Grzegorczyk 分层的一种延伸*

郑锡忠 钱磊

(南京大学，南京 210008) (南京航空学院，南京 210016)

摘要 本文讨论某些递归函数类的分层问题. 首先给出的是原始的 Gorzegorczyk 分层的一种较为简单的等价定义. 然后，作为对 Ackermann 函数的一种推广，定义了一个递归函数序列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$. 并以此作为分层函数列定义了一种新的递归分层 $\{Z_n\}_{n\in\omega}$(即 Z－分层)，这种分层涉及了比原始递归函数类更大的一个递归函数类. 实际上，原始递归函数类仅是 Z－分层的第一层 Z_0. 而且这种分层的任意的第 n+1 层都含有前面一层的通用函数. 最后还定义了 Z－分层的一种加细 $\{Z_n^i\}_{n,i\in\omega}$，使得 $\{Z_n^i\}_{i\in\omega}$ 构成 Z_n 的一种合理分层，并且在 Z_0 上的加细 $\{Z_0^i\}_{i\in\omega}$ 刚好就是原始的 Grzegorczyk 分层. 这表明 Z－分层及其加细确为 Grzegorczyk 分层的自然延伸.

关键词 分层，Grzegorczyk 分层，Z－分层.

在递归论中，分层方法是研究递归函数特别是原始递归函数的一种重要手段. Grzegorczyk 在[2]中所作的对原始递归函数的分层就是运用分层方法最为成功的一个例子. 他的这种分层(在文献中称为 Grzegorczyk 分层，或简称 G－分层)也成了递归论中一个重要的研究内容，并且到目前为止还有不少与之相关的未解决问题被大量地讨论着[3,10]. 另一方面，许多人也在致力于对 G－分层进行各种形式的改进或推广[10]. 特别地，人们希望把这种分层延伸到原始递归函数之外的函数类上去. M. H. Löb 和 S. S. Wainer 在[4－6]中给出了一种延伸的方法. 但是，他们的分层依赖于超穷序数概念. 并且分层函数列的定义基于对极限序数所作的基础序列指派. 这样一来，他们的分层便显得缺乏能行性. 在文[11]中. 本文第一作者利用对 Ackermann 函数的推广，定义了一种新的分层方法作为对 G－分层的延伸，并且这种分层不用到超穷序数的概念. 本文则将对这种分层作进一步的改进并进行更为广泛和系统的讨论. 在第 1 节中，我们首先给出 G－分层的一种等价定义方法，其中所用的分层函数列中都是一元函数，从而这种定义比以往 G－分层定义都简单并且它还在第 5 节中得到应用. 第 2 节中定义了一列函数 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 作为对 Ackermann 函数的推广，且讨论了它的一些基本性质. 以这个函数列作为分层函数列，在第 3 节中定义了一种新分层(Z－分层). 它所涉及到的函数类要比原始递归函数类大得多. 第 3 节还详细证明了这种分层不会“塌方”. 在第 4 节中则进一步证明了 Z_{n+1} 层中含有前面一层 Z_n 的通用函数. 最后，在第 5 节

* 本文 1991 年 7 月 22 日收到，1991 年 12 月 21 日定稿

本文是国家自然科学基金资助项目. 作者**郑锡忠**，35 岁，副教授，主要研究领域为递归论和计算复杂性理论. **钱磊**，30 岁，讲师，主要研究领域为递归论和计算复杂性理论.

本文通讯联系人：郑锡忠，南京 210008，南京大学数学系

中定义了Z—分层的一种加细方法,即对每一层 Z_n 作进一步的分层 $\{Z_n^i\}_{i\in\omega}$. 并且使 $\{Z_0^i\}_{i\in\omega}$ 刚好为G—分层.

本文的概念和记号可参见[1,7]. 这里特别要提到的是. <,>和K,L为原始递归的配对函数组并约定 Kx≤x & Lx≤x. ep(x,y)表示在y的质因子分解中第x个质数 P_x 上的指数. ep为原始递归函数. 此外,在不致引起混淆的情况下. 常常把f(x)说成函数f本身.

1 原始G—分层的等价定义

在[2]中,A. Grzegorczyk首先定义了一个函数列 $\{G_n\}_{n\in\omega}$. (称为分层函数列)如下.

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
G_0(x,y)=y+1 & (1)\\
G_1(x,y)=x+y & (2)\\
G_2(x,y)=(x+1)(y+1) & (3)\\
G_{n+3}(0,y)=G_{n+2}(y+1,y+1) & (4)\\
G_{n+3}(x+1,y)=G_{n+3}(x,G_{n+3}(x,y)) & (5)
\end{cases}
$$

然后,定义G分层 $\{\varepsilon^n\}_{n\in\omega}$ 中第 n 层 ε^n 为包含后继函数 Sx,零函数 Ox,投影函数 $I_{mn}(x_1,\cdots,x_m)$(这三种函数统称为本原函数)和 $G_n(x,y)$ 并关于复合及受限原始递归运算封闭的最小函数类. 根据R. W. Ritchie[8]的工作,ε^n 定义中的函数 G_n 可由如下定义的Ackermann型函数 f_n 来替代:

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
f_0(x,y)=x+1 & (6)\\
f_{n+1}(0,y)=y & (7)\\
f_{n+1}(x+1,y)=f_n(f_{n+1}(x,y),y) & (8)
\end{cases}
$$

值得指出的是,$f_1(x,y)=x+y$,$f_2(x,y)=(x+1)y$,因此这里的 $\{f_n\}_{n\in\omega}$ 与Ritchie[8]中定义不完全一致,但 ε^n 的定义显然等价,不论是Grzegorczyk原来的定义还是Ritchie给出的等价定义,G—分层的分层函数列都是二元的. 下面我们给出一种由一元分层函数列而得的G—分层定义.

定义1.1. 一元函数列 $\{E_n\}_{n\in\omega}$ 定义如下

$$
(\mathrm{III})\begin{cases}
E_0(x)=x+2 & (9)\\
E_{n+1}(0)=E_n(1) & (10)\\
E_{n+1}(x+1)=E_nE_{n+1}(x)N^2(n\dot{-}1)+(E_{n+1}(x)+E_n(x))N(n\dot{-}1) & (11)
\end{cases}
$$

其中 $xN0=x$, $xN(y+1)=0$; $x\dot{-}y=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$.

命题1.2. 对任何 n 和 x,下列各式成立

(1) $E_n(x)\geq x+2$

(2) $E_n(x+1) \geqslant E_n(x)$

(3) $E_{n+1} \geqslant E_n(x)$

(4) $E_{n-1}(x) \geqslant E_n(x+1)$

(5) $n \neq 1$ 时，$E_n^t(x) \leqslant E_{n+1}(t+x)$

其中 $E_n^0(x)=x$ & $E_n^{t+1}(x)=E_nE_n^t(x)$.

定义 1.3. 对任何 n，δ^n 为含本原函数及 E_n 并关于复合和受限原始递归运算封闭的最小函数类.

命题 1.4. (1) $\forall\ m \leqslant n(E_m \in \delta^n)$

(2) 对任何 $f \in \delta^n$，且 $n \neq 1$ 存在常数 m 使 $f(x_1,\cdots,x_k) \leqslant E_n^m(max(x_1,\cdots,x_k))$

(3) 如果 $f \in \delta^n$ & $n \neq 1$，则 $f^y \in \delta^{n+1}$.

(4) 如果 $f \in \delta^1$，则 $f^y \in \delta^3$.

其中 f^y 表示 f 关于其某一变元的 y 次迭代.

由命题 1.4 立即可得 $\{\delta^n\}_{n\in\omega}$ 关于原始递归函数类 PR 的分层定理. 不仅如此，我们还有

定理 1.5. $n(\delta^n=\varepsilon^n)$

证明：关于 n 归纳，对 n＝0，1，2 显见，对 n≥2 现设 $\delta^n=\varepsilon^n$，从而 $E_n \in \varepsilon^n$ & $f_n \in \delta^n$. 为证 $\delta^{n+1}=\varepsilon^{n-1}$，只要证明下列两个引理即可.

引理 1.6. $\forall\ n \geqslant 2(E_{n+1}(x) \leqslant f_{n+1}(x,E_n(1)))$.

证明：关于 n≥2 归纳证明.

引理 1.7. 如果 $f_n \in \delta^n$，则存在 m 使 $f_{n+1}(x,y) \leqslant E_{n+1}((x+1)m+max(x,y))$.

证明：$n=1$ 显见，对 $n \neq 1$，设 $f_n \in \delta^n$，则依命题 1.4 的(2)存在 m 使

$f_n(x,y) \leqslant E_n^m(max(x,y))$. 从而关于 x 归纳可以证明 $f_{n+1}(x,y) \leqslant E_n^{m\cdot x}(max(x,y))$，再依命题 1.2 的(5)即得 $f_{n+1}(x,y) \leqslant E_{n+1}((x+1)\cdot m+max(x,y))$.

2　Ackermann 函数的一种推广

现对上节定义的 Ackermann 型函数列 $\{E_n\}_{n\in\omega}$ 再作推广，定义一个增长更快的函数列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$.

定义 2.1. 二元函数列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 定义如下

$$
\text{(IV)}\begin{cases}
A_0(x,y)=y+2 & (12)\\
A_{n+1}(0,y)=A_n(y,y) & (13)\\
A_{n+1}(x+1,0)=A_{n+1}(x,1) & (14)\\
A_{n+1}(x+1,y+1)=A_{n+1}(x,A_{n-1}(x+1,y))N^2(n+(x\dot{-}1)) & \\
\qquad +(A_{n+1}(x+1,y)+A_{n-1}(x,y))N(x\dot{-}1)Nn & (15)
\end{cases}
$$

易见 $A_1(n,x)=E_n(x)$.

命题 2.1. 对 $n \geqslant 1$，下列诸式成立.

(1)$A_n(x,y)\geqslant y+2$

(2)$A_n(x,y+1)>A_n(x,y)$

(3)$A_n(x+1,x+1)>A_n(x,x)$

(4)$A_n(x+1,y)\geqslant A_n(x,y+1)$

(5)$A_n(x+1,y)\geqslant A_n(x,y)$

证明:关于 $n\geqslant 1$ 取立归纳证明(1)—(5)即可

命题 2.2. 对任何 n,下列诸式成立

(1)$A_{n+1}(1,y)\geqslant 2y$

(2)$A_n(x,y)\leqslant A_{n+1}(x,y)$

(3)$A_{n+1}(a,y)+A_{n+1}(b,y)\leqslant A_{n+1}(2\cdot 3^a\cdot 5^b,y)$

(4)对 $n>0$,$A_{n+1}^t(x,y)\leqslant A_{n+1}(x+1,y+t)$

其中 $A_{n+1}^0(x,y)=y$,$A_{n+1}^{t+1}(x,y)=A_{n+1}(x,A_{n+1}^t(x,y))$

证明:(3)分三种情形.

(i)当 $a=b=0$ 时,关于 y 归纳

$A_{n+1}(2\cdot 3^a\cdot 5^b,0)=A_{n+1}(2,0)\geqslant A_{n+1}(0,2)\geqslant 4=A_{n+1}(a,0)+A_{n+1}(b,0)$

$A_{n+1}(2\cdot 3^a\cdot 5^b,y+1)=A_{n+1}(1,A_{n+1}(2,y))\geqslant 2A_{n+1}(2,y)$

$\geqslant 2A_{n+1}(1,y+1)\geqslant A_{n+1}(a,y+1)+A_{n+1}(b,y_{n+1})$

(ii)$a\geqslant b$ & $a=a'+1$,则有

$A_{n+1}(2\cdot 3^a\cdot 5^b,y)\geqslant A_{n+1}(a'+3,y)\geqslant A_{n+1}(a'+2,y+1)$

$=A_{n+1}(a'+1,A_{n+1}(a'+2,y))\geqslant 2A_{n+1}(a'+2,y)\geqslant A_{n+1}(a,y)+A_{n+1}(b,y)$

(iii)$b>a$ 时类似于(ii)

3 G—分层的延伸

G—分层仅仅处理了原始递归函数,为了克服这种局限性,我们在本节将介绍一种新的分层方法,它所处理的函数类比原始递归函数类要大得多.实际上,原始递归函数类仅是这种新分层的第一层.

定义 3.1. 对任何 n,定义 Z_n 为包含本原函数及 A_n 并关于复合和原始递归封闭的最小函数类.函数类序列$\{Z_n\}_{n\in\omega}$称为 Z 分层.

定义 3.2. $A_n(x,y)$的计算步数是指在其计算过程中运用(IV)中方程的次数,$A_n(x,y)$的计算步数以 $C_n(x,y)$表示.

不难看出,$C_n(x,y)$关于 x,y 都是递增的.

引理 3.3. $\forall n,x,y(C_n(x,y)\leqslant H_n(x,y))$,其中 H_n 满足

$$(\mathrm{V})\begin{cases}H_n(0,y)=1 & (16)\\ H_n(x+1,y)=(2y+3)H_n(x,A_n(x+1,y)) & (18)\end{cases}$$

证明:关于 x 归纳证明,x=0 显然,为了证明 $C_n(x+1,y)\leqslant H_n(x+1,y)$,(不妨设n≥1)

再对 y 归纳:

$C_n(x+1,0)=C_n(x,1)+1$ (依(14)式)

$\leqslant C_n(x-1,A_n(x,0))+C_n(x,0)+2$ (依(15)式)

$\leqslant 3C_n(x,A_n(x+1,0))$

$\leqslant 3H_n(x,A_n(x+1,0)$ (关于 x 归纳假设)

$=H_n(x+1,0)$

$C_n(x+1,y+1)\leqslant C_n(x,A_n(x+1,y))+C_n(x+1,y)+1$ (依(15)式)

$\leqslant H_n(x,A_n(x+1,y))+H_n(x+1,y)+1$ (归纳假设)

$=H_n(x,A_n(x+1,y))+(2y+3)H_n(x,A_n(x+1,y))+1$ (依(17)式)

$\leqslant(2(y+1)+3)H_n(x,A_n(x+1,y))=H_n(x+1,y+1)$.

注意到 H_n 是由参数变异的原始递归式所定义的,因此,H_n 是原始递归于 A_n 的,从而 $H_n\in Z_n$. 由此可以得到

推论 3.4. Z_n 中任何函数的计算步数都被 Z_n 中某个函数所限.

由于通常所谓的次递归函数是指其计算步数可以被更简单的函数所限. 因此,Z_n 中的函数可以称为拟次递归函数.

引理 3.5. $\forall m\leqslant n(A_m\in Z_n)$

证明:关于 $m\leqslant n$ 归纳证明. m=0 显见,现设 m+1⩽n 且 $A_m\in Z_n$ 要证 $A_{m+1}\in Z_n$. 令

$d_n(x,y)=A_n^{H_n(x,y)}(x,y)$(关于第二变元迭代)

$$\theta(x,y,i,j)=\begin{cases}1 & \text{如果 } i\leqslant x\ \&\ j\leqslant d_n(x,y)\ \&\ A_{m+1}(i,j-1)\leqslant d_n(x,y)\\ 0 & \text{此外}\end{cases}$$

易见 如 $A_{m+1}(i,j)$ 在计算 $A_{m+1}(x,y)$ 时用到,则 $\theta(x,y,i,j)=1$ 再令

$$\varphi_{m+1}(x,y)=\prod_{\substack{i\leqslant x\\ j\leqslant d_n(x,y)}} P_{<i,j>}^{A_{m+1}(i,j)\cdot\theta(x,y,i,j)}$$

则易见

$$\varphi_{m+1}(x,y)\leqslant\prod_{\substack{i\leqslant x\\ j\leqslant d_n(x,y)}} P_{<i,j>}^{A_{m+1}(i,j)}=\psi_n(x,y)$$

而且 $\psi_n\in Z_n$.

另一方面,由于 $PR\subseteq Z_n$,故受限 μ 算子在 Z_n 中均封闭,因此,φ_{m+1} 可以在 Z_n 中定义,即 $\varphi_{m+1}(x,y)$,为满足下列条件之最小的 z:

(1)$z\leqslant\psi_n(x,y)$

(2)对任何 $i\leqslant x,j\leqslant d_n(x,y)$ 满足下列四条

(2.1)$ep(<0,j>,z)=A_m(j)$

(2.2)如果 $i+1\leqslant x$,则有

$ep(<i+1,0>,z)=ep(<i,1>,z)$

(2.3)如果 $i+1\leqslant x$,并且 $ep(<i+1,j>,z)\leqslant d_n(x,y)$ & $(i\neq 1$ 或 $m\neq 0)$

则 $ep(<i+1,j+1>,z)=ep(<i,ep(i+1,j>,z)>,z)$

(2.4)如果 $i+1\leqslant x$ & $i=1$ & $m=0$ 则

$ep(<i+1,j+1>,z)=ep(<i+1,j>,z)+ep(<i,j>,z)$

上述诸条件均可在 Z_n 中表示，故 $\varphi_{m-1}\in Z_n$. 另外，$A_{m+1}(x,y)=ep(<x,y>,\varphi_{m+1}(x,y))$. 从而 $A_{m+1}\in Z_n$.

引理 3.6. 对任何 n，如果 $f\in Z_n$，则存在 c 使

$$f(x_1,\cdots,x_k)\leqslant A_{n+1}(c,max(x_1,\cdots,x_k))$$

证明：关于 f 的定义过程归纳即可.

定理 3.6. 对任何 n，$Z_n\subset Z_{n+1}$.

证明：$Z_n\subseteq Z_{n+1}$ 由引理 3.4 知，而引理 3.5 则保证了 $A_{n+1}\notin Z_n$，从而 $Z_n\neq Z_{n+1}$.

由此可见，$\{Z_n\}_{n\in\omega}$ 为一种合理的分层.

4 Z—分层的通用函数

现在我们来讨论 Z—分层中每一层 Z_n 的通用函数问题. 首先由于 $PR\subseteq Z_n$，Z_n 中总有配对函数组 $<,>$，K，L. 因此，我们只要讨论 Z_n 中全体一元函数组成之类 $Z_n^{(1)}$ 的通用函数便足够了. 另一方面，R. M. Robinson[9] 证明了 $Z_0^{(1)}$ 可由后继函数 S 及平方剩余函数 $e(e(x)=x-[\sqrt{x}]^2)$ 经加法. 复合及下列原始复迭式所生成：

$$(\mathrm{VI})\begin{cases}f(0)=0\\ f(x+1)=h(f(x))\end{cases}$$

此时 f 记为 $J(h)$. 作为推论我们立即有

命题 4.1. 对任何 n，$Z_n^{(1)}$ 可由 S，e 及 A_n^1 出发经加法、复合和原始复迭运算(VI)所生成，其中，$A_n^1(x)=A_n(Kx,Lx)$.

由此，我们可以给出 $Z_n^{(1)}$ 的一种编码方案如下，其中 $N(f)$ 表示 f 的码.

$$(\mathrm{VII})\begin{cases}N(s)=1\\ N(e)=3\\ N(A_n^1)=2n+5\\ N(f+g)=2\cdot 3^{N(f)}\cdot 5^{N(g)}\\ N(f\circ g)=4\cdot 3^{N(f)}\cdot 5^{N(g)}\\ N(J(h))=8\cdot 3^{N(h)}\end{cases}$$

此外，对(VII)中编码时没有用到的数作适当的约定，便可得到 $Z_n^{(1)}$ 的一种通用函数

定理 4.1. 如下所定义的二元数 u_n 为 $Z_n^{(1)}$ 的通用函数.

$$(\mathrm{VIII})\begin{cases}u_n(0,x)=0\\ u_n(y+1,x)=\begin{cases}u_n(ep(1,y+1),x)+u_n(ep(2,y+1),x) & \text{若 } ep(0,y+1)=1\\ u_n(ep(1,y+1),u_n(ep(2,y+1),x)) & \text{若 } ep(0,y+1)=2\\ 0 & \text{若 } x=0\ \&\ ep(0,y+1)=3\\ u_n(ep(1,y+1),u_n(y+1,x-1)) & \text{若 } x\neq 0\ \&\ ep(0,y+1)=3\\ x+1 & \text{若 } y+1=1\\ x-[\sqrt{x}]^2 & \text{若 } y+1=3\\ A^n(Kx,Lx) & \text{若 } y+1=2n+5\\ 0 & \text{此外}\end{cases}\end{cases}$$

现在讨论通用函数的性质.

引理 4.2. 对任何 $n, u_n(y,x) \leqslant A_{n+1}(y,x)$.

证明：运用命题 2 关于 y 进行强归纳证明即可.

定义 4.3. $u_n(y,x)$的计算步数为其计算过程中运用(Ⅷ)中方程的次数并用 $D_n(y,x)$ 表示.

引理 4.4. 对任何 $n, D_n(y,x) \leqslant H_{n+1}(y,x)$，其中 H_{n+1} 由(V)所定义.

证明：关于 y 进行强归纳证明即可.

现在我们将证明 $u_n \in Z_{n+1}$ 为此先令

$d_n(y,x) = A_{n+1}^{H_{n+1}(y,x)}(y,x)$(关于第二变元迭代)

$$\eta_n(y,x,i,j) = \begin{cases} 1 & \text{若 } i \leqslant y \ \& \ j \leqslant d_n(y,x) \ \& \\ & (ep(0,i)=2 \to u_n(ep(2,i),j) \leqslant d_n(y,x)) \ \& \\ & (ep(0,i)=3 \& j \neq 0 \to u_n(ep(1,i),j-1) \leqslant d_n(y,x)) \\ 0 & \text{此外} \end{cases}$$

引理 4.5. 如果在用(Ⅷ)计算 $u_n(y,x)$时用到 $u_n(i,j)$，则 $\eta_n(y,x;i,j)=1$.

证明：由于 $u_n(y,x) \leqslant A_{n+1}(y,x)$ 及 $D_n(y,x) \leqslant H_{n+1}(y,x)$，因此，如果 $u_n(i,j)$被用到，则 $i \leqslant y \& j \leqslant d_n(y,x)$余显见.

定理 4.6. 对任何 $n, u_n \in Z_{n+1}$.

证明：令

$$\psi_n(y,x) = \prod_{\substack{i \leqslant y \\ j \leqslant d_n(y,x)}} P_{\langle i,j \rangle}^{u_n(i,j) \cdot \eta_n(y,x,i,j)} \qquad \varphi_n(y,x) = \prod_{\substack{i \leqslant y \\ j \leqslant d_n(y,x)}} P_{\langle i,j \rangle}^{A_{n+1}(i,j)}$$

则 $\psi_n(y,x) \leqslant \varphi_n(y,x) \& \varphi_n \in Z_{n+1}$，由于 Z_{n+1}关于受限 μ—运算封闭，我们可以在 Z_{n+1}中定义 ψ_n，即 $\psi_n(y,x)$为满中下列条件的最小 z：

(1)$z \leqslant \varphi_n(y,x)$

(2)对任何 $i \leqslant y, j \leqslant d_n(y,x)$有下列五式成立

(2.1)对任何 $j, ep(\langle 0,j \rangle, z) = 0$

(2.2)若 $i \neq 0 \& ep(0,i) \neq 1,2,3$ 则

$ep(\langle i,j \rangle, z) = (j+1)N(i-1) + (j - [\sqrt{j}]^2 N(i-3) + A_n(Kj,Lj)N(i-(2j+5))$

(2.3)若 $ep(0,i)=1$，则

$ep(\langle i,j \rangle, z) = ep(\langle ep(1,i), j \rangle, z) + ep(\langle ep(2,i), j \rangle, z)$

(2.4)若 $ep(0,i)=2$ 则

$ep(\langle i,j \rangle, z) = ep(\langle ep(1,i), ep(\langle ep(2,i), j \rangle, z) \rangle, z)$

(2.5)若 $ep(0,i)=3$ 则

$ep(\langle i,j \rangle, z) = ep(\langle ep(1,i), ep(\langle i, j-1 \rangle, z) \rangle, z) N^2 j$

不难看出上述诸条件都在 Z_{n+1} 中可表出，从而 $\psi_n \in Z_{n+1}$ 因此，$u_n(y,x) = ep(\langle y,x \rangle, \psi_n(y,x))$亦然.

推论 4.7. Z_{n+1}中含有 Z_n 的通用函数.

5 Z—分层的加细

从前面的讨论我们已经看到,Z—分层所涉及的函数类 $Z=\bigcup_{n\in\omega}Z_n$ 远比 G—分层所处理的函数类 PR 要大,但由于 Z—分层使用了不受限的原始递归式,因此 Z—分层要此 G—分层"粗"一些. 这一节,我们将对 Z—分层定义一种很自然的加细方法,使之具有与 G—分层相当的粗细. 并且我们还保证了在 Z_0 上加细的结果恰好为原始的 G—分层. 从而 Z—分层及其加细确是 G—分层的一种自然延伸.

定义 5.1. (1)对任何,n,i,令 $A_{n,i}(x)=A_n(i,x)$

(2)对任何,n,i 令 Z_n^i 为含有本原函数及 $A_{n+1,i}$,并关于复合和受限原始递归运算封闭的最小函数类.

$\{Z_n^i\}_{n\in\omega}$称为加细的 Z—分层. Z_n^i 为其第 $n\cdot\omega+i$ 层. 现在就讨论这种加细的 Z—分层的性质.

引理 5.2. $\forall\, i\leqslant j(A_{n+1,i}\in Z_n^j)$

证明:n=0 时由命题 1.4 的(1)得,现设 n>0. 首先由命题 2.2 知,对 $i\leqslant j$,$A_{n+1,i}(x)\leqslant A_{n+1,j}(x)$. 并对 $i+1\leqslant j$ 都有

$$\begin{cases}A_{n+1,i+1}(0)=A_{n+1,i}(1)\\A_{n+1,i+1}(x+1)=A_{n+1,i}(A_{n+1,i+1}(x))\\A_{n+1,i+1}(x)\leqslant A_{n+1,j}(x)\end{cases}$$

从而可知,$A_{n+1,0}$,$A_{n+1,1}$,$\cdots$,$A_{n+1,j-1}$均可在 Z_n^j 中用受限原始递归式逐步定义出来,故 $A_{n+1,i}\in Z_n^j(i\leqslant j)$.

引理 5.3. 对 $n\geqslant 1$,如果 $f\in Z_n^i$,则有 m 使

$$f(x_1,\cdots,x_k)\leqslant A_{n+1,i}^m(max(x_1,\cdots,x_k))$$

证明:关于 f 的定义过程归纳证明.

引理 5.4. 对 $n\geqslant 1$,若 $f\in Z_n^i$,则 $f^t\in Z_n^{i+1}$,其中 $f^0(\vec{x},y)=y$ 并且 $f^{t+1}(\vec{x},y)=f(\vec{x},f^t(\vec{x},y))$.

证明:设 $f\in Z_n^i$,依引理 5.3,有 m 使

$$f(\vec{x},y)\leqslant A_{n+1,i}^m(max(\vec{x},y))$$

关于 t 归纳有:$f^t(\vec{x},y)\leqslant A_{n+1,i}^{m\cdot t}(max(\vec{x},y))$从而依命题 2.2 的(4)即得 $f^t(\vec{x},y)\leqslant A_{n+1,i+1}(m\cdot t+max(\vec{x},y))$. 从而可知 $f^t(\vec{x},y)$可在 Z_n^{i+1} 中由受限原始递归所定义.

推论 5.5. 如果 $g,h\in Z_n^i$,f 由下列原始递归式所定义

$$(\mathrm{IX})\begin{cases}f(\vec{x},0)=g(\vec{x})\\ f(\vec{x},y+1)=h(\vec{x},y,f(\vec{x},y))\end{cases}$$

则 $f\in Z_n^{i+1}$.

证明:只要注意到原始递归式(IX)可化归为原始复迭式即可.

定理 5.6. (1)$\forall\, i(Z_0^i=\varepsilon^i)$

(2)$\forall\, n\forall\, i(Z_n^i\subset Z_n^{i+1})\ \&\ \bigcup_{i\in\omega}Z_n^i=Z_n$

(3)$\forall\, n(Z_n\subseteq Z_{n+1}^0)$

证明:(2)$Z_n^i\subset Z_n^{i+1}$ 由引理 5.2 得,由命题 2.2 及引理 5.3 知 $A_{n+1,i+1}\notin Z_n^i$,故 $Z_n^i\neq Z_n^{i+1}$. 此外,由引理 5.2 的证明知 $A_{n+1,i}$ 都可以在 Z_n 中用原始递归式定义(因为 $A_{n+1,0}(x)=A_n(x,x)$). 故 $Z_n^i\subseteq Z_n$ 从而 $\bigcup_{i\in\omega}Z_n^i\subseteq Z_n$. 同时由推论 5.5 知 $\bigcup_{i\in\omega}Z_n^i$ 关于复合及原始递归运算封闭,故 $\bigcup_{i\in\omega}Z_n^i\supseteq Zn$. 从而 $\bigcup_{i\in\omega}Z_n^i=Z_n$

(3)由于 $A_{n,i}(x)\leqslant A_n(x+i,x+i)=A_{n+1,0}(x+i)$,故关于 i 归纳不难证明 $\forall\, i(A_{n+1,i}\in Z_{n+1}^0)$,从而 $Z_n=\bigcup_{i\in\omega}Z_n^i\subseteq Z_{n+1}^0$.

另一方面,$A_{n+2,0}(x)=A_{n+1}(x,x)$ 故 $A_{n+2,0}\notin Z_n$ 故 $Z_n\neq Z_{n+1}^0$. 综上得 $Z_n\subset Z_{n+1}^0$.

参考文献

1 张鸣华. 可计算性理论. 北京:清华大学出版社,1984.

2 Grzegorczyk A. Some classes of recursive functions. Rozprawy Mate, 1953(**IV**):1—45.

3 Kutylowski M. Small Grzegorzcek classes. J. London Math. Soc. ,1987;**36**(**2**):193—210.

4 L ob M H, Wainer S S. Hierarchies of number—theoretic functions(Part I). Arch. Math. Logik, 1970(**13**):39—51.

5 Anon. Hierarchies of number—theoretic functions. Arch. Math. Logik, 1970(**13**):97—113.

6 Anon. Hierarchies of number—theoretic functions. Correction, Arch. Math. Logik ,1970(**13**):198—199.

7 莫绍揆. 递归论. 北京:科学出版社,1987.

8 Ritchie R W. Classes of recursive functions based on Ackermann's function. Pacific J. Math. ,1965(**15**):1027—1044.

9 Robinson R M. Primitive recursive functions. Bull. of AMS. ,1947(**53**):925—942.

10 Rose H E. Subrecursion:functions and hierarchies. Oxford Logic Guides 9, Oxford University Press, 1984.

11 郑锡忠. 一类次递归函数的分层. 理论计算机科学 91 学术年会论文集,1991:77—82.

AN EXTENSION OF Grzegorczyk's HIERARCHY

Zheng Xizhong

(*Nanjing University*, *Nanjing* 210008)

Qian Lei

(*Nanjing Aeronautical Insititute*, *Naijing* 210016)

Abstract This paper discusses the hierarchies of some classes of recursive functions. A simple equivalent definition of original Grzegorczyk's hierarchy is presented at first. Then the authors define by the generalization of Ackermann's function a sequence of recursive functions $\{A_n\}_{n\in\omega}$, based on which they define hierarchy, $\{Z_n\}_{n\in\omega}$(the Z-hierarchy) of a class of recursive functions which is much larger than the class of primitive recursive functions. The first level Z_0 of this hierarchy is just the class of primitive recursive functions. For all n, Z_{n+1} contains the universal function of its predecessor Z_n. A refinement $\{Z_n^i\}_{n,i\in\omega}$ of Z-hierarchy is defined at last by the natural hierarchy of each Z_n. The refinement on Z_0 is same as the original Grzegorczyk's hierarchy. This shows that their Z-hierarchy and its refinement are really a natural extension of Grzegorczyk's hierarchy.

Key words Hierarchy, Grzegorczyk's hierarchy, Z-hierarchy.