Institution 中合并理论的初始与终结语义*

应明生

（江西师范大学 南昌 330027）

摘要 本文在一些相当直观的条件下建立了 Institution 中合并理论与各因子理论的初始(终结)语义之间的对应关系.

关键词 程序系统,程序语言,模型论,范畴论.

近年来,Goguen J A. Burstall R M 为了给说明语言 Clear 提供合理的语义[1],建立了适用于程序规范说明的抽象模型论——Institution.[2]其中根本性的结果是遗忘函子 $\mathit{Sign}:\underline{\mathit{Th}}\to\underline{\mathit{Sign}}$ 反射余极限;直观地,它表明基调可粘合的理论也可粘合.从某种意义上来说,这是软件工程中模块化技术的逻辑支持.[3,4]虽然他们已经证明了理论的可粘合性,但对粘合后得到的合并理论之性态完全不知道.最近,作者[5]指出了合并理论甚至可能是不一致的,并讨论了合并理论具有一致性的各种条件.

我们知道,初始与终结语义是抽象数据类型的 2 种最为重要的语义模型.尽管对于代数规范说明常用的方程逻辑,初始与终结语义的存在性得到了保证.但是,在采用其它的逻辑作规范说明或考虑不完备的规范说明时情况并非总是如此.因此,关于合并理论我们很自然地提出了如下 2 个十分基本的问题:① 当各因子理论都有初始、终结语义时,合并理论是否也有相应的语义?② 若合并理论的初始、终结语义存在,那么它与各因子理论的相应语义有何关系?本文的目的是在 Institution 这样一个一般性的逻辑框架中,在一些相当直观的条件下解决上述 2 个问题.

设 & 是一个 Institution,$\underline{\mathit{Th}}$ 是其理论范畴,$D:G\to\underline{\mathit{Th}}$ 是 $\underline{\mathit{Th}}$ 中的一个 *diagram*,$D'=D;\mathit{Sign}:G\to\underline{\mathit{Sign}}$ 是 D 在 $\underline{\mathit{Sign}}$ 中对应的 *diagram*,其中对于每个 $n\in|G|$,$D_n=\langle\Sigma_n,E_n\rangle$,$D'_n=\Sigma_n$.若 D' 在 $\underline{\mathit{Sign}}$ 中有余极限 $\alpha':D'\Rightarrow\Sigma$,则由文献[2]中的定理 11 知道,$\alpha:D\Rightarrow\langle\Sigma,E\rangle$ 是 D 在 $\underline{\mathit{Th}}$ 中的余极限,这里对于每个 $n\in|G|$,$\alpha_n=\alpha'_n$,$E=(\bigcup_{n\in|G|}\alpha_n(E_n))^{\bullet}$.这时,$\langle\Sigma,E\rangle$ 称为 $\langle\Sigma_n,E_n\rangle_{n\in|G|}$ 的合并.

定义 1. 设 $\langle\Sigma,E\rangle\in|\underline{\mathit{Th}}|$,则 E^* 可以看作 $\underline{\mathit{Mod}}(\Sigma)$ 的满子范畴.它的初始对象(如若存在)称为 $\langle\Sigma,E\rangle$ 的初始模型.

定义 2. 设 $\varnothing:\Sigma\to\Sigma'$ 是 $\underline{\mathit{Sign}}$ 中的态射.

---

* 本文研究得到国家 863 高技术研究发展计划基金资助.作者**应明生**,1964 年生,教授,主要研究领域为数理逻辑及其在计算机科学中的应用,模糊数学,基于非经典逻辑的拓扑学.

本文通讯联系人:应明生,南昌 330027,江西师范大学

本文 1995-03-30 收到修改稿

(1)若对于任意 $m\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$,总存在 $m'\in|\underline{Mod}(\Sigma')|$ 使得 $m=\varnothing(m')$,则称 & 是沿 $\varnothing$ 模型可扩张的.

(2)若对于任意 $m',s'\in|\underline{Mod}(\Sigma')|$ 及 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的态射 $f:\varnothing(m')\to\varnothing(s')$,总存在 $\underline{Mod}(\Sigma')$ 中的同态 $f':m'\to s'$ 使得 $f=\varnothing(f')$,则称 & 是沿 $\varnothing$ 同态可扩张的.

注记　模型可扩张性的直观意义是当基调 Σ' 是 Σ 的扩充时(这时 $\varnothing$ 是嵌入),每个 $\Sigma-$模型 m 总可以扩张成 $\Sigma'-$模型 m'(m' 在 Σ 上的限制恰为 m). 对于同态可扩张性,我们可以作类似的解释. 容易知道,模型沿 $\varnothing$ 的可扩张性比文献[5]中定义 10 的模型可扩张性弱.

定理 1. 设 & 沿每个 $\alpha_n(n\in|G|)$ 都是模型、同态可扩张的. 若 m 是 $\langle\Sigma_n,E_n\rangle_{n\in|G|}$ 的合并理论 $<\Sigma,E>$ 的初始模型,则对于每个 $n\in|G|$,$\alpha_n(m)$ 都是 $\langle\Sigma_n,E_n\rangle$ 的初始模型.

证明:由于 $m\models E\supseteq\alpha_n(E_n)$,我们有 $m\models\alpha_n(E_n)$. 再由满足性条件(见文献[2]中的定义 1)得 $\alpha_n(m)\models E_n$. 任给 E_n 的另一模型 $s_n\in|\underline{Mod}(\Sigma_n)|$. 由于 & 沿 α_n 是模型可扩张的,存在 $s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$ 使 $s_n=\alpha_n(s)$. 因为 m 是 E 的初始模型,有 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的态射 $f:m\to s$. 这时,$\alpha_n(f):\alpha_n(m)\to s_n=\alpha_n(s)$ 是 $\underline{Mod}(\Sigma_n)$ 中的态射. 另一方面,若 $g_n:\alpha_n(m)\to s_n=\alpha_n(s)$ 是 $\underline{Mod}(\Sigma_n)$ 中的态射,则由 & 沿 α_n 的同态可扩张性,有 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的态射 $g:m\to s$ 使 $g_n=\alpha_n(g)$. 注意 m 是初始的,$g=f$,从而 $g_n=\alpha_n(f)$.　□

注记　因为 α 是余极限,在绝大多数情况下,每个 $\alpha_n(n\in|G|)$ 都是 *monic*,所以上述定理中沿各 α_n 的模型、同态可扩张性是十分自然的.

定义 3. 称 & 是正规的,若对于任意 $\Sigma\in|\underline{Sign}|$ 及 $m,s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$,$m\cong s$ 蕴涵 $m\equiv s$,这里 $\cong$ 是 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的同构,$\equiv$ 是初等等价(见文献[5]中的定义 2).

定义 4. 设 $\underline{Sign}$ 中的 *diagram* $D:G\to\underline{Sign}$ 有余极限 $\alpha:D\Rightarrow\Sigma$. 若对于任意 $m,s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$ 及 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的态射 $f,g:m\to s$,当 $\alpha_n(f)=\alpha_n(g)$,$n\in|G|$ 时,总有 $f=g$,则称 & 是 $D-$同态分支化的.

注记　分支化的直观意义是:设 $\Sigma=\bigcup\Sigma_n$,f,g 都是定义在 Σ 上的函数,若 f,g 在每个 Σ_n 上都相等,则它们在整个 Σ 上相等.

定义 5. 设 $\Sigma\in|\underline{Sign}|$,$m,s,u\in|\underline{Mod}|$,$f:m\to u$,$g:s\to u$ 都是 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的态射. 若存在 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的同构 $i:m\to s$ 使得 $f=i;g$,则称 f 与 g 同伦,记 $f\approx g$.

定义 6. 设 $D:G\to\underline{Sign}$ 是 $\underline{Sign}$ 中的一个 *diagram*,$\bar{\varphi}=\langle\varphi_n:n\in|G|\rangle$,其中 $\varphi_n:m_n\to s_n$ 是 $\underline{Mod}(D_n)$ 中的态射. 若对于 G 中任意一条从 n 到 n' 的边 f,$\varphi_n\approx D(f)(\varphi_{n'})$,则称 $\bar{\varphi}$ 相对 D 是相容的.

定义 7. 设 $\underline{Sign}$ 中的 *diagram* $D:G\to\underline{Sign}$ 有余极限 $\alpha:D\Rightarrow\Sigma$. 若对于任意 $m,s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$ 及相对 D 相容的 $\langle\varphi_n:n\in|G|\rangle$,其中 $\varphi_n:\alpha_n(m)\to\alpha_n(s)$ 是 $\underline{Mod}(D_n)$ 中的态射($n\in|G|$),总存在 $\underline{Mod}(\Sigma)$ 中的态射 $\varphi:m\to s$ 使得对于每个 $n\in|G|$,$\varphi_n=\alpha_n(\varphi)$,则称 & 是 $D-$同态可粘合的.

注记　同态可粘合性与文献[5]中定义 4 的模型可粘合性相似,它的直观意义是:设 $\Sigma=\bigcup\Sigma_n$,每个 f_n 是定义在 Σ_n 上的函数. 若对于任意 n_1,n_2,$f_{n_1}|\Sigma_{n_1}\cap\Sigma_{n_2}=f_{n_2}|\Sigma_{n_1}\cap\Sigma_{n_2}$($\{f_n\}$ 相容),则 $\{f_n\}$ 可以粘合成定义在整个 Σ 上的函数 $f(f|\Sigma_n=f_n)$.

定理 2. 设 & 是正规的、$D'-$同态分支化的、沿各 $D'(f)$(f 是 G 中的边)模型、同态可扩张的、$D'-$模型、同态可粘合的,则对于 $\underline{Th}$ 中任意使 $D'=D;Sign$ 的 *diagram* $D:G\to\underline{Th}$,

当每个 $D_n(n\in|G|)$都有初始模型时,$\langle D_n\rangle_{n\in|G|}$的合并理论也有初始模型.

证明:设对每个 $n\in|G|$,m_n 都是 E_n 的初始模型.

(1) 先证 $\overline{m}=\langle m_n : n\in|G|\rangle$相对 D'是相容的(见文献[5]中的定义 3).事实上,若 f 是 G 中从 n 到 n'的一条边,则由 D 是 *diagram* 知 $D'(f)$是理论态射,从而 $D'(f)(E_n)\subseteq E'_{n'}$.由于 $m_{n'}\models E_{n'}$,亦有 $m_{n'}\models D'(f)(E_n)$,这样由满足性条件得 $D'(f)(m_{n'})\models m_n$.利用 & 沿 $D'(f)$的模型、同态可扩张性,类似定理 1 的证明可知 $D'(f)(m_{n'})$是 E_n 的初始模型.由于 m_n 也是 E_n 的初始模型,必有 $D'(f)(m_{n'})\cong m_n$.因此,由 & 的正规性得 $m_n\equiv D'(f)(m_{n'})$.

(2) 由(1)与 & 的 D'－模型可粘合性即知存在 $m\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$使对每个 $n\in|G|$,$m_n\equiv\alpha_n(m)$.得证 $m\models E$.由文献[2]中命题 3 的证明(见文献[2]中第 104 页第 23～25 行),只要证 $m\models\bigcup_{n\in|G|}\alpha_n(E_n)$,即对每个 $n\in|G|$,$m\models\alpha_n(E_n)$.注意 $\alpha_n(m)\equiv m_n\models E_n$ 及满足性条件可知,这是成立的.

(3) 现证(2)中的 m 是$\langle\Sigma,E\rangle$的初始模型.设 s 是 E 的另一模型.对每个 $n\in|G|$,令 $s_n=\alpha_n(s)$,则由 $s\models E\supseteq\alpha_n(E_n)$得 $s\models\alpha_n(E_n)$,从而由满足性条件得 $s_n=\alpha_n(s)\models E_n$.由于 m_n 是 E_n 的初始模型,存在$\underline{Mod}(\Sigma_n)$中的态射 $\varphi_n : m_n\to s_n$.设 f 是 G 中一条从 n 到 n'的边,因为 α 是锥,下左图交换,$s_n=\alpha_n(s)=(\alpha_{n'};D'(f))(s)=D'(f)(\alpha_{n'}(s))=D'(f)(s_{n'})$.

$$\begin{tikzcd} & \Sigma & \\ \Sigma_n \arrow[ur, "\alpha_n"] \arrow[rr, "D(f)"'] & & \Sigma_{n'} \arrow[ul, "\alpha_{n'}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} m_n \arrow[dr, "\varphi_n"] \arrow[dd, "i"'] & \\ & S_n=D(f)(S_{n'}) \\ D(f)(m_{n'}) \arrow[ur, "D(f)(\varphi_{n'})"'] & \end{tikzcd}$$

由(1)得知存在$\underline{Mod}(\Sigma_n)$中的同构 $i:m_n\to D'(f)(m_{n'})$.因为 m_n 是初始的,上右图交换,即 $\varphi_n=i;D'(f)(\varphi_{n'})$.因此,$\langle\varphi_n : n\in|G|\rangle$相对 D 是相容的.根据 & 的 D'－同态可粘合性,存在$\underline{Mod}(\Sigma)$中的同态 $\varphi:m\to s$ 使得对每个 $n\in|G|$,$\varphi_n=\alpha_n(\varphi)$.若 $\psi:m\to s$ 是$\underline{Mod}(\Sigma)$中的态射,则对每一个 $n\in|G|$,$\alpha_n(\psi):m_n\to s_n$ 是$\underline{Mod}(\Sigma_n)$中的态射,由 m_n 的初始性得 $\alpha_n(\psi)=\varphi_n=\alpha_n(\varphi)$.因为 & 是 D'－同态分支化的,则 $\psi=\varphi$.　□

注记 我们已经对带有否定的 Institution 证明了 D'－模型可粘合性是合并理论 E 一致的必要条件(见文献[5]中的定理 1),由此可知这个条件是相当弱的.

最后我们指出:关于终结语义,可以采用类似的方法加以讨论,并无特殊的困难.对于 Moss L S,Thatte S R[6]提出的最优语义亦可建立一些相应的结果,在此不予赘述.当然,这里所得到的结果也可以推广到作者[7]提出的变真值 Institution 中以及另一些介于初始与终结之间的语义,如格语义.[8]

参考文献

1 Burstall R M. The semantics of clear, a specification language. In: Bjorner D ed. Proceedings, 1979 Copenhagen Winter School on Abstract Software Specification, Lecture Notes in Computer Science 86, Berlin: Springer－Verlag, 1980. 292～332.

2 Goguen J A, Burstall R M. Institutions: abstract model theory for specification and programming. J. ACM, 1992, **39**(1):95～146.

3 Diaconescu R, Goguen J A, Stefaneas P. Logical support for modularisation. In: Huet G, Plotkin G eds. Logical

Enviroments (Edinburg, 1991), Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 83～130.

4 Bergstra J A, Heering J, Klint P. Module algebra. J. ACM, 1990, **37**(**2**): 335～372.

5 Ying M S. Putting consistent theories together in institutions. J. Comput. Sci. Technology, 1995, **10**(**3**).

6 Moss L S, Thatte S R. Modal logic and algebraic specifications. Theoretic Comput. Sci., 1993, **111**(**1**): 191～210.

7 Ying M S. Institutions of variable truth values: an approach in the ordered style. J. Comput. Sci. Technology, 1995, **10**(**3**).

8 陆汝钤. 计算机语言的形式语义学. 北京:科学出版社, 1992.

INITIAL AND TERMINAL SEMANTICS FOR GLUED THEORIES IN INSTITUTIONS

Ying Mingsheng

(*Jiangxi Normal University　Nanchang*　330027)

Abstract　In this paper, the correspondence among initial (terminal) semantics of glued theories and factor theories in institutions is clarified under certain intuitive conditions.

Key words　Programming system, programming language, model theory, category theory.