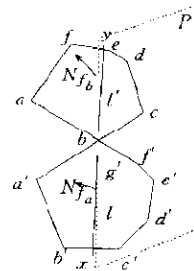


Fig.2 A polygon is divided two parts by reference plane  $P$   
图2 参考平面  $P$  把多边形分成两个部分

定理 7.  $f_a, f_b$  只有在参考平面  $P$  同侧的边的形态和结果才有可能是  $f_a \oplus f_b$  的一部分.

证明: 因为  $f_a, f_b$  是凸多边形, 设边  $e_1 \subset f_a, e_2 \subset f_a, e_1, e_2$  在参考平面  $P$  的两侧, 则  $f_a$  的法矢量由面的法矢、边的法矢和点的法矢组成. 面的法矢有两个, 正方向的法矢  $N_{f_a}$  和负方向的法矢  $-N_{f_a}$ ,  $N_{f_a}$  和  $-N_{f_a}$  在法矢球的直径上, 如图 3 所示. 同理,  $f_b$  的面法矢  $N_{f_b}, -N_{f_b}$  在球的另一个直径上, 则参考平面  $P$  的法矢在与  $N_{f_a}$  构成的平面相垂直的直径上.  $e_1$  边的法矢为由与  $f_a$  平行且垂直于  $e_1$  边的方向构成, 设为  $N_{e_1}$ , 则  $e_1$  边的法矢球表示由  $N_{e_1}, N_{f_a}, -N_{f_a}$  这 3 点构成的半圆弧组成, 这个半圆弧在法矢球与  $P$  平面相交的上半部. 同理,  $e_2$  边的法矢球表示由  $N_{e_2}, N_{f_a}, -N_{f_a}$  这 3 点构成的半圆弧构成, 这个半圆弧在法矢球与  $P$  平面相交的下半部, 这两个半圆弧一定不相交, 没有共同的法矢方向, 故  $e_1 \oplus e_2$  不是  $f_a \oplus f_b$  的结果中的一部分.  $\square$

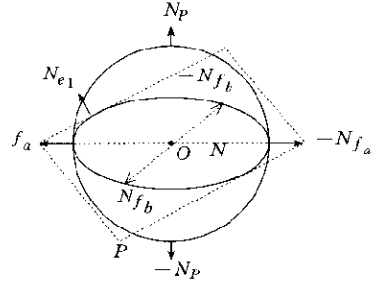


Fig. 3 The normal vector sphere of two polygons  $f_a, f_b$  and the reference plane  $P$

图3 两个凸多边形  $f_a, f_b$  和参考平面  $P$  的法矢球

由定理 6 和定理 7 可知, 三维空间中两个凸多边形  $f_a$  和  $f_b$  的快速形态和算法如下:

- (1) 求  $f_a, f_b$  与参考平面  $P$  的交点, 记为  $V_{a_1}, V_{a_2}$  和  $V_{b_1}, V_{b_2}$ , 其中  $V_{a_1}, V_{a_2}$  把  $f_a$  分成两个部分, 记为  $V_{a_1}, a_2, a_3, \dots, V_{a_2}$  和  $V_{a_2}, a_1, a_{i+1}, \dots, V_{a_1}$ ,  $V_{b_1}, V_{b_2}$  把  $f_b$  分成两个部分, 记为  $V_{b_1}, b_2, b_3, \dots, V_{b_2}$  和  $V_{b_2}, b_1, b_{i+1}, \dots, V_{b_1}$ .
- (2) 把  $f_a$  平移, 使  $V_{b_1}$  与  $V_{a_1}$  重合.
- (3) 执行  $f_a \oplus V_{b_2}$ , 即把  $f_a$  复制到  $V_{b_2}$  的位置, 记为  $f'_a$ .
- (4) 把  $f_a$  与  $f'_a$  前一部分对应点  $(V_{a_2}, V'_{a_2}), (a_i, a'_i), (a_{i+1}, a'_{i+1})$  之间用  $V_{b_2}, b_i, b_{i+1}, \dots, V_{b_1}$  的边相连, 产生一系列的平行边.
- (5) 依次把  $V_{b_1}, b_2, b_3, \dots, V_{b_2}$  产生的一系列平行边用直线相连, 把  $V_{a_2}, b_i, b_{i+1}, \dots, V_{b_1}$  产生的一系列平行边用直线相连, 即得  $f_a \oplus f_b$  的结果.

在实际计算中, 为了提高效率, 如果交点  $V_{a_1}, V_{a_2}$  和  $V_{b_1}, V_{b_2}$  不是  $f_a, f_b$  的顶点, 则用  $V_{a_1}, V_{a_2}$  和  $V_{b_1}, V_{b_2}$  的最近邻顶点代替.

在三维空间中两个凸多边形的快速形态和算法的基础上, 根据定理 6, 三维凸多面体  $A, B$  的形态和快速算法为

- (1) 依次在  $A$  中选一个面  $f_a$ , 在  $B$  中寻找满足与平面  $f$  的法线夹角小于  $120^\circ$  的所有平面  $f_b$ .
- (2) 根据凸多边形的快速形态和算法计算  $f_a \oplus f_b$ .

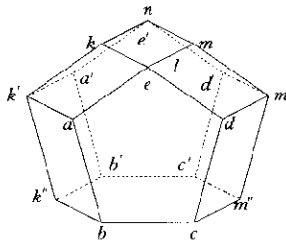
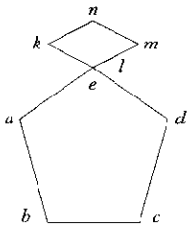


Fig. 4 The processing of Minkowski addition for two convex polygons

图4 两个凸多边形的形态和计算过程

(3) 在第(1)、(2)步执行完毕后, 计算  $A \oplus B$  的凸包, 即把内部的边和重复的边删除, 将一条直线上相邻的短边合并成更大的边.

图 4 为两个凸多边形  $f_a$  与  $f_b$  的快速形态和计算过程,  $f_a$  的顶点为  $a, b, c, d, e$ ,  $f_b$  的顶点为  $k, l, m, n$ , 与参考平

面  $P$  的两个交点设为  $l, n$ ,  $f_a \oplus n$  的结果为  $f'_a$ , 即把  $f_a$  复制到  $e$  点与  $n$  点重合的位置上.  $f'_a$  的顶点记为  $a', b', c', d', e'$ , 则  $f_a$  与  $f'_a$  的对应点  $a$  和  $a'$  之间用  $n, k, l$  边连接, 得到  $a', k', a$  边.  $b$  和  $b'$  对应点间用  $n, k, l$  边连接, 得到  $b', k'', b$  边, 再连接  $k, k'$  边,  $k', k''$  边. 同理, 对  $f_a$  的右半部分也同样处理, 即得到两个凸多边形的形态和结果.

### 3 实验结果及结论

在 Kaul 的算法中, 要计算顶点与面的形态和及边与边之间的形态和, 设  $A, B$  多面体的顶点数分别为  $numV_A$  和  $numV_B$ , 面数分别为  $numF_A$  和  $numF_B$ , 边数分别为  $numE_A$  和  $numE_B$ , 则执行形态运算的次数最少为  $1/2(numV_A * numF_B) + 1/2(numV_B * numF_A) + 1/4(numE_A * numE_B)$ , 并且计算每次形态和之前要先判断是否满足 LSD (limited space direction) 条件<sup>[4]</sup>. 由于对多面体的每一点、每一条边和每一个面要进行 LSD 判断, 因此, 这个过程非常费时.

本文的快速算法的形态计算次数最多为  $1/3(numF_A * numF_B)$ , 并且无须作费时的 LSD 条件判断, 两个凸多边形的形态和算法非常简单, 由于形态计算的次数比 Kaul 方法少许多, 因此在最后一步重复边的删除中可节省大量的时间.

图 5 为一系列的凸多面体形态和结果, 中间 5 个状态为  $c(t) = (1-t)A \oplus tB$ ,  $t$  为  $0 \sim 1$  之间的系数,  $t$  取  $1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$ , 则得到中间态的 5 个结果. 表 1 为本文的方法和 Kaul 方法进行图 5 的形态和计算的时间开销, 其中圆柱有 22 个面, 圆锥有 25 个面, 实验在 SGI 4D/35 上进行.



Fig. 5 A serial results of Minkowski addition for two conver polygons  
图 5 两个凸多面体的一系列形态和结果

Table 1  
表 1

$C(t) = (1-t)A \oplus tB$	$t=1/6$	$t=2/6$	$t=3/6$	$t=4/6$	$t=5/6$
Our method <sup>①</sup> (s)	3.2	3.1	3.2	3.0	3.1
Kaul method <sup>②</sup> (s)	25.1	25.7	25.5	24.8	25.3

①本文的方法, ②Kaul 方法.

图 6 为一个用快速算法进行椭球与球进行形态计算的结果, 其中椭球有 180 个面, 圆球有 100 个面, 实验条件同上, 生成的大椭球有 554 个面, Kaul 方法计算时间为 28 分 18 秒, 本文的方法计算时间为 2 分 42 秒.

凸多面体的形态和快速算法是一种高效的方法, 直观、简单, 可广泛应用于基于形态方法的造型系统、汉字字型合成和非刚体运动的非线性内插. 理论及实验证明, 本文的方法是有效的、可行的, 是一种高效实用的方法. 由实验结果统计, 本文的方法在时间上只有 Kaul 方法的 10%~15%.

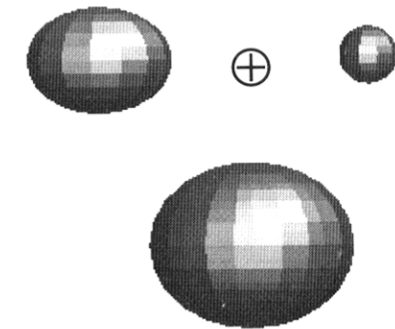


Fig. 6 The result of fast Minkowski addition algorithm for two conver polygons  
图 6 两个凸多面体的快速形态和结果

**References :**

- [1] Lozano-Perez, T., Wesley, M. A. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. *Communications of the ACM*, 1979, 22(2):560~570.
- [2] Schwartz, J. T. Finding the minimum distance between two convex polygons. *Information Processing Letter*, 1981, 13(2): 168~170.
- [3] Lozano-Perez, T. Spatial planning: a configuration space approach. *IEEE Transactions on Computer*, 1983, 32(2):132~141.
- [4] Kaul, A., Rossignac, J. Solid-Interpolating deformations: construction and animation of PIPs. *Computer and Graphics*, 1992, 16(1):107~115.
- [5] Ghosh, P. K. A solution of polygon containment, spatial planning, and other related problems using Minkowski operations. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1990, 49(1):1~35.
- [6] Ghosh, P. K. Unified computational framework for Minkowski operations. *Computer & Graphics*, 1993, 17(4):357~378.
- [7] Ghosh, P. K., Kumar, K. V. Support function representation of convex bodies, its application in geometric computing, and some related representations. *Computer Vision and Image Understanding*, 1998, 72(3):379~403.
- [8] Liu, Wen-yu, Wan, Fei, Zhu, Guang-xi. Curve and surface's morphology algorithm and its applications. *Chinese Journal of Computers*, 1999, 22(7):708~715 (in Chinese).
- [9] Liu, Wen - Yu, Wan, Fei, Zhu, Guang - xi. A novel method of Chinese font composition based on morphology. *Chinese Journal of Computers*, 1999, 22(3):235~240 (in Chinese).
- [10] Liu, Wen-yu, Wan, Fei, Zhu, Guang-xi. A new general optimization method of polygon metamorphosis and its applications. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 1999, 11(2):129~133 (in Chinese).

**附中文参考文献:**

- [8] 刘文予, 万菲, 朱光喜. 曲线曲面的形态算法及应用. *计算机学报*, 1999, 22(7):708~715.
- [9] 刘文予, 万菲, 朱光喜. 基于形态学的新的汉字字型生成方法. *计算机学报*, 1999, 22(3):235~240.
- [10] 刘文予, 万菲, 朱光喜. 一种全局优化的多边形变形方法及应用. *计算机辅助设计与图形学学报*, 1999, 11(2):129~133.

**A Fast Morphologic Addition Algorithm for Convex Polyhedron\***

LIU Wen-yu, LI Hua, ZHU Guang-xi

(*Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*);

(*Key Laboratory of Education Ministry for Image Processing and Intelligent Control, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

E-mail: liuwuy\_2002@mails]. hust. edu. cn

http://www.sicimage. hust. edu. cn

**Abstract:** On the base of analysis classic methods, the morphologic addition algorithm for convex polyhedron is predigested to the morphologic addition of faces in polyhedron. The concept of reference plane is introduced with the model of normal vector sphere for 3D objects, the convex polygons in 3D space are divided into two parts by the reference plane and morphologic addition of each corresponding part is calculated. Then the repetitionary faces and edges are deleted, a fast morphologic algorithm for convex polyhedron is presented. The experimental results show that this method is 6~10 times faster than classic methods and works well.

**Key words:** convex polyhedron; morphologic addition; fast algorithm; reference plane; normal vector sphere

\* Received January 13, 2000; accepted May 19, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 69973018; the Natural Science Foundation of Hubei Province of China under Grant No. 99J009