

曲率连续的有理二次样条插值的一种优化方法^{*}

张三元^{1,2}, 汪国昭³

¹(浙江大学 计算机科学与工程系, 浙江 杭州 310027);

²(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027);

³(浙江大学 应用数学系, 浙江 杭州 310027)

E-mail: syzhang@cs.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

摘要: 人们通常用有理三次曲线样条来构造整体曲率连续的曲线, 提出利用有理二次曲线样条插值整体曲率连续的曲线的一种方法. 首先导出两相邻二次曲线段间曲率连续的拼接条件, 然后提出了求解平面上一个闭的点列中每一点处的切线的最优算法. 最后给出了闭曲线插值的一些实例以检验方法的有效性.

关键词: 有理二次曲线; 曲率连续; 样条插值

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

平面曲线的造型是计算机辅助设计和图形学的基础. 平面曲线的理论和方法已经十分丰富并且相当完善. 其典型代表有参数形式的曲线, 如 Bézier 曲线和 B-样条曲线^[1,2]; 隐式曲线如代数曲线等^[3,4]. 无论在理论上还是在应用上, 我们都希望曲线的结构简单, 同时其表达的信息要足够丰富和完整. 圆弧是除直线以外的结构最简单的曲线, 因此, 圆弧样条被广泛地应用于平面曲线的插值^[5,6]之中. 但是, 圆弧样条曲线只能达到整体 G^1 连续, 而在 CAD 及图形系统中应用的曲线通常要求达到 G^2 连续. 三次(有理)多项式参数样条曲线确实能构造 G^2 连续的曲线, 并且被 CAD 及图形系统广泛采用, 但是, 要得到 G^2 连续的曲线是否一定要用到三次(有理)多项式样条呢? 利用二次曲线或有理二次曲线能否产生出 G^2 连续的曲线呢? 这些问题现在还没有得到解决. 而本文对这些问题给出了肯定的回答. 二次多项式参数曲线的确不能产生 G^2 连续样条曲线, 但是本文的结论表明, 利用有理二次 Bézier 样条曲线能够产生 G^2 连续的样条曲线. 这个结论首先从理论上解决了要产生 G^2 连续曲线的次数最优的有理曲线是有理二次曲线的问题. 其次, 在应用上, 与常用三次 Bézier 曲线或 B-样条曲线相比, 有理二次曲线在图形显示方面由于其结构简单, 计算量少, 因此显示更快; 在曲线性质方面, 由于有理二次曲线总是凸曲线, 因此曲线形状更易于控制; 在曲率分析方面, 有理二次曲线的曲率计算非常简单. 另外, 对有理二次曲线弧长的计算比较简单, 而弧长计算在一些应用领域是非常重要的, 例如, 对曲线的弧长进行均匀分割的场合. 本文讨论了利用有理二次曲线样条插值出整体 G^2 连续的光滑曲线的方法.

1 有理二次曲线的切向和曲率

一条平面二次曲线可以表示成如下形式:

* 收稿日期: 2000-01-10; 修改日期: 2000-04-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60073026, 19971079); 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030600)

作者简介: 张三元(1963-), 男, 安徽岳西人, 博士, 副教授, 主要研究领域为计算机辅助设计, 计算机图形学, 图像处理; 汪国昭(1944-), 男, 浙江杭州人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机图形学, 计算几何, 医学图像三维重建.

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{P}(t)}{\omega(t)} = \frac{B_0(t)\mathbf{P}_0 + \omega B_1(t)\mathbf{P}_1 + B_2(t)\mathbf{P}_2}{B_0(t) + \omega B_1(t) + B_2(t)}. \quad (1)$$

其中 $B_0(t) = (1-t)^2, B_1(t) = 2t(1-t), B_2(t) = t^2$, 是二次 Bernstein 基, ω 是一个大于 0 的常数. $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 是控制顶点向量. 于是,

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\omega(t)\mathbf{P}'(t) - \omega'(t)\mathbf{P}(t)}{\omega^2(t)}, \quad (2)$$

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{\omega^2(t)\mathbf{P}''(t) - \omega(t)\omega''(t)\mathbf{P}(t) - 2\omega(t)\omega'(t)\mathbf{P}'(t) + 2(\omega'(t))^2\mathbf{P}(t)}{\omega^3(t)}. \quad (3)$$

由式(1)~(3)可以得到端点向量:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{P}_0, \mathbf{r}(1) = \mathbf{P}_2, \mathbf{r}'(0) = 2\omega(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \mathbf{r}'(1) = 2\omega(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1), \quad (4)$$

$$\mathbf{r}''(0) = 4\omega(2\omega - 1)(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) + 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0), \mathbf{r}''(1) = 4\omega(2\omega - 1)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + 2(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2). \quad (5)$$

由式(4)和式(5)可以得到端点处的曲率如下:

$$k(0) = \frac{|(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)|}{2\omega^2 |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|^3}, \quad k(1) = \frac{|(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)|}{2\omega^2 |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^3}. \quad (6)$$

由式(6)可知,有理二次曲线的曲率除了可以通过改变控制顶点对其进行调整以外,还可以通过参数 ω 对其进行调整. 正是这个可调参数,使得我们可以在不改变端点切向的前提下调整端点处的曲率.

2 两段有理二次曲线的 G^2 连续拼接

给定平面的 5 个点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$, 可以产生两条有理二次曲线,一条由控制顶点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 决定,另一条由控制顶点 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ 决定. 为了使两段曲线在其公共点 \mathbf{P}_2 处达到 G^2 连续,首先它们在 \mathbf{P}_2 点的切向必须平行,即 $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) // (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$, 如图 1 所示.

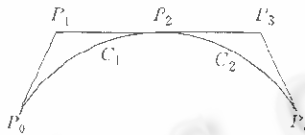


Fig. 1 Connection between two rational quadratic curves with G^2 continuity
图1 两段有理二次曲线的 G^2 连续拼接

要使两段曲线 C_1 和 C_2 在它们的公共点 \mathbf{P}_2 处达到 C^2 连续,则它们在该点必须有相同的曲率. 从式(6)可以得到:

$$\frac{|(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)|}{2\omega_1^2 |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^3} = \frac{|(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2)|}{2\omega_2^2 |\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2|^2}. \quad (7)$$

由式(7)可知,即使控制顶点已经事先给定,我们仍可以仅通过调整两条曲线段之间权参数的比值而使两段曲线在公共点处达到 G^2 连续. 即

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{|(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2)|}{|(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)|} \cdot \frac{|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^3}{|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2|^3}}. \quad (8)$$

3 用二次曲线段构造 G^2 连续样条插值曲线

给定平面上有序点列 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ 以及在 \mathbf{P}_1 的切线 T_1 , 构造一条通过这 n 个点的光滑样条曲线,并在 \mathbf{P}_1 点的切线方向为 T_1 . 由第 2 节可知,要确定一条 G^2 连续的有理二次曲线样条,必须

首先确定每一个插值点即 P_1, P_2, \dots, P_n 的切线. 由于这些切线不是惟一确定的, 因此求这些切线就有许多不同的方法. 文献[7]给出了一种求这些切线的弦平行切线求角方法, 本文采用与文献[7]的方法完全不同的一种优化的方法, 其优化的依据是, 使得除了第 1 段与最后一段以外中间每一段曲线在两端点的切线与两点连线的夹角尽量接近, 从而保证曲线不致过分扁平. 下面, 我们来讨论这种方法.

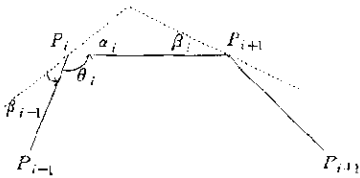


Fig. 2 The relations between interior angles and tangent angles at every interpolating points
图2 各插值点处的内角及切线角之间的关系

设第 i 段曲线的两端点的切线与两点连线的夹角分别为 α_i, β_i , 称 α_i 为弦切角. 线段 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 与 $\overline{P_iP_{i+1}}$ 的夹角为 θ_i , 如图 2 所示.

首先考虑开曲线的情形. 对于插值平面上 n 个点 P_1, P_2, \dots, P_n , 构造一条整体达到 G^2 连续的开样条曲线, 它以 P_1 为起点, P_n 为终点. 显然, 这条样条曲线可由 $n-1$ 段有理二次曲线组成, 为了有效地确定除两个端点以外的每一内点处的切线, 文献[8]构造如下函数:

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)^2 \tag{9}$$

现在, 我们希望 α_i, β_i 之差的绝对值尽可能小, 相当于求式(9)的极小值. 而在式(9)中, α_i, β_i 不是相互独立的, 由图 2 可知:

$$\alpha_i + \beta_{i-1} = \pi - \theta_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \tag{10}$$

当 P_1, P_2, \dots, P_n 确定后, θ_i 是常数, 因此, 式(9)中的自由变量只有 α_i . 记

$$\varphi_i = \pi - \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{11}$$

并将式(10)代入式(9)得到:

$$f = \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_i + \alpha_{i+1} - \varphi_{i+1})^2 + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})^2. \tag{12}$$

注意到, 式(11)中 φ_{i+1} 是常数, 要使 f 达到极小值, 只须求解如下方程:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \tag{13}$$

由此得到如下线性方程组:

$$\begin{cases} \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} = \varphi_i + \varphi_{i+1}, & i = 2, 3, \dots, n-1, \end{cases} \tag{14}$$

$$\alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1} = \varphi_{n-1} + \beta_{n-1}. \tag{15}$$

当 α_1 和 β_{n-1} 给定以后, 式(13)和式(14)是关于未知量 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ 的线性方程组, 其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

A 是一个正定矩阵, 因此式(13)和式(14)有惟一解. 可以从中解出 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$, 然后再由式(10)求出 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}$.

在当 α_1 和 β_{n-1} 未事先给定的情况下, 可以令 $\alpha_1 = \beta_1, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1}$, 由式(13)和式(14)可以得到惟

一解. 因此, 对开曲线来说, 这种优化切线是惟一的.

现在, 我们将这种方法推广到平面上一个闭的点列情形. 设给出的点列为 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$, 并且满足 $P_{n+1} = P_1$, 一般也希望用闭曲线插值这个点列, 并且要求曲线在 P_1 和 P_{n+1} 点至少有相同的切线. 这就需要构造 n 段曲线. 因此, 要确定给定点列每一点处的端切线. 这时, 式(9)和式(10)分别变成下面的式(16)和式(17):

$$f = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2, \quad (16)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i + \alpha_{i+1} - \varphi_{i+1})^2 + (\alpha_{n-1} + \alpha_n - \varphi_1)^2. \quad (17)$$

这时没有端点条件. 要使式(17)中的 f 达到极小值, 只要令它对所有的 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的偏导数为 0, 就可以得到如下方程组:

$$\begin{cases} 2\alpha_i + \alpha_2 + \alpha_n = \varphi_1 + \varphi_2, \\ \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} = \varphi_i + \varphi_{i+1}, \quad i=2, 3, \dots, n-1. \\ \alpha_{n-1} + 2\alpha_n + \alpha_1 = \varphi_n + \varphi_1, \end{cases} \quad (18)$$

该方程组的系数矩阵 A 可用下式表示:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

当 n 为奇数时, $|A|=4$, 方程组(18)有惟一解, 也就是说, 每一段有理二次曲线的两条端切线可以惟一地确定下来.

上述方法确实达到了一种最优, 对于取自圆周上的点, 利用上面的方法得到的样条曲线可以精确地恢复圆周. 下面, 我们以 3 点为例加以说明. 由于 3 点总是共圆, 在式(18)中, 令 $n=3$, 可以得到

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_2 + \varphi_3 \\ \varphi_3 + \varphi_1 \end{bmatrix}.$$

求解后得到

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2). \quad (20)$$

由式(10)可以得到

$$\beta_3 = \varphi_1 - \alpha_1 = \frac{1}{2}(2\varphi_1 - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) = \alpha_3. \quad (21)$$

同理可得

$$\beta_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \alpha_1. \quad (22)$$

式(21)和(22)表明, 有理曲线段的左右端切线两端点连线的夹角是相同的, 因此只要取权 $\omega_i = \cos \alpha_i (i=1, 2, 3)$, 则每一段二次曲线都是圆弧.

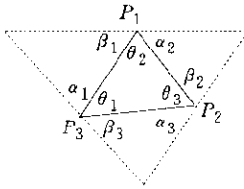


Fig. 3 A circle can be restored from 3 points closed curves interpolation
图3 过3点的闭曲线插值可以恢复圆

由式(11)可知, $\varphi_1 = \pi - \theta_1, \varphi_2 = \pi - \theta_2, \varphi_3 = \pi - \theta_3$, 且 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 是 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的 3 个内角, 因此, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, 联立式(22), 我们得到 $\alpha_1 = \theta_3, \alpha_2 = \theta_1, \alpha_3 = \theta_2$, 由图 3 可知, 它们是同一个圆, 即 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外接圆的 3 个不同弦 $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$ 的弦切角, 由于过 $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$ 的二次曲线段都是圆弧, 它们一定是 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外接圆的一部分, 因而整条样条曲线就构成一个圆。

当 n 为偶数时, $|A| = 0$, 这时线性方程组(18)没有惟一解, 可以通过增加一个点或减少一个点的方法使之变为奇数点情形, 用上面的方法可以得到惟一解. 当给定的插值点列不能增减, 必须是奇数个时, 易知 $r(A) = n - 1$, 并且线性方程组(18)是相容的. 取 $\alpha_1 = \alpha$ 作为自由变量, 从式(18)中可以惟一地解出 $\alpha_i (i = 2, 3, \dots, n)$ 关于 α 的函数, 并且它们都是关于 α 的线性函数. 也就是说, 这时满足上面提出的优化条件的闭样曲线有无穷多条, 可以再提出优化条件, 求出最优的一条. 令初始角作为优化变量, 再实施某种优化. 例如, 使整条样条曲线的长度最小, 即

$$L(\alpha) = \int \left| \frac{dr}{dt} \right| dt \rightarrow \min, \tag{23}$$

或者使闭曲线围成的闭区域面积最小, 即

$$S(\alpha) = \int (xy - yx) dt \rightarrow \min, \tag{24}$$

这是两种几何意义最明显的优化方法, 可以通过式(23)和式(24)分别求出不同优化意义下的初始角度. 但是, 式(23)和式(24)并不是 α 的线性函数, 求解比较困难. 下面, 我们提出一种仅仅关于切线角的优化方法.

如图 4 所示, 当插值点 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 给定后 (n 是偶数), $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 就被惟一确定下来. 从式(18)中可以惟一地解出弦切角 $\alpha_i (i = 2, 3, \dots, n)$ 关于 α 的函数, 然后构造如下优化函数:

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i(\alpha) - \varphi_i)^2. \tag{25}$$

求此函数的极小值, 就可以解出 α 来.

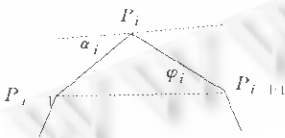


Fig. 4 Optimization for tangent angles
图4 切线角的角化

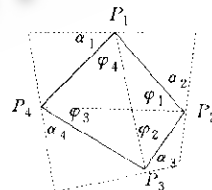


Fig. 5 A circle can be restored from 4 points closed curve interpolation
图5 通过圆周上4点的二次有理闭曲线样条的端切线

下面以 4 为例来说明这种情形. 设 P_1, P_2, P_3, P_4 是圆周上的 4 个点, 如图 5 所示. 这时, 式(18)变为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_2 + \varphi_3 \\ \varphi_3 + \varphi_4 \\ \varphi_4 + \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

式(26)有无穷多个解,它有一个自由变量,不妨设 α_1 为自由变量,可以得到如下解:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha, \\ \alpha_2 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + 3\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4) - \alpha, \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2) + \alpha, \\ \alpha_4 = \frac{1}{4}(3\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) - \alpha. \end{cases}$$

由于 P_1, P_2, P_3, P_4 这4点共圆,因此 $\theta_1 + \theta_2 = \pi, \theta_2 + \theta_3 = \pi$,又 $\varphi_i = \pi - \theta_i (i=1, 2, 3, 4)$,得到 $\varphi_1 + \varphi_3 = \pi, \varphi_2 + \varphi_4 = \pi$.从而由式(10)可以得到:

$$\beta_1 - \varphi_2 - \alpha_2 = \frac{1}{4}(\varphi_2 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_3) + \alpha = \alpha = \alpha_1,$$

同理可以得到:

$$\beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4.$$

这说明,每一条有理二次曲线段的两端点切向与两个端点连线的夹角是相同的,只要各段有理二次曲线的权函数选择适当,这些有理曲线就是圆弧段.从图6可知, $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - \alpha, \alpha_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \alpha, \alpha_4 = \varphi_4 - \varphi_2 + \alpha$,代入式(22)可得:

$$f(\alpha) = 4(\alpha - \varphi_1)^2 = \min.$$

解出 $\alpha = \varphi_1$,这时,只要这4段有理曲线是圆弧段,它们就一定落在过 P_1, P_2, P_3, P_4 的外接圆周上,如图5所示.以上讨论都是基于凸多边形的.

当给定的点列组成凹多边形时,由于有理二次曲线总是凸曲线,这时必须在多边形上增加分节点,如图6所示, $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ 是凹的四边形.这时,在边 $P_i P_{i+1}$ 上插入一点 P' ,不妨设 P' 为 $P_i P_{i+1}$ 的中点,这样,将四边形变成五边形,就可以利用上述方法统一进行了,如图7所示,即是对任意多边形进行插值的有理二次曲线.

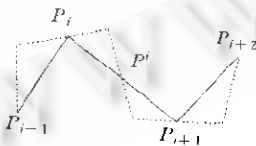


Fig. 6 Case for concave polygon
图6 凹多边形情形

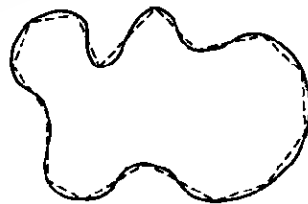


Fig. 7 Rational conic spline interpolating arbitrary polygon
图7 有理二次曲线插值任意多边形

4 结 论

曲线造型是计算机图形学的基础,一般都采用参数形式,如 Bézier 曲线和 B-样条曲线.本文采用最简单的有理二次参数曲线来进行插值,可以产生一条整体 G^2 连续的曲线,而二次 Bézier 样条曲线和 B-样条曲线一般只能生成一条达到整体 G^2 的曲线.对利用本文的方法产生曲线也可以像

参数曲线一样进行形状控制,而且容易计算曲线在每一点处的曲率.从上面的结论可知,本文中引入的有理二次曲线是构造 G^2 连续曲线的次数最优的曲线.

References:

- [1] Tiller, W. Rational B-splines for curves and surface representation. *IEEE Computer Graph Application*, 1983,3(1):61~69.
- [2] Imre, Juhasz. Cubic parametric curves of given tangent and curvature. *Computer Aided Design*, 1998,30(1):1~16.
- [3] Li, J., Hosckek, J., Hartman, E. G^{n-1} -functional splines for interpolation and approximation of curves, surface and solids. *CAGD*, 1990,7(2):209~220.
- [4] Hartman, E. Blending of implicit surfaces with functional splines. *Computer Aided Design*, 1990,22(4):500~506.
- [5] Fuhs, W., Stachel, M. Circular pipe connections. *Computer and Graph*, 1988,12(1):53~57.
- [6] Hosckek, J. Circular splines. *Computer Aided Design*, 1992,24(6):611~618.
- [7] Zhang, San-yuan. Modeling G^2 continuity curve based on algebraic curve segments. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(2):153~157 (in Chinese).
- [8] Jin, Tong-guang, Shen, Yan, Jiu, De-an. A spline of biarc. *Journal of Zhejiang University*, 1981,9(3):83~91 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [7] 张三元.基于代数曲线段的 G^2 连续的曲线造型方法. *计算机学报*,2000,23(2):153~157.
- [8] 金通光,沈炎,金德安.一种双圆弧样条. *浙江大学学报*,1981,9(3)83~91.

An Optimal Method for Interpolating Curvature Continuity Curves with Rational Quadratic Splines*

ZHANG San-yuan^{1,2}, WANG Guo-zhao³

¹(Department of Computer Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

²(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

³(Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: syzhang@cs.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

Abstract: As for curvature continuity curves, they are usually constructed by means of rational cubic curves. A method for interpolating global curvature continuity curves with conic segments is presented in this paper. Firstly, the curvature continuity conditions between two adjacent rational quadratic curve segments are derived. Secondly, an optimal algorithm is presented for solving out the tangent lines at every points of a closed point set in a plane. Finally, several examples are given out to illustrate the effectiveness of this method.

Key words: rational quadratic curve; curvature continuity; spline interpolation

* Received January 10, 2000; accepted April 4, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 60073026 and 19971079; the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No. G1998030600