第5卷第12期
1994年12月
软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE
Vol.5, No.12
Dec. 1994

利用关联矩阵的秩判断 Petri 网的公平性*

王培良 蒋昌俊

(山东矿业学院,泰安 271019)

摘要 本文对有界 Petri 网的公平性与分组公平性以及无界 Petri 网的公平性分别得到了利用关联矩阵的秩进行判断的一组充要条件,这些条件使用起来是非常方便的.

关键词 Petri 网,公平性,秩,矩阵.

众所周知,Petri 网的公平性是 Petri 网理论中一类十分重要的性质,它反映了系统的无饥饿性.自从文献[1]提出 Petri 网的公平性(或公平网)的概念之后,寻求简单适用的公平网的代数判据一直为人们所努力,文献[2]首先得到了一个结构有界 Petri 网为公平网的充要条件,文献[3]证明了文献[2]中的必要条件对一般 Petri 网也是成立的.文献[4]给出一种化简的方法,即将一般 Petri 网化简为结构有界的 Petri 网进行处理,从而使得一般 Petri 网的公平性判断归结为结构有界 Petri 网的公平性判断.文献[5]在文献[4]的基础上,扬弃了化简过程,从而给出一种基于线性不等式组的直接判定条件.本文通过进一步深入研究,得到一组基于关联矩阵秩的 Petri 网公平性的代数判据,并对结构有界的分组公平网也得到类似的结果.

1 定义及有关结论[1-5]

定义 1. 对给定的标识 Petri 网(N,M_0),称变迁 t_i,t_j 处于公平关系当且仅当:$\exists\ k>0$, $\forall\ M\in R(M_0),\forall\ \beta\in T^*:M(\beta>\wedge\ \#(t_i/\beta)=0\rightarrow\#(t_j/\beta)<k,i,j\in\{1,2\},i\neq j$.

定义 2. 称网 N 为公平网当且仅当对$\forall\ M_0$,在(N,M_0)中,$\forall\ t_i,t_j\in T,t_i,t_j$ 都处于公平关系.

定理 1. 结构有界网 N 是公平网的充要条件是:若存在非负整数的非零向量 X,使得 $CX\geqslant 0$,则 $X>0$(C 是 N 的关联矩阵).

注:上面向量 $X>0$ 意旨 X 的每个分量均大于零,以下皆同.

定理 2. 设 Petri 网 $N=(S,T;F)$,记 $S_1=\{s\mid s\in S\wedge s$ 是结构有界的$\}$,$F_1=F\cap((S_1\times T)\cup(T\times S_1))$,令 $N_1=(S_1,T;F_1)$,则 N 是公平网当且仅当 N_1 是公平网.

定理 3. 设 Petri 网 $N=(S,T;F)$,$|S|=m$,$|T|=n$,C 是 N 的关联矩阵,则 N 为公平

* 本文1992-08-26收到,1992-12-24定稿

本文是国家自然科学基金资助课题.作者王培良,52岁,教授,主要研究领域为 Petri 网的理论及应用.蒋昌俊,32岁,副教授,主要研究领域为算法研究,Petri 网理论及其应用,DEDS 理论及其在 CIMS 中的应用等.

本文通讯联系人:蒋昌俊,北京 100080,中国科学院自动化研究所九部

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

网的充要条件是：

(1) 任意 n 维非负非零整数向量 X，若满足条件 $CX\geqslant 0$，则 $X>0$.

(2) 任意两个 n 维非负非零整数向量 X_1 和 X_2，若满足 $CX_i\geqslant 0, i=1,2$，则 X_1 和 X_2 线性相关.

2　有界 Petri 网的公平性判断

命题 1. 设 N 为结构有界的可重复网，则 N 为公平网的充要条件是 N 的关联矩阵的秩为 $n-1$，其中 $n=|T|$.

证明：必要性：

因为 N 为结构有界的可重复网，则由文献[6]的命题 6 可知 N 有 T—不变量，又因 N 为公平网，则由文献[3]的定理 2 的推论 2 可知 N 的关联矩阵的秩为 $n-1$.

充分性：

因为 N 是结构有界的可重复网，则由文献[6]的命题 6 可知，网 N 是相容的，故 $\exists\, X_0>0$，使得 $CX_0=0$.

因为 N 的关联矩阵的秩为 $n-1$，则方程组：$CX=0$ 的基础解系只有一个解向量. 不妨取 X_0 作为它的基础解系. 由于 $X_0>0$，所以方程组：$CX=0$ 的非零解向量的各分量都不为零. 设 M_0 为 N 的任意一个初始标识，在状态图 $RMG(N,M_0)$ 中的任意有向回路 B 上(若不存在有向回路，显然 (N,M_0) 是公平的)任取 M_0'，则 $\exists\ \beta\in T^*$，有 $M_0'(\beta>M_0'$，设 β 的发射数向量为 X，则 $X=kX_0$，$(k>0)$，因为 X_0 的每个分量不为零，则 X 的每个分量也都不为零. 从而在 $RMG(N,M_0)$ 中，任意有向回路 B 上，$\forall\ t\in T$，都有边 $e\in B$，且 t 是 e 上的旁标. 由文献[6]的命题 5 可知 (N,M_0) 是公平 Petri 网，从而 N 是公平网.

例 1：[7]图 1 是结构有界网，它的关联矩阵为：

$$C_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

可求出 $X_0=(1\quad 1\quad 2\quad 1\quad 1)^T$，有 $C_1X_0=0$，所以此网是相容的. 由于 C_1 的秩 $r_{c1}=3<n-1$，因此该网不是公平网.

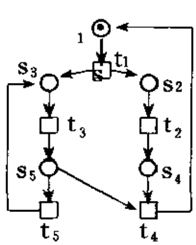

图1

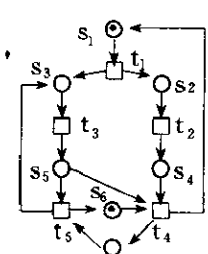

图2

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

图 2 是在图 1 中引入正则回路所得到的网，它的关联矩阵为：

$$C_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

此网显然也是相容网，由于它的关联矩阵 C_2 的秩 $r_{c2}=4=n-1$，所以此网为公平网.

3　无界 Petri 网的公平性判断

命题 2. 设 N 是无界可重复网，则 N 是公平网的必要条件是 N 的关联矩阵的秩 $r_c=n$.

证明：设 N 是公平网，C 是它的关联矩阵. 则由文献[5]的引理 1 知：

N 有最小可重复向量 X_0，设 $Y_0=CX_0$，Y_0 中等于零的分量对应着 N 的结构有界位置，而大于零的分量对应着 N 中结构无界的位置. 把这些结构无界的位置连同它们所关联的弧从 N 中删去，便得到 N 的一个子网 N_1，

$$N_1=(S_1,T;F_1)$$

其中 $S_1=\{s|s\in S\wedge s$ 在 N 中是结构有界的$\}$，$F_1=F\cap((S_1\times T)\cup(T\times S_1))$. 则 N_1 是结构有界的可重复网，记 N_1 的关联矩阵为 C_1.

由于 N 是公平网，则 N_1 也是公平网，从而 $r_{c1}=n-1$，因此 $r_c\geqslant n-1$.

C 的 n 个列向量一定是线性无关的，若不然，则存在至少有一个分量为正的整数向量 X，使得 $CX=0$，从而 $C_1X=0$，又由于 N_1 是结构有界的可重复网，并且是公平的，所以 $X>0$，这样 N 就有界了，与已知条件矛盾，从而 C 的 n 个列向量线性无关，故 $r_c=n$.

命题 3. 设 $N=(S,T;F)$是无界可重复网，记 $S_1=\{s|s\in S\wedge s$ 是结构有界的$\}$，$F_1=F\cap((S_1\times T)\cup(T\times S_1))$，令 $N_1=(S_1,T;F_1)$，则 N 是公平网的充要条件是 N_1 的关联矩阵 C_1与 N 的关联矩阵 C 中不属于 C_1 的任一行所形成的 C_1 的增广矩阵 C_2 的秩 $r_{c2}=n$.

证明：必要性：

设 N 为公平网，X_0 为 N 的最小可重复向量，则 C_2 的 n 个列向量必线性无关. 若线性相关的话，则存在整数向量 X_1(X_1 至少有一个分量为正整数)，使得 $C_2X_1=0$，则 $C_1X_1=0$，因为 N_1 是结构有界的公平网，所以 $X_1>0$，则 $X_1=kX_0$，$k>0$，有 $kC_1X_0=0$，也即 $kCX_0\geqslant 0$，则不属于 C_1 的任何一行与 kX_0 乘积大于零，与前面等于零矛盾，则 $r_{c2}=n$.

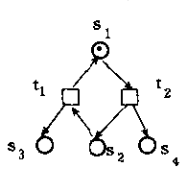

图3

充分性：

若 $r_{c2}=n$，则 $r_{c1}=n-1$，从而 N_1 是公平网，因此 N 也是公平网.

例 2：图 3 是一个无界网，其中 s_3、s_4 是结构无界的.

取 $S_1=\{s_1,s_2\}\subset S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$，$F_1=\{(t_1,s_1),(t_2,s_2),(s_1,t_2),(s_2,t_1)\}$，则网 N_1 是网 N 的子网，并且是结构有界的. N_1 的关联矩阵为：

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

C 是网 N 的关联矩阵：
$$C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

那么 C_1 的增广矩阵 C_2 为 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

容易求得秩 $r_{c2}=2=n$，由命题 3 知网 N 是公平网.

4 分组公平网的判断

给定一个标识 Petri 网(N,M_0)，设 T_1 和 T_2 为 N 中的变迁集的两个子集. $T_1\cap T_2=\varnothing$，令

$$\sum\nolimits_i=\{\sigma\mid\#(t/\sigma)=0,t\in T_i\}\qquad i=1,2$$

如果存在一个正整数 k，使

$$\mathrm{Max}\{\#(t/\sigma),\sigma\in\sum\nolimits_1 \text{而 } t\in T_2\}\leqslant k$$

且
$$\mathrm{Max}\{\#(t/\sigma),\sigma\in\sum\nolimits_2 \text{而 } t\in T_1\}\leqslant k$$

则称 T_1 和 T_2 处于一个公平关系.

定义 3.[3]给定一个网 N，和对 N 的变迁集 T 的一个划分

$$T=\bigcup_{i=1}^{k}T_i,T_i\cup T_j=\varnothing\qquad 当\ i\neq j$$

如果对于 N 的任意初始标识 M_0，每一对变迁集 T_i 和 T_j 都处于公平关系，则称 N 是关于这个划分的分组公平网.

定义 4. 设网 N 是关于变迁集 T 的一个划分 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 的分组公平网，若关于 T 的任何划分 $T_1',T_2',\cdots,T_l'$，使得 $l<k$，网 N 都不是关于划分 $T_1',T_2',\cdots,T_l'$ 的分组公平网，则称 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 是网 N 的一个极小分组公平划分，称 k 是极小公平组数.

定义 5.[2]设 X 为网 N 的一个 T—不变量，称 $\|X\|=\{t_i\mid t_i\in T \text{ 且 } X(i)>0\}$ 为 X 的一个支柱. 若 $\|X\|$ 的任何真子集都不是 N 的另一个 T—不变量的支柱，则称 $\|X\|$ 为 N 上 T—不变量的一个极小支柱. 记 $\rho(X)$ 为 $\|X\|$ 中 t_i 的个数.

定义 6.[2]设 X 为 N 的一个 T—不变量，若不存在 X'，使得(1)$CX'=0$，(2)$X'\leqslant X$，(3)$\|X\|=\|X'\|$，则称 X 为网 N 的立于支柱 $\|X\|$ 上的极小 T—不变量(简称为 N 的一个极小 T—不变量).

定理 4.[2]立于一个极小支柱上的极小 T—不变量是唯一的.

命题 4. 一个分组公平网 N 最多有$[n/k]$个极小 T—不变量，其中 k 是 N 的极小公平组数.

证明：设网 N 可能有的极小支柱为 $\|X_1\|,\|X_2\|,\cdots,\|X_q\|$，且 $\rho(X_1)\leqslant\rho(X_2)\leqslant\cdots\leqslant\rho(X_q)$.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

由于
$$\bigcup_{i=1}^{q} \| X_i \| \subseteq T,$$
也即
$$\sum_{i=1}^{q} \rho(X_i) \leqslant n, (n = |T|)$$
即
$$q \cdot \rho(X_1) \leqslant n$$
所以
$$q \leqslant \frac{n}{\rho(X_1)}$$
又因划分 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 中每个 T_i 至少含有 $\| X_1 \|$ 中一个元素,因而:
$$q \leqslant \frac{n}{k}$$
也即
$$q \leqslant [\frac{n}{k}]$$
又根据定理 4 知立于每个 $\| X_i \|$ $(i=1\sim q)$ 上的极小 T—不变量是唯一的,故网 N 最多有 $[n/k]$ 个极小 T—不变量.

进一步不难得到:

命题 5. 结构有界的网 N 是关于极小分组公平划分 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 的分组公平网的充分条件是 N 的关联矩阵的秩为 $n-[n/k]$,其中 $n=|T|$,k 为极小公平组数.

例 3:图 4 所示的网 N 不是公平网,因为它是结构有界的可重复网,同时其关联矩阵

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

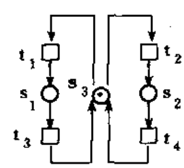

图4

$r_c = 2 < n-1$.

但是该网是关于极小公平划分 $\{\{t_1, t_2\}, \{t_3, t_4\}\}$ 的分组公平网.这是因为 $r_c = 2 = n-[n/k]$,这里 $n=4, k=2$.

参考文献

1 Wu Zhehui, Tadao Murata. Fair Petri nets and weighted synchronic distance. Proc. of the 26th Midiwest Symposium on CAS, Pueble, Mexico, August 1983:129—133.

2 Tadao Murata, Wu Zhehui. Fair relation and modified synchronic distances in a Petri net. Journal of the Franklin Institute, August 1985, **320(2)**:63—82.

3 吴哲辉, Murata T. Petri 网在分布控制的并行系统公平性问题中的应用. 北京第一届国际计算机应用会议论文集(中文版). 中国电子学会计算机学会, 1984:140—151.

4 吴哲辉, 王培良. 公平网的一个充分必要条件. 科学通报, 1990(**16**):1211—1213.

5 王培良, 吴哲辉. 公平网的一组直接判断条件. 计算机学报, 1993(**1**):53—58.

6 吴哲辉. 有界 Petri 网的活性和公平性的分析与实现. 计算机学报, 1989(**4**):267—278.

7 陆维明. 论活网中冻结标志的意义. 中国科学(A辑), 1988(**7**).

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

USE OF RANK OF INCIDENCE MATRIX FOR JUDGEMENT FAIRNESS OF PETRI NETS

Wang Peiliang and Jiang Changjun

(*Shandong Mining College*, *Tai'an* 271019)

Abstract This paper investigates a group of necessary and sufficient conditions for judgement fairness and grouping fairness of bounded Petri nets and fairness of unbounded Petri nets using the rank of incidence matrix. These conditions are very convenient for use.

Key words Petri net, fairness, rank, matrix.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn