第6卷第4期 软 件 学 报 Vol.6, No.4
1995年4月 JOURNAL OF SOFTWARE Apr. 1995

广义 Horn 集*

刘叙华 欧阳丹彤

(吉林大学计算机科学系,长春 130023)

摘要 本文定义了广义 Horn 集,并在广义 Horn 集上证明了广义输入归结的完备性;广义输入对称调解的完备性;以及一定条件下的广义输入有向调解的完备性.文中还证明了广义调解法的提升引理.

关键词 广义归结,广义对称调解,广义有向调解,广义 Horn 集.

Horn 集是一类特殊的子句集,许多归结、调解策略在一般子句集上不完备,而在 Horn 集上却都完备.比如,输入归结和单元归结[1];输入对称调解和单元对称调解[2];一定条件下的输入有向调解和单元有向调解[3]等等.这些策略都大大减少了无用子句的生成,从而提高了问题求解的效率.然而,将定理的否定先化为 Horn 集,再使用上述策略未必永远是最好的,有时如直接使用母式会更自然,更简便,这从文献[4]第6.1节的例子中可以明显地看出.为此,本文引入了广义 Horn 集的概念,它是一类特殊的广义子句集,比 Horn 集对问题的描述更为自然,并且在广义 Horn 集上可证得如下结果:广义输入归结是完备的;广义输入归结和广义输入对称调解的结合是完备的;一定条件下的广义输入归结和广义输入有向调解的结合亦是完备的.文中还给出了广义调解法提升引理的证明.

1 有关的基本概念

定义 1.1. 称一广义子句为广义 Horn 子句,如果该广义子句能通过等价变换化成 m 个普通 Horn 子句的合取式($m\geqslant 1$).

定义 1.2. 集合 S 称为广义 Horn 集,如果 S 中每一元素都是广义 Horn 子句.

定义 1.3. 设 S 为广义子句集,称 S 中的广义子句为广义输入子句.

定义 1.4. 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是一些原子,$\Phi(A_1,\cdots,A_n)$是以命题逻辑符号:

$$\sim,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\leftrightarrow$$

连接这些原子和一些0,1做成的公式,这样一个公式称为一个广义子句.

设 Φ 是一个广义子句,若特别注意 Φ 中某一原子 A 时,我们可以将 Φ 写成 $\Phi(A)$,

---

* 本文1993—02—22收到,1993—05—27定稿

本课题受国家自然科学基金、博士点基金、863计划及国家攀登计划项目的资助.作者刘叙华,1937年生,教授,博士导师,主要研究领域为定理机器证明,模糊推理,模态推理.欧阳丹彤,女,1968年生,助教,主要研究领域为定理机器证明.

本文通讯联系人:刘叙华,长春 130023,吉林大学计算机系

$\Phi(A=0)$表示以 0 代 Φ 中 A 的所有出现而得到的广义子句. 如果以替换 σ 变 Φ. 那么可能合一 A 与某些原子，$\Phi^{\sigma}(A^{\sigma}=0)$表示在 Φ^{σ} 中以 0 代这些合一后的所有出现而得到的广义子句.

定义 1.5. 设 Φ,Ψ 是两个没有公共变量的广义子句. 设 Φ^{σ} 是合一

$$A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$$

所得到的 Φ 的因子. Ψ 是合一

$$B_{j_1},\cdots,B_{j_k}$$

所得到的 Ψ 的因子. 设 ρ 是 $A_{i_1}^{\sigma}$和 $B_{j_1}^{\sigma}$的 mgu，于是

$$\Phi^{\sigma\rho}(A_{i_1}^{\sigma\rho}=0)\vee\Psi^{\tau\rho}(B_{j_1}^{\tau\rho}=1)\qquad \Phi^{\sigma\rho}(A_{i_1}^{\tau\rho}=1)\vee\Psi^{\tau\rho}(B_{j_1}^{\tau\rho}=0)$$

都称为 Φ 与 Ψ 的广义归结式，其中 A_{i_1},B_{i_1}分别称为 Φ,Ψ 中的归结原子.

定义 1.6. 设 Φ,Ψ 是两个没有公共变量的广义子句. 设 Φ^{σ} 是合一

$$P(t_1),\cdots,P(t_m)$$

所得到的 Φ 的因子；Ψ^{τ} 是合一

$$r_1=s_1,\cdots,r_n=s_n$$

所得到的 Ψ 的因子. 设 ρ 是 t_1^{σ} 和 r_1^{τ} 的 mgu，于是

$$\Phi^{\sigma\rho}(P^{\sigma\rho}(s_1^{\tau\rho}))\vee\Psi^{\tau\rho}((r_1=s_1)^{\tau\rho}=0)$$

称为从 Ψ 到 Φ 的广义有向调解式，其中 $P(t_1)$，$r_1=s_1$ 分别称为 Φ、Ψ 中的广义调解原子.

定义 1.7. 设 Φ、Ψ 是两个没有公共变量的广义子句. 设 Φ^{σ}是合一

$$P(t_1),\cdots,P(t_m)$$

所得到的 Φ 的因子；Ψ^{τ} 是合一

$$r_1=s_1,\cdots,r_n=s_n$$

所得到的 Ψ 的因子. 若 t_1^{σ} 和 r_1^{τ} 有 mgu ρ，或者 t_1^{σ} 和 s_1^{τ} 有 mgu ρ，则称

$$\Phi^{\sigma\rho}(P^{\sigma\rho}(s_1^{\tau\rho}))\vee\Psi^{\tau\rho}((r_1=s_1)^{\tau\rho}=0)$$

$$\Phi^{\sigma\rho}(P^{\sigma\rho}(s_1^{\tau\rho}))\vee\Psi^{\tau\rho}((r_1=s_1)^{\tau\rho}=0)$$

为从 Ψ 到 Φ 的广义对称调解式.

定义 1.8. 设 S 为广义子句集，从 S 出发的一个演绎称为广义输入演绎，当且仅当该演绎中每一次进行广义归结或广义有向(对称)调解的二亲本子句中，有一个是广义输入子句.

定义 1.9. 设 S 为 E 不可满足的广义 Horn 子句集，则 S 中每一元素都能通过等价变换化成若干个普通 Horn 子句的合取式，令 S' 为所有这些普通 Horn 子句组成的 E 不可满足的 Horn 子句集，于是，称 S 具有广义基合流性质当且仅当 S' 具有基合流性质[3].

定义 1.10. 称两个广义基子句 Φ,Ψ 是等价的，记作 $\Phi\cong\Psi$，如果 Φ,Ψ 作为命题逻辑中的公式是等价的，并且 Φ 中所含原子与 Ψ 中所含原子相同.

定义 1.11. 设 $S=\{\Phi_1,\cdots,\Phi_n\}$，$S^*=\{\Phi_1^*,\cdots,\Phi_n^*\}$是两个广义基子句集，并且

$$\Phi_i\cong\Phi_i^*,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

若 $G_1,\cdots,G_k$ 是从 S 推出 G_k 的一个演绎 D，则广义子句序列：

$$G_1^*,\cdots,G_k^*$$

称为从 S^* 推出 G_k^* 的一个与 D 等价的演绎 D^*，其中

(1)若 $G_i \cong \Phi_j$，则 $G_i^* \cong \Phi_j^*$，$i \in \{1,\cdots,k\}$，$j \in \{1,\cdots,n\}$.

(2)若 G_i 是 G_l 与 G_j 的广义归结式，则 G_i^* 是 G_l^* 与 G_j^* 的广义归结式，$l<i, j<i$.

(3)若 G_i 是 G_l 与 G_j 的广义有向(对称)调解式，则 G_i^* 是 G_l^* 与 G_j^* 的广义有向(对称)调解式，$l<i, j<i$.

为了与等词符号"="区分开，本文用 $A \triangleq B$ 表示 A 就是 B，A 和 B 是同一回事，等等.

2 相关引理

引理 2.1. 设 Φ、Ψ 是形如 $\Phi(P(t))$ 和 $\Psi(t=s)$ 的广义基子句，于是从 Ψ 到 Φ 的广义有向调解式是 Φ 和 Ψ 的 E 逻辑推论.

证明：从 Ψ 到 Φ 的广义有向调解式为

$$DP(\Phi,\Psi) \triangleq \Phi(P(s)) \vee \Psi((t=s)=0)$$

设 I 是满足 $\Phi(P(t))$ 和 $\Psi(t=s)$ 的一个 E 解释，

若 $t=s$ 在 I 下取值 0，则由于 $\Psi(t=s)$ 在 I 下为真，故 $\Psi((t=s)=0)$ 在 I 下为真. 因此 I 满足 $DP(\Phi,\Psi)$.

若 $t=s$ 在 I 下取值 1，则由于 I 是 E 解释，而 $\Phi(P(t))$ 在 I 下为真，故 $\Phi(P(s))$ 在 I 下为真. 因此 I 满足 $DP(\Phi,\Psi)$.

由 I 的任意性知，$DP(\Phi,\Psi)$ 是 Φ 和 Ψ 的 E 逻辑推论. 证毕.

引理 2.2. 设 Φ_1，Φ_2 是两个等价的广义基子句，即 $\Phi_1 \cong \Phi_2$，Ψ_1、Ψ_2 亦然，即 $\Psi_1 \cong \Psi_2$. 若 Φ_1 和 Ψ_1 可以进行广义有向调解，广义调解原子为 Φ_1 中的 $P(t)$ 和 Ψ_1 中的 $t=s$，则

$$DP(\Phi_1,\Psi_1) \cong DP(\Phi_2,\Psi_2)$$

其中 $DP(\Phi_1,\Psi_1)$ 表示从 Ψ_1 到 Φ_1 的广义有向调解式 $\Phi_1(P(s)) \vee \Psi_1((t=s)=0)$，$DP(\Phi_2,\Psi_2)$ 亦然.

证明：因为 $\Phi_1 \cong \Phi_2$，$\Psi_1 \cong \Psi_2$，所以

$$\Phi_1(P(s)) \cong \Phi_2(P(s))$$

$$\Psi_1((t=s)=0) \cong \Psi_2((t=s)=0)$$

故

$$\Phi_1(P(s)) \vee \Psi_1((t=s)=0) \cong \Phi_2(P(s)) \vee \Psi_2((t=s)=0),$$

即

$$DP(\Phi_1,\Psi_1) \cong DP(\Phi_2,\Psi_2)$$

证毕.

引理 2.3. 若 $S=\{\Phi_1,\cdots,\Phi_n\}$，$S^*=\{\Phi_1^*,\cdots,\Phi_n^*\}$ 是两个广义基子句集，且

$$\Phi_i \cong \Phi_i^*, \qquad i=1,\cdots,n$$

则使用广义归结和广义有向调解从 S，S^* 出发的两个等价演绎所推出的两个广义子句仍然等价.

证明：设从 S 出发推出 Φ 的演绎 D 为：

$$G_1, G_2, \cdots, G_k \triangleq \Phi$$

从 S^* 出发与 D 等价的演绎 D^* 为：

$$G_1^*, G_2^*, \cdots, G_k^* \triangleq \Phi^*$$

于是由等价演绎的定义，文献[4]第六章中命题 2，及引理 2.2 可知：

$$G_i \cong G_i^*, \qquad i=1,\cdots,k$$

故
$$\Phi \cong \Phi^*.$$
证毕.

从上述证明中容易看出，若将引理 2.1、2.2、2.3 中的广义有向调解改为广义对称调解，则结论仍成立.

引理 2.4(提升引理). 设 Φ、Ψ 是两个无公共变量的广义子句，Φ'、Ψ' 分别是 Φ、Ψ 的例，且无公共变量. 若 G' 为从 Ψ' 到 Φ' 的广义有向调解式，则存在从 Ψ 到 Φ^* 的广义有向调解式 G，使得 G' 是 G 的例. 其中 Φ^* 是使用广义调解法应用适当多个(也可为 0 个，此时 $\Phi^* \triangleq \Phi$)函数自反公理到 Φ 所得到的 Φ 的一个例.

证明：设 Φ 中所有变量符号为 $x_1,\cdots,x_n$；Ψ 中所有变量符号为 $y_1,\cdots,y_m$. 设 Φ' 形如 $\Phi'(P'(t_1'))$，其中所有变量符号为 $x_1',\cdots,x_{n_1}'$；Ψ' 形如 $\Psi'(r_1'=s_1')$，其中所有变量符号为 $y_1',\cdots,y_{m_1}'$. 不妨设从 Ψ' 到 Φ' 的广义有向调解式为：

$$G' \triangleq \Phi'^{\sigma'\rho'}(P'^{\sigma'\rho'}(s_1'^{\tau'\rho'})) \vee \Psi'^{\tau'\rho'}((r_1'=s_1')^{\tau'\rho'}=0)$$

其中 σ' 是 Φ' 中原子 $P'(t_1'),\cdots,P'(t_k')$ 的 mgu；τ' 是 Ψ' 中原子 $r_1'=s_1',\cdots,r_l'=s_l'$ 的 mgu；ρ' 是 $t_1'^{\sigma'}$ 与 $r_1'^{\tau'}$ 的 mgu.

因为 Φ'、Ψ' 分别是 Φ、Ψ 的例，所以不妨设

$$\Phi' \triangleq \Phi^{\theta_1}, \Psi' \triangleq \Psi^{\theta_2}$$

不妨设 θ_1 的分母只有 x_i；θ_2 的分母只有 y_j；σ' 的分母只有 $x_{i_1}^1$；τ' 的分母只有 y_{j_1}' $(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant i_1\leqslant n_1, 1\leqslant j_1\leqslant m_1)$.

Ψ' 中有 $r_1' \triangleq r_1^{\theta_2}, s' \triangleq s_1^{\theta_2}$；

Φ' 中有 $P' \triangleq P^{\theta_1}$，$t_1'$ 有如下两种情形：

(1)在 P 中存在项 t_1，使得 $t_1' \triangleq t_1^{\theta_1}$，此时 Φ 形如 $\Phi(P(t_1))$，Ψ 形如 $\Psi(r_1=s_1)$. 作替换 $\theta \triangleq \theta_1 \cdot \sigma' \cup \theta_2 \cdot \tau'$，则有

$$\Phi'^{\sigma'} \triangleq \Phi^{\theta_1\sigma'}{}_1 \triangleq \Phi^{\theta}, \Psi'^{\tau'} \triangleq \Psi^{\theta_2\tau'} \triangleq \Psi^{\theta}$$

因此有
$$G' \triangleq \Phi^{\theta\rho'}(p^{\theta\rho'}(s^{\theta\rho'}{}_1)) \vee \Psi^{\theta\rho'}((r_1=s_1)^{\theta\rho'}=0)$$

令 $P(t_1),\cdots,P(t_k)$ 是 Φ 中原子，且 $(P(t_1))^{\theta_1} \triangleq P'(t_1'),\cdots,(P(t_k))^{\theta_1} \triangleq P'(t_k')$；$r_1=s_1,\cdots,r_l=s_l$ 是 Ψ 中原子，且 $(r_1=s_1)^{\theta_2} \triangleq (r_1'=s_1'),\cdots,(r_l=s_l)^{\theta_2} \triangleq (r'_1=s'_i)$；令 $P(t_{k_i})\cdots,P(t_{k_i})$ 是 Φ 中所有在 $\theta \cdot \rho'$ 下可与 $P(t_1)$ 合一的原子；$r_{l_1}=s_{l_1},\cdots,r_{l_j}=s_{l_j}$ 是 Ψ 中所有在 $\theta \cdot \rho'$ 下可与 $r_1=s_1$ 合一的原子. 显然有

$$\{P(t_1),\cdots,P(t_k)\} \subseteq \{P(t_{k_1}),\cdots,P(t_{k_i})\}$$

$$\{r_1=s_1,\cdots,r_l=s_l\} \subseteq \{r_{l_1}=s_{l_1},\cdots,r_{l_j}=s_{l_j}\}$$

设 λ_1 是 $\{P(t_{k_1}),\cdots,P(t_{k_i})\}$ 的 mgu；λ_2 是 $\{r_{l_1}=s_{l_1},\cdots,r_{l_j}=s_{l_j}\}$ 的 mgu.

不妨设 λ_1 中变量符号只有 x_{i_1}，λ_2 中变量符号只有 y_{j_1} $(1\leqslant i_1\leqslant n, 1\leqslant j_1\leqslant m)$.

设 ρ 是 $t_{k_1}^{\lambda_1}$ 与 $r_{k_1}^{\lambda_2}$ 的 mgu(关于 $t_{k_1}^{\lambda_1}$ 和 $r_{k_1}^{\lambda_2}$ 的可合一性，下面证明). 于是可以证出 $\lambda \cdot \rho$ 是 $\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$ 的 mgu，其中 $\lambda \triangleq \lambda_1 \cup \lambda_2$.

设 η 是 $\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$ 的合一，则 η 既是 $\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i}\}$ 的合一，也是 $\{r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$ 的合一.

不妨设 η 的分母只有 x_{i_1} 和 y_{j_1} $(1\leqslant i_1\leqslant n, 1\leqslant j_1\leqslant m)$，将 η 中分母为 x_{i_1} 的元素组成的替

换记为η_1. η中分母为y_{j_1}的元素组成的替换记为η_2. 显然,η_1是$\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i}\}$的合一;$\eta_2$是$\{r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$的合一. 于是存在替换$\delta_1,\delta_1$,使得

$$\eta_1 \triangleq \lambda_1 \cdot \delta_1, \eta_2 \triangleq \lambda_2 \cdot \delta_2$$

由于η的分母中只有x_{i1},λ_1中只含变量符号x_{i1},所以δ_1的分母中也只有x_{i1};同理δ_2的分母中只有$y_{j_i}(1 \leqslant i_1 \leqslant n,\ 1 \leqslant j_1 \leqslant m)$. 于是易证得

$$(\lambda_1 \cup \lambda_2) \cdot (\delta_1 \cup \delta_2) \triangleq \lambda_1 \cdot \delta_1 \cup \lambda_2 \cdot \delta_2$$

令$\delta \triangleq \delta_1 \cup \delta_2$,于是

$$\eta \triangleq \eta_1 \cup \eta_2 \triangleq \lambda_1 \cdot \delta_1 \cup \lambda_2 \cdot \delta_2 \triangleq (\lambda_1 \cup \lambda_2)(\delta_1 \cup \delta_2) \triangleq \lambda \cdot \delta$$

因为$t_{k_1}^{\eta} \triangleq r_{l_1}^{\eta}$,所以$t_{k_1}^{\lambda \cdot \delta} \triangleq r_{l_1}^{\lambda \cdot \delta}$,亦即

$$(t_{k_1}^{(\lambda_1 \cup \lambda_2)})_{\delta} \triangleq (r_{l_1}^{(\lambda_1 \cup \lambda_2)})^{\delta}, (t_{k_1}^{\lambda_1})^{\delta} \triangleq (r_{l_1}^{\lambda_2})^{\delta}$$

于是δ是$t_{k_1}^{\lambda_1}$和$r_{l_1}^{\lambda_2}$的合一.(注:至此证明了:若η是$\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$的合一,则可找到$t_{k_1}^{\lambda_1}$与$r_{l_1}^{\lambda_2}$的合一$\delta$. 而$\theta \cdot \rho'$是$\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$的合一,所以$t_{k_1}^{\lambda_1}$与$r_{l_1}^{\lambda_2}$是可合一的. 于是前面令$\rho$是其mgu是合理的.)

因此,$\delta \triangleq \rho \cdot \psi$.

故$\eta \triangleq \lambda \cdot \delta \triangleq (\lambda \cdot \rho) \cdot \psi$. 而$\lambda \cdot \rho$是$\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$的合一是明显的,所以$\lambda \cdot \rho$是$\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$的mgu.

令$G \triangleq \Phi^{\lambda_1 \cdot \rho}(P^{\lambda_1 \cdot \rho}(s_1^{\lambda_2 \cdot \rho})) \vee \Psi^{\lambda_2 \cdot \rho}((r_1 = s_1)^{\lambda_2 \cdot \rho} = 0)$.

显然,G是从Ψ到Φ的广义有向调解式.

因为$\theta \cdot \rho'$是$\{t_{k_1},\cdots,t_{k_i},r_{l_1},\cdots,r_{l_j}\}$的合一,所以可设$\theta \cdot \rho' \triangleq (\lambda \cdot \rho) \cdot \zeta$. 于是有

$$G' \triangleq \Phi^{\theta\rho'}(P^{\theta\rho'}(s_1^{\theta\rho'})) \vee \Psi^{\theta\rho'}((r_1 = s_1)^{\theta\rho'} = 0)$$
$$\triangleq \Phi^{\lambda \cdot \rho \cdot \zeta}(P^{\lambda \cdot \rho \cdot \zeta}(s_1^{\lambda \cdot \rho \cdot \zeta})) \vee \Psi^{\lambda \cdot \rho \cdot \zeta}((r_1 = s_1)^{\lambda \cdot \rho \cdot \zeta} = 0).$$

因为Φ中在$\lambda \cdot \rho \cdot \zeta$下与$P(t_1)$可合一的所有原子为$P(t_{k_1}),\cdots,P(t_{k_i})$,且$\lambda \cdot \rho$可合一$P(t_{k_1}),\cdots,P(t_{k_i})$,故$\Phi$中在$\lambda \cdot \rho$下与$P(t_1)$可合一的原子就只有$P(t_{k_1}),\cdots,P(t_{k_i})$;同理,$\Psi$中在$\lambda \cdot \rho$下与$r_1 = s_1$可合一的原子也只有$r_{l_1} = s_{l_1},\cdots,r_{l_j} = s_{l_j}$.

因此$G' \triangleq (\Phi^{\lambda \cdot \rho}(P^{\lambda \cdot \rho}(s^{\lambda \cdot \rho})) \vee \Psi^{\lambda \cdot \rho}((r_1 = s_1)^{\lambda \cdot \rho} = 0))^{\zeta}$

$$\triangleq (\Phi^{\lambda_1 \cdot \rho}(P^{\lambda_1 \cdot \rho}(s^{\lambda_2 \cdot \rho})) \vee \Psi^{\lambda_2 \cdot \rho}((r_1 = s_1)^{\lambda_2 \cdot \rho} = 0))^{\zeta} \triangleq G^{\zeta}$$

亦即G'是G的例.

(2)在P中不存在项t_1,使得$t_1' = t_1^{\theta_1}$,而存在这样的变元t_1,使得$t_1^{\theta_1} \triangleq f_{n_h} \cdots f_1(t_1')$,其中$f_i(i = 1,\cdots,n_h)$为函数符号,可能为多元,但我们只关心$t_1'$,故采用此记法.

令$\mu \triangleq \{f_{n_h} \cdots f_1(t_1)/t_1\}$,则$\Phi^{\mu} \triangleq \Phi^{\mu}(P^{\mu}(f_{n_h} \cdots f_1(t_1))$

显然,Φ^{μ}为使用广义调解法从f_{n_h}始先后应用此n_h个函数自反公理到Φ所得到的Φ的一个例,记Φ^{μ}为Φ^{*}.

下面证明从Ψ'到Φ'的广义有向调解式G'是从Ψ到Φ^{*}的广义有向调解式G的例.

设ν为只将θ_1中的$f_{n_h} \cdots f_1(t_1')/t_1$换为$t_1'/t_1$所得替换. 显然$\theta_1 \triangleq \mu \cdot \nu$.

于是

$$G' \triangleq \Phi^{\theta_1\sigma'\rho'}(P^{\theta_1\sigma'\rho'}(s_1^{\theta_2\tau'\rho'})) \vee \Psi^{\theta_2\tau'\rho'}((r_1 = s_1)^{\theta_2\tau'\rho'} = 0)$$
$$\triangleq \Phi^{\mu\nu\sigma'\rho'}(P^{\mu\nu\sigma'\rho'}(s_1^{\theta_2\tau'\rho'})) \vee \Psi^{\theta_2\tau'\rho'}((r_1 = s_1)^{\theta_2\tau'\rho'} = 0)$$

$$\triangleq \Phi^{\mu\theta\rho'}(P^{\mu\theta\rho'}(s_1^{\theta\rho'})) \vee \Psi^{\theta\rho'}(((r_1=s_1)^{\theta\rho'}=0)$$

其中 $\theta \triangleq \nu\sigma' \cup \theta_2\tau'$.

与(1)同理可证 $\theta \cdot \rho' \triangleq (\lambda \cdot \rho) \cdot \zeta$，于是

$$G' \triangleq \Phi^{\mu\lambda\rho\zeta}(P^{\mu\lambda\rho\zeta}(s_1^{\lambda\rho\zeta})) \vee \Psi^{\lambda\rho\zeta}(((r_1=s_1)^{\lambda\rho\zeta}=0)$$

$$\triangleq (\Phi^{*\lambda\rho}(P^{*\lambda\rho}(s_1^{\lambda\rho})) \vee \Psi^{\lambda\rho}(((r_1=s_1)^{\lambda\rho}=0))^{\zeta}$$

$$\triangleq (\Phi^{*\lambda_1\rho}(P^{*\lambda_1\rho}(s_1^{\lambda_2\rho})) \vee \Psi^{\lambda_2\rho}(((r_1=s_1)^{\lambda_2\rho}=0))^{\zeta} \triangleq G^{\zeta}$$

亦即，G' 是 G 的例.　　证毕.

将上面证明中的广义有向调解改为广义对称调解，可得到广义对称调解的提升引理，由于证明思想相同，故略去.

3　广义 Horn 集上的广义输入归结和广义输入调解

定理 3.1. 设 S 是不可满足的广义 Horn 基子句集. 于是存在从 S 出发使用广义归结方法推出恒假广义基子句的广义输入演绎.

证 明：设 $S=\{\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_l\}$. 则 $\Phi_i(i=1,\cdots,l)$ 可通过等价变换化为若干个普通 Horn 基子句的合取式，不妨设：

$$\begin{cases} \Phi_0 \cong \Phi_{01} \wedge \cdots \wedge \Phi_{0m0} \\ \cdots\cdots \\ \Phi_l \cong \Phi_{l_1} \wedge \cdots \wedge \Phi_{lm_l} \end{cases}$$

将上面等价式组的右端分别记以 $\Phi_0^*,\cdots,\Phi_l^*$. 令

$$S^* = \{\Phi_0^*,\cdots,\Phi_l^*\} \qquad S' = \{\Phi_{01},\cdots,\Phi_{0m0},\cdots,\Phi_{l1},\cdots,\Phi_{lm_l}\}$$

显然，S' 是普通 Horn 基子句集，且不可满足，于是存在从 S' 出发使用普通归结方法推出零子句的输入演绎 D'(如图 1).

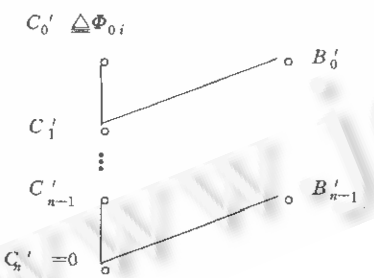

图1

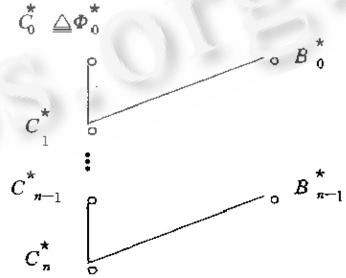

图2

设 D' 为 $C'_0,B'_0,\cdots,C'_{n-1},B'_{n-1},C'_n$，其中

(1) $C'_0=\Phi_{0i}(1\leqslant i\leqslant m_0)$，$C'_n$=零子句.

(2) $B'_i \in S'(i=0,\cdots,n-1)$.

(3) $C'_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 C'_{i-1} 与 B'_{i-1} 的归结式.

下面我们归纳定义对应于 D' 的广义 *Horn* 基子句序列 D^*：

$C_0^*,B_0^*,\cdots,C_{n-1}^*,B_{n-1}^*,C_n^*$(如图 2)，其中

(1) $C_0^*=\Phi_0^*$.

(2)若$B'_i=\Phi_{pq}$,则 $B_i^*=\Phi_p^*(i=0,\cdots,n-1,\ 0\leqslant p\leqslant l)$.

(3)假设 $C_i^*(1\leqslant i\leqslant h,\ h\leqslant n-1)$已经定义,则令

$$C_{i+1}^*=R(C_i^*,B_i^*)=C_i^*(A=0)\vee B_i^*(A=1).$$

显然,D^*是使用广义归结从 S^* 出发推出 C_n^* 的一个广义输入演绎.

下面用归纳法证明:对任意 $i(0\leqslant i\leqslant n)$有

$$C_i^*\cong C'_i\wedge H_i$$

其中 H_i 是一个合取范式

当 $i=0$ 时,$C_0^*=\Phi_0^*=\Phi_{01}\wedge\cdots\wedge\Phi_{0i}\wedge\cdots\wedge\Phi_{0m_0}=C'_0\wedge H_0$.

如果 $i\leqslant h$ 时,定理成立.

设 $i=h+1$.

$C_{h+1}^*=R(C_h^*,B_h^*)=C_h^*(A=0)\vee B_h^*(A=1)$. 其中如果$B'_h=\Phi_{pq}$,那么

$B_h^*=\Phi_p^*=B'_h\wedge G_h(0\leqslant p\leqslant l)$;又由归纳假设,$C_h^*\cong C'_h\wedge H_h$. 所以

$C_{h+1}^*\cong(C'_h\wedge H_h)(A=0)\vee(B'_h\wedge G_h)(A=1)$

$\cong(C'_h(A=0)\wedge H_h(A=0))\vee(B'_h(A=1)\wedge G_h(A=1))$

$\cong(C'_h(A=0)\vee B'_h(A=1))\wedge H_{h+1}\cong C'_{h+1}\wedge H_{h+1}$

归纳法完成.

因为 $C_n^*\cong C'_n\wedge H_n$,而$C'_n$ 是零子句,所以 C_n 是恒假广义基子句.

对于广义 Horn 子句集 S^* 与 S,与 D^* 等价的一个演绎 D,是一个使用广义归结从 S 出发推出广义子句 C 的广义输入演绎.

由引理 2.3 知,$C\cong C_n^*$,而只有恒假广义基子句才能与恒假广义基子句等价,故 C 一定是恒假广义基子句. 证毕.

定理 3.2. 设 S 是不可满足的广义 Horn 子句集. 于是存在从 S 出发使用广义归结方法推出恒假广义子句的广义输入演绎.

由 Herbrand 定理、广义归结的提升引理和定理 3.1 不难证明此定理,故略去.

定理 3.3. 设 S 是 E 不可满足的广义 Horn 基子句集,并且包含了 $x=x$ 的所有基例,于是,存在使用广义归结和广义对称调解从 S 出发推出恒假广义基子句的广义输入演绎.

证明:与定理 3.1 的证明类似,可取到对应于 S 的 S^* 和 S'.

因为S'是普通 Horn 基子句集,且 E 不可满足,由文献[2]中定理 4.1 知,存在从S'出发使用普通归结和对称调解方法推出零子句的输入演绎 D'.

设 D'为$C'_0,B'_0,\cdots,C'_{n-1},B'_{n-1},C'_n$,其中(1)$C'_0\triangleq\Phi_{0_i}(1\leqslant i\leqslant m)$,$C'_n\triangleq$零子句. (2)$B'_i\in S'(i=0,\cdots,n-1)$. (3)$C'_i(1\leqslant i\leqslant n)$为$C'_{i-1}$与$B'_{i-1}$的归结式或对称调解式.

下面我们归纳定义对应于 D'的广义 Horn 基子句序列

$D^*:C_0^*,B_0^*,\cdots,C_{n-1}^*,B_{n-1}^*,C_n^*$,其中(1)$C_0^*\triangleq\Phi_0^*$. (2)若$B'_i\triangleq\Phi_{pq}$,则 $B_i^*\triangleq\Phi_p^*(i=0,\cdots,n-1,\ 0\leqslant p\leqslant l)$. (3)假设 $C_i^*(1\leqslant i\leqslant h,\ h\leqslant n-1)$已经定义.

若 $C'_{i+1}\triangleq R(C'_i,B'_i)$,则令 $C_{i+1}^*\triangleq R(C_i^*,B_i^*)\triangleq C_i^*(A=0)\vee B_i^*(A=1)$.

若 $C'_{i+1}\triangleq SP(C'_i,B'_i)$,则令 $C_{i+1}^*\triangleq SP(C_i^*,B_i^*)$.

显然 D^*是使用广义归结和广义对称调解从 S^* 出发推出 C_n^* 的一个广义输入演绎.

下面用归纳法证明：对任意 $i(0\leqslant i\leqslant n)$ 有

$$C_i^* \cong C'_i \wedge H_i$$

其中 H_i 是一个合取范式.

当 $i=0$ 时，$C_0^* \triangleq \Phi_0^* \triangleq C'_0 \wedge H_0$.

如果 $i\leqslant h$ 时，定理成立.

设 $i=h+1$.

若 $C_{h+1}^* \triangleq R(C_h^*, B_h^*)$，则可证得 $C_{h+1}^* \cong C'_{h+1} \wedge H_{h+1}$(可参见定理 3.1 中的证明).

若 $C_{h+1}^* \triangleq SP(C_h^*, B_h^*)$. 由归纳假设有 $C_h^* C_h' \wedge H_h$，如果 $B_h' \triangleq \Phi_{pq}$，那么

$$B_h^* \triangleq \Phi_p^* \triangleq B_h' \wedge G_h(0 \leqslant p \leqslant l).$$

不妨设 C'_h 形如 $C'_h(P(t))$；B'_h 形如 $B'_h((t=s))$（另一种情形的证明与此类似）. 则 $C'_{h+1} \triangleq C_h'(P(s)) \vee B_h'((t=s)=0)$

于是

$$\begin{aligned} C_{h+1}^* &\triangleq SP(C_h^*, B_h^*) \cong SP(C_h' \wedge H_h, B_h' \wedge G_h) \\ &\cong (C_h' \wedge H_h)(P(s)) \vee (B_h' \wedge G_h)((t=s)=0) \\ &\cong (C_h'(P(s)) \wedge H_h(P(s)) \vee (B_h'((t=s)=0) \wedge G_h((t=s)=0)) \\ &\cong C_{h+1}' \wedge H_{h+1} \end{aligned}$$

归纳法完成.

因为 $C_n^* \cong C_n \wedge H_n$，而 C'_n 是零子句，所以 C_n^* 是恒假广义基子句.

对于广义 Horn 子句集 S_* 与 S，与 D^* 等价的一个演绎 D，是一个使用广义归结和广义对称调解从 S 出发推出广义子句 C 的广义输入演绎. 由引理 2.3 知，$C \cong C_n^*$，故 C 一定是恒假广义基子句. 证毕.

定理 3.4. 设 S 是 E 不可满足的广义 Horn 子句集，并且包含了 $x=x$ 和 S 的函数自反公理. 于是，存在使用广义归结和广义对称调解从 S 出发推出恒假广义子句的广义输入演绎.

由文献[5]中定理 8.2、定理 3.3、广义归结的提升引理、广义对称调解的提升引理不难证得此定理，故略去.

4 结论

我们已经证明了广义输入归结和广义输入对称调解的结合对于 *Horn* 子句集是完备的. 我们使用文献[3]中的定理 1，类似于本文定理 3.3、3.4 的证明，不难得到：对于具有基合流性质的 E 不可满足广义 Horn 子句集，使用广义归结和广义有向调解的广义输入演绎是完备的.

Murray 在文献[6]中给出了公式中原子极性的概念，使用原子极性的概念，可以更自然的定义广义 Horn 子句，例如，可以如此定义：若广义子句 Φ 中最多含有一个正极性原子 P，则称 Φ 为广义 Horn 子句.

容易证明：如此定义的广义 Horn 子句是本文给出的广义 Horn 子句的特例.

但是，在进行机器实现时，按照原子极性定义的广义 Horn 子句，更容易进行机器检差.

而且本文的所有结果,对于这种广义 Horn 子句集也是成立的.

参考文献

1 Henschen L, Wos L. Unit refutations and horn sets. J. ACM, 1974,**21**(4):590—605.

2 欧阳丹彤,孙吉贵,刘叙华. 输入调解法和单元调解法在 Horn 集上的完备性,软件学报,1993,**4**(1):6—11.

3 欧阳丹彤,刘叙华. Horn 集上的有向调解法,吉林大学自然科学学报,1992,(4):38—42.

4 刘叙华,姜云飞. 定理机器证明. 北京:科学出版社,1987.

5 Chang C L, Lee R C T. Symbolic logic and mechanical theorem proving. Academic Press, 1973.

6 Murray N V. Completely NC—resolution. Artificial Intelligence, 1982,**18**(1):67—85.

GENERALIZED HORN SETS

Liu Xuhua Ouyang Dantong

(*Department of Computer Science, Jilin University, Changchun* 130023)

Abstract In this paper, the concept of generalized Horn sets is defined, the completeness of generalized input resolution, the completeness of generalized input symmetric paramodulation, and the completeness of generalized input directed paramodulation under some conditions are proved on generalized Horn sets. The lifting lemma of generalized paramodulation is also given.

Key words Generalized resolution, generalized symmetric paramodulation, generalized directed paramodulation, generalized Horn set.