论非对称选择网的活性*

甄 强 陆维明

（中国科学院数学研究所计算机科学室 北京 100080）

摘要 本文给出了非对称选择网AC网(asymmetric choice nets)活性单调性的充分必要条件，并在此基础上证明了一类AC网系统活性的单调性和此类网结构活的充要条件.

关键词 非对称选择网(AC网)，强化AC网，活性，活性单调性，结构活.

中图法分类号 TP301

位置/变迁(P/T)网[1]是一个常用的Petri网类，可方便地用来对具有并发、异步、冲突等特性的系统进行建模和分析.在进行系统性质分析时，由于基于P/T网系统可达图的分析技术与方法复杂度高，不易使用，人们转向研究其他分析方法，其中基于网结构的分析技术与方法得到了广泛重视，也有不少成果.

活性是P/T网的一个重要行为性质，它反映了被描述系统的整体或局部无死锁性.对一般P/T网系统，活性判断要在可达图上进行非常困难.于是人们关心某些有用的P/T网子类的活性，希望能在合适的限制下，找到较理想的算法.目前，对于状态机、标识图[2]和(扩充)自由选择网[3~6]的活性研究比较成熟，而对非对称选择网，至今仍然缺乏办法.我们已经知道，一般的非对称选择网活性是不满足单调性的.[7,8]本文针对那些活性满足单调性的非对称选择网，得到了一个充分必要条件，并给出了活性具有单调性的一类AC网(asymmetric choice nets)系统和此类网结构活的充要条件，把AC网活性研究推进了一步.

本文第1节给出一些基本概念、符号和性质；第2节给出AC网活性单调性定理及其相关引理；第3节给出了活性具有单调性的一类AC网系统及其此类网结构活的充要条件；第4节是小结.

1 基本定义和符号

定义1.1. 三元组$N=(P,T;F)$是一个Petri网当且仅当：

(1)$P\cap T=\varnothing$(二元性) $P\cup T\neq\varnothing$(网非空)；

(2)$F\subseteq(P\times T)\cup(T\times P)$(流关系仅在$P$与$T$的元素间)；

(3)$dom(F)\cup cod(F)=P\cup T$(没有孤立元素).

在Petri网中，F的元素叫弧，图表示为有向弧；$P\cup T$是Petri网元素的集合；其中P是库所集，图表示为圆圈，T是变迁集，图表示为矩形.一个Petri网系统是一个二元组(N,M_0)，这里N是Petri网，$M_0:P\to\mathcal{N}$($\mathcal{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$)是初始标识.

定义1.2. 设$N=(P,T;F)$是一个Petri网，$x\in P\cup T$，我们称：

${}^{\cdot}x=\{y|(y,x)\in F\}$为$x$的前置集； $x^{\cdot}=\{y|(x,y)\in F\}$为$x$的后置集.

定义1.3. 设$N=(P,T;F)$为Petri网，$\Sigma=(N,M_0)$为Petri网系统，$P'\subseteq P$.

$N'=(P',T';F')$为由P'生成的子网当且仅当$T'={}^{\cdot}P'\cup P'^{\cdot}$，$F'=F\cap(P'\times T'\cup T'\times P')$.

$\Sigma'=(N',M'_0)$为由P'生成的子系统(其中M'_0为P'在M_0下的标识).

定义1.4. Petri网$N=(P,T;F)$是纯网当且仅当$\forall x\in P\cup T$：${}^{\cdot}x\cap x^{\cdot}=\varnothing$.

我们假设本文所研究的网都是非空纯网.

定义1.5. 设$N=(P,T;F)$是一个Petri网，M为其一标识.设$P_1\subseteq P$，在M下，P_1的总标识数记为$M(P_1)$，即$M(P_1)=\Sigma_{p\in P_1}M(p)$(其中$M(p)$为位置$p$中的标识数).

* 本文研究得到国家自然科学基金和中国科学院管理、决策与信息开放实验室基金资助.作者甄强，1968年生，博士生，主要研究领域为Petri网应用与理论.陆维明，1941年生，研究员，博士导师，主要研究领域为Petri网，软件工程，算法分析.

本文通讯联系人：甄强，北京100080，中国科学院数学研究所计算机科学室

本文1997-03-14收到原稿，1997-05-21收到修改稿

定义 1.6. 设 $N=(P,T;F)$ 为 Petri 网.

若 $\forall t\in T:|{}^{\bullet}t|=1$，我们称 N 为 1-输入的 Petri 网.

把 N 看为有向图，若 $\forall p_1,p_2\in P$，存在由 p_1 到 p_2 的有向路径，我们称 N 为 P-连通的 Petri 网.

定义 1.7. 设 $\Sigma=(N,M_0)$ 是一个 Petri 网系统.

变迁 $t\in T$ 在标识 M 下使能当且仅当 $\forall p\in{}^{\bullet}t:M(p)\geqslant 1$. 记为 $M[t>$. 执行 t 后，后继标识为 M'，M' 由以下方程给出：

$$M'(p)=\begin{cases}M(p)+1 & \text{if } p\in t^{\bullet}\\ M(p)-1 & \text{if } p\in{}^{\bullet}t\\ M(p) & \text{otherwise}\end{cases}$$

记为 $M[t>M'$. 若有 $M_1[t_1>M_2[t_2>\ldots M_r[t_r>M_{r+1}$，可简记为 $M_1[\sigma>M_{r+1}$，其中 $\sigma=t_1t_2\ldots t_r$，并称 σ 为执行序列.

记 $R(M)$ 为 Petri 网 N 的标识 M 的可达标识集：$M\in R(M)$，$\forall \sigma,M[\sigma>M'$，有 $M'\in R(M)$. 对 $t_1,t_2\in T$，若 ${}^{\bullet}t_1\cap{}^{\bullet}t_2=\varnothing$，称它们使能原因无关.

定义 1.8. 设 $N=(P,T;F)$ 是一个 Petri 网，并有 $D,S\subseteq P,D\neq\varnothing,S\neq\varnothing$. D 称为一个死锁当且仅当 ${}^{\bullet}D\subseteq D^{\bullet}$. 死锁 D 是极小的当且仅当 D 的真子集都不是非空死锁. S 称为一个陷阱当且仅当 $S^{\bullet}\subseteq{}^{\bullet}S$.

性质 1.1.[9] $N=(P,T;F)$ 是一个 Petri 网，M 为其一个标识，D 为其一个死锁，S 为其一个陷阱，则有

D 不被 M 标识 $\Rightarrow\forall M'\in R(M)$，$D$ 不被 M' 标识；S 被 M 标识 $\Rightarrow\forall M'\in R(M)$，$S$ 被 M' 标识.

定义 1.9. 设 $N=(P,T;F)$ 是一个 Petri 网，$\Sigma_0=(N,M_0)$ 是一个 Petri 网系统.

变迁 $t\in T$ 是活的当且仅当 $\forall M\in R(M_0)$，存在 $M'\in R(M)$，使得 $M'[t>$.

Σ_0 是活的当且仅当 $\forall t\in T$ 都是活的；

Petri 网 N 是结构活的当且仅当存在标识 M 使得 $\Sigma=(N,M)$ 是活的.

定义 1.10. 一个 Petri 网 N 是非对称选择网(AC 网)当且仅当 $\forall(p,q)\in P\times P,p^{\bullet}\cap q^{\bullet}\neq\varnothing\Rightarrow p^{\bullet}\subseteq q^{\bullet}$ 或 $q^{\bullet}\subseteq p^{\bullet}$.

定义 1.11. 令 $N=(P,T;F)$ 是 AC 网，称它是强化的 AC 网当且仅当：若 $\exists(p,q)\in P\times P,p^{\bullet}\cap q^{\bullet}\neq\varnothing$ 且 $p^{\bullet}\subset q^{\bullet}$，则必有 ${}^{\bullet}p={}^{\bullet}q$.

说明：此处 $\exists(p,q)\in P\times P,p^{\bullet}\cap q^{\bullet}\neq\varnothing$ 且 $p^{\bullet}\subset q^{\bullet}$ 等价于 $\exists t\in T,{}^{\bullet}t=\{p_1,\ldots,p_m\},p_1^{\bullet}\subseteq p_2^{\bullet}\subseteq\ldots\subseteq p_{k-1}^{\bullet}\subset p_k^{\bullet}=\ldots=p_m^{\bullet}$.

推论 1.1. 令 $\Sigma_0=(P,T;F,M_0)$ 是强化的 AC 网系统，满足：若 $\exists t\in T,{}^{\bullet}t=\{p_1,\ldots,p_m\},p_1^{\bullet}\subseteq p_2^{\bullet}\subseteq\ldots\subseteq p_{k-1}^{\bullet}\subset p_k^{\bullet}=\ldots=p_m^{\bullet}=\{t_1,\ldots,t_f\}$，则对于 $p\in P$，且 $p^{\bullet}\subset p_k^{\bullet}$ 有 $M_0(p)\geqslant\min(M_0(p_k),\ldots,M_0(p_m))$.

那么下面结论成立：$t_1,\ldots,t_f$ 在 $\forall M\in R(M_0)$ 下必同时使能或同时不使能.

下面给出几个例子对强化 AC 网进行说明.

(a) AC网　　(b) 强化AC网

图1

图2　扩充自由选择网

图 1(a) 是非对称选择网，其中虽然有 $p_3^{\bullet}\subset p_1^{\bullet}=p_2^{\bullet}$，但 p_1,p_2,p_3 的前置集不相同，所以，强化 AC 网排除了这种情况. 在图 1(b) 中，由于 $p_3^{\bullet}\subset p_1^{\bullet}=p_2^{\bullet}$，$p_1,p_2,p_3$ 有相同的前置集，即 ${}^{\bullet}p_1={}^{\bullet}p_2={}^{\bullet}p_3$，所以，此类网被包含在强化 AC 网中. 图 2 为扩充自由选择网. 容易看出 AC 网包含了(扩充)自由选择网，而强化 AC 网是 AC 网的重要子类，也包含了(扩充)自由选择网，它们都是较一般的网类，具有较广的应用范围与实用领域.

2 AC 网活性单调性定理

为了证明 AC 网活性单调性定理，首先给出一个引理.

引理 2.1. 设 $N=(P,T;F)$ 是一个 AC 网. 若 $H\subseteq P$ 是 N 的一个极小死锁，则 H 是 P-连通的.

证明：我们在 H 上定义关系 r：$\forall p_1,p_2\in H$：$p_1\ r\ p_2\Leftrightarrow$ 存在从 p_1 到 p_2 和 p_2 到 p_1 的有向路径. 显然，r 是 H 上的一个等价关系.

设 $H/r=\{[p_1]_r,[p_2]_r,\ldots,[p_k]_r\}$ ($[p_i]_r=\{p_j \mid p_j\in H\wedge p_i r p_j\}$). 其中 $[p_i]_r(i=1,\ldots,k)$ 为 p_i 关于 r 的等价类. 要证明命题，一定要证明 $k=1$，这里用反证法.

假设 $k\geqslant 2$，以如下方法定义有向图 G：G 的顶点集为 H/r，G 的弧集为 $\{([p_i]_r,[p_j]_r)\mid$ 存在从 p_i 到 p_j 的有向路径且 $[p_i]_r\neq[p_j]_r\}$.

由假设 $k\geqslant 2$ 和 r 与 G 的构造，我们知道，G 至少有一个顶点没有输入弧. 不失一般性，设 $[p_1]_r$ 是这样的顶点.

现证明 $[p_1]_r$ 是 N 上的一个非空死锁.

由 r 的定义知，$[p_1]_r$ 非空. 若 ${}^{\bullet}[p_1]_r=\varnothing$，则由 ${}^{\bullet}[p_1]_r=\varnothing\subseteq[p_1]_r^{\bullet}$ 推出 $[p_1]_r$ 是 N 的一个非空死锁，否则任取 $\forall t\in{}^{\bullet}[p_1]_r$，$\exists\ p\in[p_1]_r$，使得 $t\in{}^{\bullet}p$，由于 $|{}^{\bullet}t\cap H|\neq\varnothing$，必 $\exists\ p'\in H$，使得 $p'\in{}^{\bullet}t$（即 $t\in p'^{\bullet}$）. 由于 $[p_1]_r$ 在 G 中无输入弧，可推定 $p'\in[p_1]_r$，因此，$t\in[p_1]_r^{\bullet}$. 由 t 的任意性，有 ${}^{\bullet}[p_1]_r\subseteq[p_1]_r^{\bullet}$，从而推定 $[p_1]_r$ 也是 N 的一个非空死锁，与 H 是 N 的极小非空死锁矛盾. 即假设与前提矛盾，必有 $k=1$，即得命题：H 是 P-连通的. □

下面证明极小非空死锁是可由网的结构性质刻画的.

定理 2.1. 设 $N=(P,T;F)$ 是一个 AC 网，$H\subseteq P$ 是 N 的一个死锁. H 是极小死锁当且仅当下面两个条件成立：

(1) $\forall\ t\in H^{\bullet}$，有 $|{}^{\bullet}t\cap H|=1$.

(2) H 是 P-连通的.

证明：先证充分性：

假设 $H'\subseteq H$ 是 N 的非空死锁. 任取 $p\in H$，$p'\in H'$，由于 H 是 P-连通的，故存在从 p 到 p' 的有向路径，又由于条件(1)，再加上死锁的定义，必有 $p\in H'$. 由 p 的任意性，有 $H\subseteq H'$，从而有 $H=H'$，所以，H 是极小死锁.

再证必要性：

先证条件(1)成立. 由于 H 是 N 的一个死锁，所以 $\forall\ t\in H^{\bullet}$，$|{}^{\bullet}t\cap H|>0$.

若 $\exists\ t'\in H^{\bullet}$，有 $|{}^{\bullet}t'\cap H|\geqslant 2$，由于 N 是 AC 网，如果 ${}^{\bullet}t'=\{p_1,\ldots,p_m\}$，不妨设 $p_1^{\bullet}\subseteq p_2^{\bullet}\subseteq\ldots\subseteq p_m^{\bullet}$，进而设 $p_1,\ldots,p_k\in{}^{\bullet}t'$ 且 $p_1,\ldots,p_k\in H$，$p_{k+1},\ldots,p_m\notin H(k\geqslant 2)$.

现在证明：$H_1=H-\{p_1\}$ 作为 H 的一个非空真子集也是 N 的一个死锁. $\forall\ t\in{}^{\bullet}H_1$，有 $t\in{}^{\bullet}H$，故 $t\in H^{\bullet}$.

(a) 若 $t\in p_k^{\bullet}$，则必有 $t\in H_1^{\bullet}$.

(b) 若 $t\notin p_k^{\bullet}$，则由于 N 是 AC 网，$({}^{\bullet}t\cap{}^{\bullet}t')\cap H=\varnothing$，有 ${}^{\bullet}t\cap H\subseteq H-{}^{\bullet}t'\subseteq H-\{p_1\}=H_1$ 即 $t\in H_1^{\bullet}$.

综合(a)，(b)，又由于 t 的任意性，知 ${}^{\bullet}H_1\subseteq H_1^{\bullet}$，这与 H 是极小死锁矛盾. 故条件(1)成立.

由引理 2.1 可直接得到条件(2)成立. □

引理 2.2.[9] AC 网 N，如果 N 中每个(极小)死锁中包含一个标识的陷阱，则 AC 网是活的.

下面证明 AC 网活性单调性定理，即 AC 网活性单调性的充要条件.

定理 2.2. 任给一 AC 网 $N=(P,T;F)$. 若 $\Sigma_0=(N,M_0)$ 是活的，则 $\forall\ M_i,M_i\geqslant M_0$，$\Sigma_i=(N,M_i)$ 也是活的（即活性满足单调性）$\Leftrightarrow$ AC 网 Σ_0 中每个(极小)死锁中一定含有一个有标识的陷阱.

证明：先证充分性：

由 (N,M_0) 中每个极小死锁中含有一个有标识的陷阱，则 $\forall\ M_i,M_i\geqslant M_0$，$(N,M_i)$ 中每个极小死锁中也一定含有一个有标识的陷阱，按引理 2.2 推出 AC 网 (N,M_i) 是活的.

再证必要性：

我们只要证明有一个极小非空死锁 H 中的所有陷阱如果在 M_0 下都不标识，则 $\exists\ M\geqslant M_0$，有 (N,M) 不是活的，则必要性得证.

首先，按以下步骤找到 H 中的最大陷阱.

1. 取 $H'\leftarrow H$，Σ' 为由 H' 生成的子系统，$i\leftarrow 0$.
2. 若 $\exists\ t\in T'$，使得 $t^{\bullet}=\varnothing$，设 ${}^{\bullet}t=\{p\}$，则记 t 为 t_{i+1}，p 为 p_{i+1}；否则，停止.
3. 取 $H'\leftarrow H'-\{p_i\}$，$\Sigma'=(H',T';F',M'_0)\leftarrow$ 由 H' 生成的子系统，$i\leftarrow i+1$.
4. 若 $H'=\varnothing$，停止；否则，转 2.

步骤 2 中设 ${}^{\bullet}t=\{p\}$ 是由于 $|{}^{\bullet}t\cap H|=1$. 由于 $|H|$ 是有限的，所以上述过程一定终止于步骤 2 或 4. 设终止时 i 值为 m.

因为步骤 2 找到的 p_i 不可能属于任何陷阱，所以最后得到的 H' 为最大陷阱（可能为空）.

现在找一个 $M\geqslant M_0$ 和一执行序列 σ 有 $M[\sigma>M'$，H 在 M' 下没有标识.

(1) $i\leftarrow m, \sigma'\leftarrow\varnothing, M'\leftarrow M_0, M'_0\leftarrow M_0, \Sigma'\leftarrow\Sigma, j\leftarrow 0$.

(2) 若 $i=0$，停止；否则，转(3).

(3) while $\exists\ p\in {}^\bullet t_i, p\notin H$ 且 $M'(p)<M'(p_i)$ do

　　$M'(p)\leftarrow M'(p)+1, M'_0(p)\leftarrow M'_0(p)+1$

　end

(4) while t_i 使能 do

　　执行 $t_i, j\leftarrow j+1$

　end

(5) 由 $M'[\overbrace{t_i\ldots t_i}^{j}>M_i$ 计算 M_i.

(6) $\sigma'\leftarrow\sigma'\overbrace{t_i\ldots t_i}^{j}, i\leftarrow i-1, M'\leftarrow M_i, j\leftarrow 0$，转(2).

执行完步骤(4)后，$M_i(p_i)=0$，又从 t_i 的选取知，t_i 的执行只可能向 $p_j(j<i)$ 中增添标识，而不能向 $p_k(k\geqslant i)$ 或 $p\in H'$ 中增添标识，故 $M'(p_i)=0$ 且 $M'(H')=0$. 而 $H-H'=\{p_i|i=1,\ldots,m\}$，所以，最终 $M'(H)=0$，即 H 在 M' 下没有标识，令 $M=M'_0, \sigma=\sigma'$. $M>M_0$，有 (N,M) 不是活的，这与活性的单调性矛盾，故必要性成立. □

推论 2.1. 若 AC 网 $N=(P,T;F)$ 活性满足单调性，则此 AC 网是结构活的.

下面给出两个简单的例子，以说明上面的定理.

例 2.1：考虑 AC 网系统 (N,M_0) 如图 3 所示. 容易验证 (N,M_0) 是活的，这个网包含一个极小死锁 $D=\{p_1,p_3,p_4\}$，死锁 D 中包含一个标识的陷阱 $\{p_1,p_3,p_4\}$. 很容易看出 $\forall\ M$，如果 $M\geqslant M_0$，则 (N,M) 必是活的.

例 2.2：考虑 AC 网系统 (N,M_0) 如图 4 所示. 也容易验证 (N,M_0) 是活的，这个网包含一个极小死锁 $D=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$，但死锁 D 中不包含标识的陷阱，即不满足定理 2.2 的充要条件. 容易看出，我们只要在 p_5 中增加一个标识，执行 t_5，此网所有的变迁均不能执行，即活性不具备单调性.

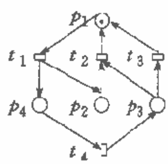

图3　活性具有单调性的AC网

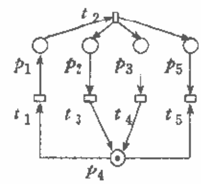

图4　活性不具有单调性的AC网

3　强化 AC 网系统的活性分析

下面对一类 AC 网系统，即强化 AC 网系统进行研究.

引理 3.1.[8] 一个 AC 网系统 (N,M_0) 是活的当且仅当每个(极小)死锁 D 对于 $\forall\ M\in R(M_0)$，$\exists\ p\in D$ 满足 $M(p)\geqslant 1$.

说明：文献[8]中的推论 27 所考虑的网系统是加权的，只要令权为 1 就是本引理.

定理 3.1. 令 $\Sigma_1=(N,M_1)$ 是强化的 AC 网系统，满足推论 1.1 条件，则 Σ_1 的活性具有单调性.

证明. 假设有 $M_2\geqslant M_1$，(N,M_1) 是活的，而 (N,M_2) 不是活的. 则对于 M_2，必存在一个死锁 $D\subseteq P$ 和一执行序列 σ_2^1 且 $M_2[\sigma_2^1>M_2^1$，使得 D 在 M_2^1 下没有标识(由引理 3.1 容易推得). 若我们能证明也存在 σ_1^1 有 $M_1[\sigma_1^1>M_1^1$，使得 D 在 M_1^1 下 D 也没有标识，那么这将与 Σ_1 是活的矛盾，此定理得证. □

下面找执行序列 σ_1^1 和 M_1^1，设 $\sigma_2^1=t_1\ldots t_n(n\geqslant 0)$.

下面考察 n 的大小，用数学归纳法证明存在这样的 σ_1^1 和 M_1^1.

情形 1. 若 $n=0$，则有 $M_2^1=M_2$，取 $\sigma_1^1=\varnothing$，则 $M_1^1=M_1\leqslant M_2=M_2^1$，$D$ 在 M_1 下当然也没有标识，定理显然成立.

情形 2. 若 $n>0$，设 $t_1,\ldots,t_i$ 在 M_1 下不使能，但 t_{i+1} 在 M_1 下使能，则由 AC 网的定义及推论 1.1 必有 $(\bigcup_{j=1}^{i}{}^\bullet t_j)\cap{}^\bullet t_{i+1}=\varnothing$，即 $t_1,\ldots,t_i$ 和 t_{i+1} 的使能原因无关，故可改写 $\sigma_2^1=t_{i+1}t_1\ldots t_it_{i+2}\ldots t_n$，$M_1[t_{i+1}>M_1^2$ 且仍有 $M_2[\sigma_2^1>M_2^1$. 对于 $t_1\ldots t_it_{i+2}\ldots t_n$ 和 M_1^2 重复上述步骤，最后将 σ_2^1 改写为 $\sigma_2^1=uv$，使得

$$M_2[u>M_2^3[v>M_2^1 \tag{1}$$

$M_1[u>M_1^3$，$v=v_1\ldots v_m$ 中任一变迁在 M_1^3 下不可执行.

下面对 m 进行讨论.

情形 2.1. 若 $m=0$，则 u，M_1^3 即为所求，定理得证.

情形 2.2. 若 $m>0$，由于 Σ_1 是活的，故必存在 $\omega=\omega_1\ldots\omega_l$，使得 $M_1^3[\omega>M_1^4[v_1>M_1^5$，这又分成两种情形.

情形 2.2.1. 若 $(\bigcup_{i=1}^{m}{}^\bullet v_i)\cap(\bigcup_{j=1}^{l}{}^\bullet\omega_j)=\varnothing$，则 ω 与 v 使能原因无关，故有

$$M_2^2[\omega > M_2^3[v_1 > M_2^4[v_2 \ldots v_m > M_2^5 \tag{2}$$

即有 $M_1^5 \leqslant M_2^5$,下面证明

$$(\bigcup_{i=1}^{l}\omega_i) \cap ({}^\cdot D \cup D^\cdot) = \varnothing \tag{3}$$

若式(3)不成立,则设$(\bigcup_{i=1}^{r}\omega_i)\cap({}^\cdot D\cup D^\cdot)=\varnothing\ (r<l)$,而 $\omega_{r+1}\in {}^\cdot D\cup D^\cdot$,因为${}^\cdot D\subseteq D^\cdot$,故 $\omega_{r+1}\in D^\cdot$.

设 $d\in D$,则有 $\omega_{r+1}\in d^\cdot$,再设 $M_1^3[\omega_1\ldots\omega_r > M_1'$,由以上分析知 $M_1'(d)>0$,且 $M_1^3(d)=M_1'(d)$,故 $M_1^3(d)>0$. 又由于 $M_2^3\geqslant M_1^3$,所以 $M_2^3(d)>0$,而 $M_2^2(d)=0$,由式(1)知,必存在 v_i 使得 $v_i\in d^\cdot$,故 ${}^\cdot v_i\cap {}^\cdot\omega_{r+1}\neq\varnothing$,这与$(\bigcup_{i=1}^{m}{}^\cdot v_i)\cap(\bigcup_{j=1}^{l}{}^\cdot\omega_j)=\varnothing$矛盾,所以必有式(3)成立.

利用(2)(3),对$\forall\ d\in D$,必有 $M_2^5(d)=M_2^4(d)$,即 D 在 M_2^5 下没有标识,考虑 M_1^5,M_2^4 和 $v_2\ldots v_m$,因为 $m-1<n$,由归纳假设知,存在 σ'_1 与 M' 使得 $M_1^5[\sigma'_1>M'$,且 D 在 M' 下没有标识. 取 $\sigma_1^1=u\omega v_1\sigma'_1$,$M_1^1=M'$,定理得证.

情形 2.2.2. 若$(\bigcup_{i=1}^{m}{}^\cdot v_i)\cap(\bigcup_{j=1}^{l}{}^\cdot\omega_j)\neq\varnothing$,则可设$(\bigcup_{i=1}^{m}{}^\cdot v_i)\cap(\bigcup_{j=1}^{k}{}^\cdot\omega_j)=\varnothing\ (k<l)$,而$(\bigcup_{i=1}^{m}{}^\cdot v_i)\cap{}^\cdot\omega_{k+1}\neq\varnothing$,再设$(\bigcup_{i=1}^{r}{}^\cdot v_i)\cap{}^\cdot\omega_{k+1}=\varnothing\ (r<m)$,而${}^\cdot v_{r+1}\cap{}^\cdot\omega_{k+1}\neq\varnothing$,这意味着$(\bigcup_{i=1}^{r}{}^\cdot v_i)\cap{}^\cdot v_{r+1}=\varnothing$(AC 网的定义). 故 v_{r+1} 与 $v_1,\ldots,v_r$ 的使能原因无关.

设 $v'=v_{r+1}v_1\ldots v_r v_{r+2}\ldots v_m$,$\omega'=\omega_1\ldots\omega_k$,因为${}^\cdot v_{r+1}\cap{}^\cdot\omega_{k+1}\neq\varnothing$,则由推论 1.1 及 AC 网的定义知 v_{r+1} 在 M_1^4 ($M_1^3[\omega'>M_1^4$)下使能. 由以上分析知 $M_2^3[v'>M_2^4$,且设 $M_1^3[\omega'>M_1^4[v_{r+1}>M_1^5$,则 ω' 与 v' 执行使能原因无关,这成了情形 2.2.1,故定理得证.

综上所述,我们证明了:若 Σ_1 是活的,则$\forall\ M\geqslant M_1$,$\Sigma=(N,M)$也必是活的,即 Σ_1 的活性具有单调性.

下面给出强化 AC 网的结构活的充要条件.

定理 3.2. 设 $N=(P,T;F)$为一强化 AC 网,则下面结论成立:

N 是结构活的$\Leftrightarrow$每个(极小)死锁中一定存在一个陷阱.

证明:先证充分性. 由于每个极小死锁都含有一个陷阱,所以,一定存在标识 M 使得每个极小死锁中有一个陷阱是标识的,由引理 2.2 可推得此 AC 网在 M 下必是活的,故 N 是结构活的.

再证必要性. 由于 N 是结构活的,所以一定存在某个标识 M,使 $\Sigma=(N,M)$是活的. 我们首先要找到一个执行序列 σ_1,$M[\sigma_1>M_1$,使得在 M_1 下有下面结论成立:

若$\exists\ t\in T$,${}^\cdot t=\{p_1,\ldots,p_m\}$,$p_1^\cdot\subseteq p_2^\cdot\subseteq\ldots\subset p_{k-1}^\cdot\subset p_k^\cdot=\ldots=p_m^\cdot$,则对于 $p\in P$ 且 $p^\cdot\subset p_m^\cdot$,有 $M(p)\geqslant\min(M_1(p_k),\ldots,M_1(p_m))$.

下面算法可找到此序列.

(1) 取 $T'\leftarrow T$;$\sigma\leftarrow\varnothing$;$\Sigma'=(P',T',F',M')\leftarrow\Sigma_1$;$T''\leftarrow T$;$i\leftarrow 1$.

(2) 若$\exists\ t\in T'$,设$({}^\cdot t)=\{p_1,\ldots,p_m\}$,有 $p_1^\cdot\subseteq p_2^\cdot\subseteq\ldots p_{k-1}^\cdot\subset p_k^\cdot=\ldots=p_m^\cdot$,对于$\forall\ p'$ ${}^\cdot\subset p_k^\cdot$,有 $M'(p')<\min(M'(p_k),\ldots,M'(p_m))$,则记此 t 为 t_i;否则,停止.

(3) For $j=1$ to $k-1$ do

 (3.1) 若有 $M'(p_j)<\min(M'(p_k),\ldots,M'(p_m))$,则找到一个 $t'\in p_k^\cdot$ 且 $p_j\notin{}^\cdot t'$;否则,转(3.4).

 (3.2) 若 t' 在 M' 下使能,则执行 t',$\sigma\leftarrow\sigma t'$,$M'[t'>M''$,$M'\leftarrow M''$;转(3.1).

 (3.3) 在 $\Sigma'=(P',T'';F',M')$中找到一序列 σ' 使 $t''(t''\in{}^\cdot p_k)$使能,则执行此序列和 t'',$\sigma\leftarrow\sigma\sigma' t''$,$M'[\sigma' t''>M''$,$M'\leftarrow M''$;转(3.1).

 (3.4) end.

(4) while $\exists\ p\in P'$,$p^\cdot\subset p_k^\cdot$ 且 $p\notin\{p_1,\ldots,p_{k-1}\}$有 $M'(p)<\min(M'(p_k),\ldots,M'(p_m))$ do

 (4.1) 执行 t_i,$\sigma\leftarrow\sigma t_i$,$M'[t_i>M''$.

 (4.2) $M'\leftarrow M''$.

 (4.3) end.

(5) $T'\leftarrow T'-\{p_k^\cdot\}$;$i\leftarrow i+1$.

(6) 若 $T'=\varnothing$,停止;否则,转(2).

步骤(3.1)中一定可以找到一个 $t'\in p_k^\cdot$ 且 $p_j\notin{}^\cdot t'$,因为 $p_1^\cdot\subseteq p_2^\cdot\subseteq\ldots\subset p_{k-1}^\cdot\subset p_k^\cdot=\ldots=p_m^\cdot$. 步骤(3.3)中,由于 Σ'是活的,所以一定存在一个执行序列 σ' 使 $t''(t''\in{}^\cdot p_k)$使能. 步骤(4)中,由于执行完 3 后必有 $M'(p_1),\ldots,M'(p_{k-1})\geqslant\min(M'(p_k),\ldots,M'(p_m))$,即使 $M(p)=0$,也可令 t_i 执行 $\min(M'(p_k),\ldots,M'(p_m))$次,所以步骤(4)一定能达到使 $M'(p)\geqslant\min(M'(p_k),\ldots,M'(p_m))$.

上面的算法停止后,σ 和 M' 即为所求的 σ_1 和 M_1. 由定理 3.1 可推得,$\forall\ M$,如果 $M\geqslant M_1$,则(N,M)必是活的,从而由定理 2.2 可推得在 M_1 下每个极小死锁中必含有一个标识的陷阱,故 N 中每个(极小)死锁中定存在一个陷阱,必要性得证.

下面举两个简单的例子以说明定理.

例 3.1:如图 5 所示 AC 网,这个网包含一个极小死锁 $D=\{p_1,p_3\}$,死锁 D 中包含一个陷阱 $\{p_1,p_3\}$.只要在 p_1 或 p_3 中加标识,此网便是活的,即此网是结构活的.

例 3.2:如图 6 所示 AC 网,此网包含一个极小死锁 $D=\{p_1,p_3\}$.但此死锁 D 中不包含陷阱,可容易看出不存在标识使此网活.

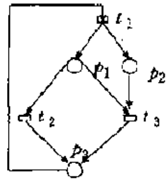

图5　结构活的AC网

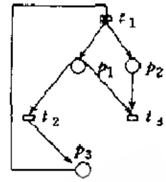

图6　结构不活的AC网

4 结　论

本文考虑了活性具有单调性的 AC 网和一类称为强化 AC 网的活性单调性及其结构活的充分必要条件.从定义 1.11 可看出强化 AC 网仍包含了(扩充)自由选择网,但结构活却可由同样的极小死锁的结构特性刻画.可见此类 AC 网更具有一般性,并且活性判断复杂度与自由选择网是一个量级的.对于一般的 AC 网,看来必须找到新的途径、方法才能很好地讨论其活性问题.

参考文献

1 Reisig W. Petri nets, an introduction. Springer-Verlag, 1985

2 Commoner F, Holt A W, Even S *et al*. Marked directed graphs. Journal of Computer and System Science, 1971,5:511~523

3 Hack M. Analysis of production schemata by Petri nets[M. S. Thesis]. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1972

4 Esparza J, Silva M. A polynomial——time algorithm to decide liveness of bounded free-choice nets. Theoretical Computer Science, 1992,102:185~205

5 Barkaoui K, Couvreur J M, Duteilhet C. On liveness in extended nonself-controlling nets. Lecture Notes in Computer Science, 1995,935:25~44

6 Kemper P, BauseF. An efficient polynomial——time algorithm to decide liveness and boundedness of free-choice nets. Lecture Notes in Computer Science, 1992,616:263~278

7 Best E. Structure theory of Petri nets: the free choice hiatus. Lecture Notes in Computer Science, 1986,254:168~205

8 Barkaoui K, Pradat-Peyre J. On liveness and controlled siphons in Petri nets. Lecture Notes in Computer Science, 1996,1091:57~72

9 Murata T. Petri nets: properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE, 1989,77(4):541~580

On Liveness of Asymmetric Choice Nets

ZHEN Qiang　LU Wei-ming

(*Computer Science Department　Institute of Mathematics　The Chinese Academy of Sciences　Beijing*　100080)

Abstract　In this paper, the sufficient and necessary condition of liveness monotonicity in AC(asymmetric choice) nets is presented. Moreover, the liveness monotonicity for a class of AC nets, the sufficient and necessary condition of structure liveness, is proved.

Key words　AC nets (normalsize asymmetric choice nets), strong AC nets, liveness, liveness monotonicity, structure liveness.