

一种函数优化问题的混合遗传算法*

彭伟 卢锡城

(长沙工学院计算机科学系 长沙 410073)

E-mail: wpeng@csit.edu.cn

摘要 将传统的局部搜索算法和遗传算法相结合,可以较好地解决遗传算法在达到全局最优解前收敛慢的问题,文章给出一种结合可变多面体法和正交遗传算法的混合算法.实验表明,它通过对问题的解空间交替进行全局和局部搜索,能更有效地求解函数优化问题.

关键词 遗传算法,可变多面体法,正交交叉,函数优化.

中图法分类号 TP18

遗传算法(genetic algorithms)在问题的解域中通过模拟生物进化的途径来定向搜索最优解.在组合优化、机器学习、自适应控制、多目标决策等领域中有许多应用^[1].对于传统方法较难求解的一些 NP 问题,使用遗传算法往往能得到更好的结果.但对于传统方法已能较好解决的问题(如一般的非线性优化问题),它并不显示较强的优势.原因在于,遗传算法对问题特定的知识(如梯度、Hessian 阵、某些定理等)的利用较少.它主要采用群体搜索技术,通过对解的不断组合、随机改变以及对候选解的评估和选择来完成求解过程.在达到全局最优解前,它还存在着收敛慢的问题.在设计遗传算法时往往需要在其通用性与有效性之间加以折衷.设计针对问题的特定遗传算子,可以更有效地求解问题,但缺乏通用性.另一种途径是,将遗传算法与问题领域中一些传统的寻优方法(如爬山法、模拟退火法、牛顿法等)结合起来,可在保持算法一定通用性的基础上提高算法的效率.这类混合算法的基本框架如图 1 所示.

本文考虑一类非线性函数优化问题,即

$$\min f(x), \quad x \in D.$$

其中 $f(\cdot)$ 是 n 元连续函数, D 是 R^n 的有界子集.文献[2]探讨了一种将拟牛顿法与传统 GA 结合起来用于求解上述问题的途径.由于拟牛顿法需求函数的一阶导数,因而该方法的通用性受到一定的限制.本文探讨将可变多面体法(flexible polyhedron)与 GA 相结合的算法,它只利用函数值进行搜索,因而适用范围更广.可变多面体法即 Nelder-Mead 单纯形法,对于一般的优化问题,能较快地逼近最优解,具有较强的局部搜索能力.但它对初始解的构成具有较强的依赖性,算法执行过程中难于发现新的可能存在最优解的区域.通过将它与 GA 相结合,一方面可以利用其局部搜索能力,另一方面通过 GA 可不断“发现”新的更有希望的搜索区域,并动态调整可变多面体法的搜索方向,从而使算法具有更好的灵活性,也使算法更易于并行化.实验表明,对于求解上述非线性优化问题,混合法(hybrid genetic algorithm,简称 H-GA)具有的性能比传统 GA 和可变多面体法都要好.

本文第 1 节给出 H-GA 的算法描述.第 2 节给出实验结果和几种算法之间的性能比较.最后是总结.

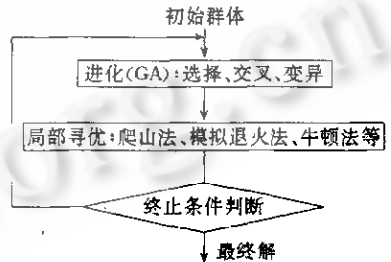


图1 混合遗传算法的基本框架

* 作者彭伟,1973年生,博士生,主要研究领域为智能计算,先进网络技术.卢锡城,1946年生,教授,博士生导师,主要研究领域为并行与分布处理,先进网络技术.

本文通讯联系人:彭伟,长沙 410073,长沙工学院计算机科学系

本文 1997-12-08 收到原稿,1998-09-10 收到修改稿

1 H-GA 算法

1.1 编码方式

编码的实质是在问题的解空间与算法的搜索空间之间建立一个映射. 传统 GA 一般采用一种将实数空间离散化的二进制编码方式^[1]. 这种方式存在着编码长度影响求解精度、操作费时、不直观等缺点, 因而提出了实数的直接编码方式并表明可以获得更好的性能^[3,4]. 在实数编码方式下, 每个个体用一个 n 维的实向量来表示, 这种方式具有直观、易操作的优点, 且可以针对它来设计非传统的交叉算子. 本文即采用此编码方式.

1.2 交叉和选择操作

交叉操作涉及父本的选择配对机制和交叉算子. 配对通常采用随机配对方式. 为了维持群体的多样性, 还可选地配对. 配对方式能影响较优模式在群体中的扩散速度. 为了防止算法的不成熟收敛 (premature convergence), 通常不希望较优模式在群体中过快地扩散. 为此, 我们采用一种近邻配对原则^[5], 即对群体中的第 i 个个体, 若上一次迭代与之配对的是第 $(i-1) \pmod{N}$ 个个体, 则本次迭代用第 $(i+1) \pmod{N}$ 个个体与之配对. N 为群体的大小. 这种配对方法不仅可避免较优模式过快地扩散, 而且符合遗传算法细粒度并行模型的要求. 易于获得较大的并行度.

正交遗传算法 (orthogonal genetic algorithm) 在非线性优化问题及其他组合优化问题中已显示出其有效性^[6,4]. 我们的算法采用了正交交叉算子. 由两个父本交叉操作产生一组个体, 从新个体和两个父本中选择最优的进入下一代群体 (Elitist 策略). 由于采用局部选择而不是全局选择, 既在一定程度上保持了群体的多样性, 又消除了算法在并行实现时的通信瓶颈.

设两个父本分别为 P 和 Q , 用于实数编码的正交交叉操作^[5]主要包括:

(1) 混合交叉 (blend crossover):

$$X_1[i] = P[i]; \quad X_2[i] = Q[i]; \quad X_3[i] = r * P[i] + (1-r) * Q[i], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

r 为一个参数, $0 < r < 1$. 这里, 取 $r = 0.5$;

(2) 用 X_1, X_2 和 X_3 按正交表 $L_9(3^4)$ 产生 9 个新个体, 并分别计算它们的适应度值;

(3) 按照正交试验方法计算最佳水平组合并产生对应的第 10 个个体, 计算其适应度值;

(4) 从 X_1, X_2, X_3 和新产生的个体中选择最好的两个个体取代 P 和 Q .

1.3 变异操作

在实数编码方式下, 变异操作对个体 X 的每个分量 $X[i]$ 作用一个随机偏差量, 即

$$X'[i] = X[i] + \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

在进化规划 (evolutionary programming) 和进化策略 (evolutionary strategy)^[7] 中, 广泛采用了高斯变异算子, 用正态 (高斯) 分布的随机变量来作为变异操作中的偏差量, 即 $\delta = \sigma * N(0, 1)$, $N(0, 1)$ 为标准正态随机变量. 算法中令 σ 随代数的增加而逐渐减少, 如可令 $\sigma = MUT_C / generation$, 其中 MUT_C 为一常数, $generation$ 为迭代的代数. 文献[8]亦采用了类似的将 GA 的混合交叉算子与高斯变异算子相结合的途径. 由于在正交交叉算子中已包含了混合交叉操作, 因而正交遗传算法优于该算法.

1.4 局部搜索

可变多面体法用 $(n+1)$ 个 n 维欧氏空间中的顶点来构造搜索过程中的多面体, 我们选取 $(n+1)$ 个相邻的个体作为初始顶点 ($n < N-1$). 可变多面体法包含下列几种操作^[9]:

(1) 找出 $(n+1)$ 个顶点中函数值最大及最小的点 X_k 和 X_l , 然后找出去掉 X_k 后的由 n 个顶点构成的多边形的形心 X_c ;

(2) 通过反射操作得到反射点 X_r : $X_r[k] = X_c[k] + a * (X_c[k] - X_k[k])$, 其中 $X[k]$ 为 X 的第 k 个分量, a 为反射系数;

(3) 若 $f(X_r) < f(X_l)$, 则执行扩大操作, 得到 X_e : $X_e[k] = X_c[k] + r * (X_r[k] - X_c[k])$, 其中 $r > 1$ 为扩大系数;

- (4) 若对多边形中除去 X_k 外的任一顶点 X_i , 均有 $f(X_i) > f(X_k)$, 则执行收缩操作, 得到 X_i : $X_i[k] = X_i[k] + b * (X_k[k] - X_i[k])$, 其中 $0 < b < 1$ 为收缩系数;
- (5) 若 $f(X_i) > f(X_k)$, 则使所有点向最小点靠近, 即令 $X_i[k] = X_i[k] + 0.5 * (X_k[k] - X_i[k])$, 其中 $X_i[k]$ 为第 i 个顶点的第 k 个分量;
- (6) 令 X_r, X_s 和 X_k 中最好的点代替 X_k .

1.5 终止准则

算法运行停止的条件包括以下的一种或它们的结合形式.

- (1) 算法收敛到一个不动点或连续几次迭代所获得的改变量小于要求的精度值;
 - (2) 达到算法规定的最大迭代次数, 或最大执行时间, 或函数的最大调用次数(对解空间的最大采样次数).
- 我们用最大采样次数和最大迭代次数来控制算法的终止.

1.6 算法描述

H-GA 算法的主要步骤如下:

- (1) (初始化) 随机产生一个分布均匀的初始群体(包含 N 个初始解);
- (2) (交配) 按两两配对的原则将群体中的个体配对, 并执行第 1.2 节中的正交交叉操作;
- (3) (变异) 群体中每个个体以 P_m 的概率进行变异;
- (4) (局部搜索) 采用可变多面体法反复进行局部寻优操作, 循环次数由参数 L_b 控制;
- (5) (终止) 若终止条件满足, 则算法中止, 否则转步骤(2).

2 实验结果

2.1 性能比较参数

衡量一个算法的性能参数包括:

- (1) 最终解的优劣度或精确度. 最终解的优劣度通过误差值来度量, 误差值定义为^[2]

$$Error = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - X_i^*}{w_i} \right)^2}$$

其中 X_i 为算法最终解的第 i 个分量; X_i^* 为实际的全局最优解的第 i 个分量; w_i 为第 i 个分量的权值, 它反映了第 i 个分量的取值范围大小.

- (2) 获得最优解的概率. 可以用算法多次运行中成功得到的最优解的次数来作为其估计值. 当群体中最好的解达到一定精度时, 即认为算法得到最优解.

- (3) 计算时间. 在保证解的一定精确度的条件下, 计算时间越少, 采样点越少, 算法的性能就越好. 我们采用函数被调用的次数(采样次数)和实际的运行时间来评价.

2.2 性能比较

我们用实验的方法来比较正交遗传算法(orthogonal genetic algorithm, 简称 OGA)和 H-GA 算法的性能. OGA 算法采用与 H-GA 算法相同的交叉和变异操作. 在实验中, 我们选择了两个不同性质的函数.

- (1) $f(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 4n \prod_{i=1}^n \cos(X_i)$, $-5 \leq X_i \leq 5, i = 1, 2, \dots, n$. 这个函数在全局最小值周围有大量的局部极小值. 全局最小值点为 $(0, 0, \dots, 0)$, 相应最小值为 $-4n$.

- (2) 一般 Rosenbrock 函数:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (100 * (X_{i+1} - X_i^2)^2 + (1 - X_i)^2), \quad -5 \leq X_i \leq 5, i = 1, 2, \dots, n.$$

函数的全局最小值点为 $(1, 1, \dots, 1)$, 相应最小值为 0. 文献[10]采用传统 GA 求解了 $n=2$ 时的问题. 在 Rosenbrock 函数曲面山谷中的点的最速下降方向几乎与到函数最小值的最佳方向垂直, 因而传统算法(如最速下降法)较难求解此问题. 实验中我们发现, 在高维情况下, 传统 GA 难以高效地求解该问题. 可变多面体法在大部分试验中均未求得满意的解.

对于函数(1),我们在 $n=50$ 和 $n=100$ 的情况下将各个算法分别运行 50 次,每次运行均记录算法在不同采样次数时的状态.群体大小分别设为 100 和 150.在 H-GA 算法中,为简单起见,设每次迭代中可变量面体法的循环次数 L_n 为群体大小.应用中可根据函数特性等来调整循环次数以取得更优的性能.每次运行中,两种算法均能较快地逼近最优解.表 1 为它们在不同采样次数时群体中最优解的平均误差和平均执行时间.由于取值范围相同,因而误差值计算中各分量的权值相同($w_i=1$).实验结果是在一台 586PC 上得到的.

实验表明,对多峰性质的函数(1),在相同采样次数下,H-GA 算法能更快地逼近最优解,但所需计算时间稍多.H-GA 算法的性能略优于 OGA 算法.

表 1 两种算法求解函数(1)的性能比较

函数计算(采样)次数 (* 10 ⁵ 次)	最终解的平均误差		平均执行时间(s)	
	OGA	H-GA	OGA	H-GA
1($n=50$)	0.028 166	0.001 727	14.263 402	18.444 399
2($n=50$)	0.002 344	0.001 290	28.357 402	35.957 402
2($n=100$)	0.120 188	0.004 120	56.658 203	94.781 807
4($n=100$)	0.010 833	0.002 789	112.587 607	168.967 187

对于函数(2), n 分别取 10 和 30.将这两种情况下的群体大小分别设为 30 和 90.实验表明,在规定的采样次数内,OGA 算法几乎不能收敛到最优解(见表 2).在 50 次运行中,H-GA 算法的最终解与最优解的函数值之差小于 10^{-3} 的次数分别达到 43 和 44 次.

表 2 两种算法求解函数(2)的性能比较

采样次数 (* 10 ⁵ 次)	最终解的平均误差		平均执行时间(s)		最好情况的函数值		最坏情况的函数值	
	OGA	H-GA	OGA	H-GA	OGA	H-GA	OGA	H-GA
1($n=10$)	2.293 56	0.287 49	1.259 40	1.629 80	0.250 71	0.000 00	9.329 17	3.987 23
2($n=10$)	1.974 56	0.283 22	2.522 20	3.202 20	0.158 37	0.000 00	8.550 58	3.987 20
3($n=30$)	5.125 95	3.738 00	9.847 20	16.494 6	19.359 1	9.698 12	28.165 7	17.293 5
6($n=30$)	5.056 49	2.464 92	19.686 6	33.307 4	18.788 4	0.941 09	27.686 7	8.950 50
10($n=30$)	4.986 16	0.287 38	32.805 2	54.444 2	18.139 9	0.000 01	27.102 1	3.988 85

由表中的结果可得,对函数性质较为复杂的函数(2),在相同的采样次数下,OGA 算法除了计算时间优于 H-GA 算法外,几乎难于求得最优解.H-GA 算法能更有效地求解该类函数的优化问题.

3 总结

本文给出了一种求解非线性全局最优化问题的混合遗传算法,它将传统寻优方法——可变量面体法与正交叉算子结合起来,既可利用遗传算法的全局搜索能力,又能通过局部搜索加快算法的收敛.由于采用近邻配对原则和局部选择机制,此算法具有良好的并行性.我们还成功地将进化策略中的高斯变异算子结合到算法中.实验表明,本文提出的混合遗传算法能有效地处理一些传统遗传算法和寻优方法较难处理的函数优化问题.

对于不同性质的问题,在算法执行的不同时机,混合遗传算法中各部分操作所起的作用是不同的.恰当地控制各部分操作的执行时机是我们需要进一步研究的工作.

致谢 本文的研究工作参考了荔建琦博士很多较好的建议,在此特表谢意.

参考文献

- 1 Goldberg D E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989
- 2 Renders J-M, Flasse S P. Hybrid methods using genetic algorithms for global optimization. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part B), 1996,26(2):243~258
- 3 Wright A H. Genetic algorithm for real parameter optimization. In: Rawlins G ed. Foundations of Genetic Algorithms.

- San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1991. 205~218
- 4 Eshelman L J, Schaffer J D. Real-coded genetic algorithms and interval-schemata. In: Whitley L D ed. *Foundations of Genetic Algorithms 2*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993
 - 5 张青富, 彭伟, 吴少岩等. 遗传算法+正交设计: 一种新的全局优化算法. 见: 李乃奎, 石纯一, 王树林等编. 第 4 届中国人工智能联合学术会议论文集. 北京: 清华大学出版社, 1996. 127~133
(Zhang Qing-fu, Peng Wei, Wu Shao-yan *et al.* Genetic algorithm+orthogonal design method; a new global optimization algorithm. In: Li Nai-kui, Shi Chun-yi, Wang Shu-lin *et al* eds. *Proceedings of the 4th Chinese Joint Conference on Artificial Intelligence*. Beijing: Qinghua University Press, 1996. 127~133)
 - 6 Wu Shao-yan, Zhang Qing-fu, Chen Huc-wang. A new evolutionary model based on family eugenics; the first results. In: *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'96)*. Nagoya, Japan, 1996. 350~355
 - 7 Fogel D B. An introduction to simulated evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1994, 5 (1):3~14
 - 8 Yang J M, Kao C Y. A combined evolutionary algorithm for real parameters optimization. In: *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'96)*. Nagoya, Japan, 1996. 732~737
 - 9 王永县. 运筹学——规划论及网络. 北京: 清华大学出版社, 1993
(Wang Yong-xian. *Operational Research——Programming and Networking*. Beijing: Qinghua University Press, 1993)
 - 10 梁艳春, 周春光, 李寿范. 基于遗传算法的 Rosenbrock 函数优化问题的研究. *软件学报*, 1997, 8(9):701~708
(Liang Yan-chun, Zhou Chun-guang, Li Shou-fan. Genetic algorithm-based research on optimization of Rosenbrock function. *Journal of Software*, 1997, 8(9):701~708)

A Hybrid Genetic Algorithm for Function Optimization

PENG Wei LU Xi-cheng

(Department of Computer Science Changsha Institute of Technology Changsha 410073)

Abstract To solve the problem of slow convergence before the genetic algorithms (GAs) reach the global optima, it is an effective way to combine the conventional local search algorithms with GAs. A new hybrid algorithm that incorporates the flexible polyhedron method into the orthogonal genetic algorithm (OGA) is presented in this paper. The experiments show that it can achieve better performance by performing global search and local search alternately. The new algorithm can be applied to solve the function optimization problems efficiently.

Key words Genetic algorithm, flexible polyhedron method, orthogonal crossover, function optimization.