

# 一种带二次等式约束的卡尔曼滤波目标跟踪算法\*

曹亚陆<sup>1</sup>, 杨乐<sup>1</sup>, 刘全胜<sup>2</sup>, 彭力<sup>1</sup>, 郭福成<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

<sup>2</sup>(无锡职业技术学院 物联网技术学院, 江苏 无锡 214122)

<sup>3</sup>(国防科学技术大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

通讯作者: 杨乐, E-mail: le.yang.le@gmail.com

**摘要:** 目标跟踪是无线传感器网络的重要应用之一. 研究目标运动轨迹满足一个二次等式约束(quadratic equality constraint)的目标跟踪问题. 在实际应用中, 当飞行器进行盘旋或者车辆沿弯道行使时, 其轨迹均近似满足一个二次等式约束. 考虑在卡尔曼滤波(Kalman filtering, 简称 KF)算法中引入二次等式约束以提高目标跟踪精度. 所提出的算法在每个采样时刻首先利用新获取的观测量和无约束卡尔曼滤波算法更新目标运动状态估计, 然后利用带二次等式约束的极大似然估计(maximum likelihood estimator, 简称 MLE)修正目标运动状态估计. 在求解约束极大似然问题时, 将其看作一类广义信赖域子问题(generalized trust region sub-problem, 简称 GTRS), 以获得全局最优解. 仿真结果表明, 该算法与现有带二次等式约束的卡尔曼滤波算法相比具有更高的跟踪精度.

**关键词:** 无线传感器网络; 目标跟踪; 卡尔曼滤波; 二次等式约束; 广义信赖域子问题

中文引用格式: 曹亚陆, 杨乐, 刘全胜, 彭力, 郭福成. 一种带二次等式约束的卡尔曼滤波目标跟踪算法. 软件学报, 2013, 24(Suppl. (1)): 24-32. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13004.htm>

英文引用格式: Cao YL, Yang L, Liu QS, Peng L, Guo FC. Target tracking algorithm based on Kalman filtering with quadratic equality constraints. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2013, 24(Suppl. (1)): 24-32 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13004.htm>

## Target Tracking Algorithm Based on Kalman Filtering with Quadratic Equality Constraints

CAO Ya-Lu<sup>1</sup>, YANG Le<sup>1</sup>, LIU Quan-Sheng<sup>2</sup>, PENG Li<sup>1</sup>, GUO Fu-Cheng<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

<sup>2</sup>(School of Internet of Things Technology, Wuxi Institute of Technology, Wuxi 214122, China)

<sup>3</sup>(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Corresponding author: YANG Le, E-mail: le.yang.le@gmail.com

**Abstract:** Target tracking is one of the essential applications of the wireless sensor network. This paper considers the scenario where the target motion trajectory satisfies a quadratic equality constraint. In practice, when an aircraft hovers or a ground vehicle travels along a curve, its trajectory can be represented approximately as a quadratic function. This study applies quadratic constraints in the well-known Kalman filter (KF) to improve its performance in target tracking. The proposed algorithm first utilizes newly obtained positioning measurements and the unconstrained KF to produce an updated state estimation and then refines it using a maximum likelihood estimator (MLE) with quadratic equality constraints. When solving the constrained MLE problem, this paper formulates it as a generalized trust region sub-problem (GTRS) in order to obtain its globally optimal solution. Simulation results show that the proposed algorithm outperforms previously developed nonlinear KF algorithms with quadratic equality constraints in terms of enhanced target tracking accuracy.

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61304264, 61305017); 江苏省自然科学基金(BK20130154); 江苏省产学研联合创新资金项目(BY2013015-33)

收稿时间: 2013-05-02; 定稿时间: 2013-08-22

**Key words:** wireless sensor network; target tracking; Kalman filtering; quadratic equality constraint; generalized trust region sub-problem

无线传感器网络(wireless sensor network,简称 WSN)由部署在待监测区域中、能感知多种信息的传感器节点组成.因其成本低、自组织、分布式、健壮性和实时性强、易于扩展等特点,WSN 已被广泛应用在国防军事、环境监测、城市管理、医疗卫生、空间探索和抢险救灾等多个领域<sup>[1,2]</sup>.

跟踪运动目标是 WSN 的主要应用之一.WSN 通过测量目标信号参数并融合以获得目标运动轨迹估计.本文将研究基于卡尔曼滤波(Kalman filtering,简称 KF)算法的目标跟踪.卡尔曼滤波算法是递归的,适于计算机实现.它包含预测与校正两个部分:预测部分利用过程方程(process equation)获得目标运动状态当前时刻的预测值,校正部分基于测量方程(measurement equation)修正待估计状态的预测值以获得其估计值.对于过程噪声和观测噪声均为加性高斯白噪声的线性动态系统,KF 滤波能给出状态变量的最小均方差(minimum mean square error,简称 MMSE)估计<sup>[3]</sup>.

近年来,约束卡尔曼滤波(constrained Kalman filtering)在故障诊断<sup>[4]</sup>、机器人控制<sup>[5]</sup>、基于机器视觉的多人跟踪<sup>[6]</sup>以及导航<sup>[7]</sup>等不同领域受到了广泛的重视.在实际 WSN 目标跟踪中,我们通常可以获得一些关于目标运动的先验信息.例如,当汽车行驶在一条已知的道路时,汽车的行驶轨迹将受到道路线形的约束.另外,当利用卫星跟踪一个在地球表面移动的目标时,我们可以近似地认为该目标处于以地心为圆心、半径已知的球面上.如何在卡尔曼滤波算法中利用这些先验的约束信息,以有效提高目标跟踪精度是本文关注的问题.

有关约束卡尔曼滤波算法的综述可参见文献[8].具体而言,对于线性等式约束,常见的方法有模型降维法(model reduction)<sup>[9]</sup>、增加测量方程法(perfect measurement)<sup>[10]</sup>、概率密度函数截断法(probability density function truncation)<sup>[11]</sup>以及投影法.其中,投影法包括估计值投影法(estimate projection)<sup>[12]</sup>、滤波增益投影法(gain projection)<sup>[13]</sup>和系统投影法(system projection)<sup>[14]</sup>等.估计值投影法将无约束卡尔曼滤波器的状态估计值投影到约束面;滤波增益投影法是将卡尔曼滤波器的增益进行投影以使其状态估计满足等式约束;系统投影法是对过程噪声的进行约束,再通过修正卡尔曼方程进行滤波.Simon 和 Chia 在文献[15]中从理论上证明,对于线形等式约束下的线性动态系统,估计值投影法能给出状态变量的 MMSE 估计.

对于非线性等式约束,可以利用一阶泰勒级数将非线性等式约束近似为线性等式约束进行处理,这类似于扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filtering,简称 EKF)的基本思想.该方法的缺点在于估计精度不高,尤其约束条件包含较强非线性时误差较大.为了降低线性化的影响,平滑约束卡尔曼滤波(smoothly constrained Kalman filter,简称 SCKF)<sup>[16]</sup>将非线性等式约束看作测量方程,并采用迭代卡尔曼滤波(iterated Kalman filtering,简称 IKF)的思想多次使用等式约束的一阶线性逼近更新状态估计,提高了滤波性能.文献[17]中提出了时域滑动估计法(moving horizon estimation,简称 MHE).它通过求解带非线性等式约束的优化问题实现动态系统(如运动目标)的状态估计.因求解优化问题的计算量较大,且对非线性状态估计问题,算法的全局收敛性不能保证,限制了 MHE 的应用.Teixeira 等人将非线性等式约束与无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter,简称 UKF)相结合<sup>[18,19]</sup>,提出了投影无迹卡尔曼滤波(projected unscented Kalman filter,简称 PUKF)、等式约束无迹卡尔曼滤波(equality-constrained unscented Kalman filter,简称 ECUKF)以及改善测量方程无迹卡尔曼滤波(measurement-augmentation unscented Kalman filter,简称 MAUKF)这 3 种算法,并将其应用非线性状态估计中.

在各种不同形式的非线性约束中,二次约束是较为常见的.Yang 和 Blasch 提出了融合二次等式约束的卡尔曼滤波算法<sup>[20]</sup>.它利用了文献[15]中估计值投影法的基本思想,通过求解一个带二次等式约束的极大似然估计(maximum likelihood estimation,简称 MLE)问题将无约束的卡尔曼滤波结果投影到二次等式约束给定的曲面上.该算法基于迭代法求解拉格朗日算子以获得极大似然估计问题的解,但是,若迭代的初值选择远离真实值,则算法不易收敛到全局最优解,降低了算法的精度.

本文提出一种带二次等式约束的卡尔曼滤波算法,可用于 WSN 目标跟踪.与文献[20]相似的是,它也利用文献[15]提出的投影法的基本思想,通过求解一个带二次等式约束的 MLE 问题完成状态估计的更新.为保证求解过程的全局收敛性,本文提出将带二次等式约束的极大似然估计问题看作一类广义信赖域子问题(GTRS),然后

应用二分法(bisection search)求解.该方法具有全局收敛的优点.计算机仿真结果表明,若与 UKF 相结合,则本文提出的算法在目标跟踪精度上优于文献[20]的方法和文献[18,19]中提出的 PUKF,ECUKF 和 MAUKF 算法.

本文第 1 节简要回顾几种常用的带非线性等式约束的卡尔曼滤波算法,包括文献[18,19]的 PUKF,ECUKF 和 MAUKF 方法以及文献[20]的投影法.第 2 节给出一种带二次等式约束的卡尔曼滤波算法.第 3 节给出计算机仿真结果.第 4 节是本文的结论.

## 1 相关工作

考虑一个含加性过程噪声和测量噪声的离散时间非线性动态系统.其状态方程和测量方程分别是

$$\boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (1-a)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_k) + \mathbf{w}_k \quad (1-b)$$

其中,  $\boldsymbol{\theta}_k$  是  $k$  时刻待估计的状态矢量,  $\mathbf{z}_k$  是  $k$  时刻的观测量,  $\mathbf{v}_k$  和  $\mathbf{w}_k$  分别是过程噪声和测量噪声.  $\mathbf{F}(\cdot)$  和  $\mathbf{H}(\cdot)$  分别是已知的状态转移函数和观测函数.

若利用 UKF 实现状态估计,则每次迭代需首先选取  $2n+1$  个 Sigma 点(Sigma point)  $\boldsymbol{\chi}_{k-1} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \pm \sqrt{(n+u)(\mathbf{P}_{k-1})^{1/2}}]$  和相应的权重  $W_0^{(m)} = \frac{u}{n+u}$ ,  $W_0^{(c)} = \frac{u}{n+u} + (1-\alpha^2 + \beta)$ ,  $W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n+u)}$ ,  $i=1, \dots, 2n$ . 其中,  $n$  是系统状态矢量  $\boldsymbol{\theta}_k$  的维数,  $(\cdot)^{1/2}$  代表矩阵的 Cholesky 分解,  $0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 0$ ,  $u = (a^2 - 1)n$ .  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k-1}$  分别是  $\boldsymbol{\theta}_{k-1}$  的估计值和对应的协方差矩阵. UKF 采用如下步骤实现状态预测<sup>[21]</sup>:

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1,i} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\chi}_{k-1,i}), \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (2-a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{k|k-1,i}, \quad \mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\chi}_{k|k-1,i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^-] [\boldsymbol{\chi}_{k|k-1,i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^-]^T + \mathbf{Q}_v \quad (2-b)$$

UKF 的状态估计由下式给出<sup>[21]</sup>:

$$\mathbf{z}_{k|k-1,i} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1,i}), \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (3-a)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathbf{z}_{k|k-1,i}, \quad \mathbf{P}_k^{zz} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathbf{z}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{z}}_k^-] [\mathbf{z}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{z}}_k^-]^T + \mathbf{Q}_w \quad (3-b)$$

$$\mathbf{P}_k^{\theta z} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\chi}_{k|k-1,i} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^-] [\mathbf{z}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{z}}_k^-]^T \quad (3-c)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{\theta z} (\mathbf{P}_k^{zz})^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^-), \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k^{zz} \mathbf{K}_k^T \quad (3-d)$$

在式(2)、(3)中,  $\boldsymbol{\chi}_{k-1,i}$  表示矩阵  $\boldsymbol{\chi}_{k-1}$  的第  $i$  列,即第  $i$  个 Sigma 点.  $\mathbf{Q}_v$  和  $\mathbf{Q}_w$  分别是过程和观测噪声的协方差矩阵.

下面我们给出当待状态矢量  $\boldsymbol{\theta}_k$  满足一个非线性等式约束  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{b}$  时的 4 种常用状态估计算法,即文献[18,19]提出的 PUKF,ECUKF,MAUKF 和文献[20]提出的估计量投影法.

### 1.1 投影无迹卡尔曼滤波(PUKF)

PUKF 的基本思想在于首先利用无约束 UKF 算法求得当前状态的估计  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ , 然后将等式约束  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{b}$  看作状态矢量  $\boldsymbol{\theta}_k$  的测量方程,再次利用 UKF 滤波算法修正  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  并输出.算法的流程如下:选择  $2n+1$  个 Sigma 点  $\boldsymbol{\chi}_k = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_k \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \pm \sqrt{(n+u)(\mathbf{P}_k)^{1/2}}]$ ,其权重与 UKF 滤波算法的选择一致;然后利用下式实现对  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  的更新:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^b = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{b} - \mathbf{b}_k^-) \quad (4)$$

值得指出的是,PUKF 的输出  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^b$  仅近似满足等式约束  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{b}$ . 其下一时刻 UKF 滤波的输入仍为无约束 UKF 滤波的结果  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  和  $\mathbf{P}_k$ . PUKF 并不计算  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^b$  的协方差矩阵.

### 1.2 等式约束无迹卡尔曼滤波(ECUKF)

ECUKF 与 PUKF 的区别在于,它在使用式(4)完成状态估计修正后,利用下式计算  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^b$  的协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_k^b = \mathbf{P}_k - \mathbf{K}_k^b \mathbf{P}_k^{bb} (\mathbf{K}_k^b)^T \quad (5)$$

ECUFK 将  $\hat{\theta}_k^b$  和  $\mathbf{P}_k^b$  作为下一时刻 UKF 的输入,以期利用等式约束提高滤波的收敛速度和性能。

### 1.3 改善测量方程无迹卡尔曼滤波(MAUKF)

MAUKF 用非线性等式约束  $\mathbf{g}(\theta_k) = \mathbf{b}$  将标准 UKF 的测量方程(1-b)增强为

$$\tilde{z}_k = \tilde{\mathbf{H}}(\theta_k) + \tilde{\mathbf{w}}_k \quad (6)$$

其中,  $\tilde{z}_k = \begin{bmatrix} z_k \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}(\theta_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\theta_k) \\ \mathbf{g}(\theta_k) \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_k$  的协方差矩阵为  $\tilde{\mathbf{Q}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_w & \mathbf{0}_{m \times s} \\ \mathbf{0}_{s \times m} & \mathbf{0}_{s \times s} \end{bmatrix}$ . 用  $\tilde{z}_k, \tilde{\mathbf{H}}(\theta_k), \tilde{\mathbf{Q}}_w$  替代式(2)和式(3)中的  $z_k, \mathbf{H}(\theta_k), \mathbf{Q}_w$  即可获得改善测量方程无迹卡尔曼滤波算法。

### 1.4 估计量投影法

文献[20]提出的估计量投影法假定  $\mathbf{g}(\theta_k) = \mathbf{b}$  是  $\theta_k$  的一个二次函数  $\theta_k^T \mathbf{M} \theta_k + \mathbf{m}^T \theta_k + \theta_k^T \mathbf{m} - b = 0$ . 它求解如下带约束的极大似然估计问题将无约束卡尔曼滤波的状态估计投影到约束曲面上并输出:

$$\theta_k^b = \arg \min_{\theta_k} (\theta_k - \hat{\theta}_k)^T \boldsymbol{\Omega}_k (\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k^T \mathbf{M} \theta_k + \mathbf{m}^T \theta_k + \theta_k^T \mathbf{m} - b = 0 \quad (7)$$

其中,  $\boldsymbol{\Omega}_k = \mathbf{P}_k^{-1}$ ,  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{m}$  是已知的对称矩阵和列矢量。

下面给出式(7)的求解过程. 为表述简便,我们省略了代表当前时刻的符号  $k$ . 首先,利用 Cholesky 分解将  $\boldsymbol{\Omega}$  表示为  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ , 其中,  $\mathbf{B}$  为可逆的上三角矩阵. 引入定义  $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{B} \hat{\theta}$ , 则式(7)所示问题的拉格朗日函数(Lagrangian)为

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \lambda) = (\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{B} \boldsymbol{\theta})^T (\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}) + \lambda [\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{m}^T \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{m} - b] \quad (8)$$

其中,  $\lambda$  是拉格朗日算子(Lagrangian multiplier). 上式的右边分别对  $\boldsymbol{\theta}$  和  $\lambda$  求偏导并令结果为 0 可得:

$$-\mathbf{B}^T \boldsymbol{\zeta} + \lambda \mathbf{m} + (\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \lambda \mathbf{M}) \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (9-a)$$

$$\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{m}^T \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{m} - b = 0 \quad (9-b)$$

若  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \lambda \mathbf{M}$  可逆,则利用式(9-a)可得:

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \lambda \mathbf{M})^{-1} (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\zeta} - \lambda \mathbf{m}) \quad (10)$$

将式(10)代入式(9-b)可获得关于拉格朗日算子  $\lambda$  的高次方程.  $\lambda$  的求解过程如下:若  $\mathbf{M}$  至少半正定,则我们可将其分解为  $\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ . 因  $\mathbf{B}$  可逆,我们可将  $\mathbf{L} \mathbf{B}^{-1}$  做奇异值分解(singular value decomposition,简称 SVD):  $\mathbf{L} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$ . 其中,  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  是正交矩阵,  $\boldsymbol{\Sigma}$  是对角矩阵,其对角元素为  $\sigma_i$ . 将上式代入式(10),把结果再代入式(9-b)可获得关于  $\lambda$  的方程<sup>[20]</sup>:

$$y(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{n_i^2(\lambda) \sigma_i^2}{(1 + \lambda \sigma_i^2)^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{n_i(\lambda) t_i}{1 + \lambda \sigma_i^2} - b = 0 \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{n}(\lambda) = [n_1(\lambda), \dots, n_n(\lambda)]^T = \mathbf{V}^T (\mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\zeta} - \lambda \mathbf{m})$ ,  $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_n]^T = \mathbf{V}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{m}$ . 使用牛顿迭代法<sup>[22]</sup>求解式(11)的根,把得到的  $\lambda$  带回式(10)即可得到式(7)的解,也是估计量投影法的输出。

因式(11)不是凸函数,因此使用迭代法求根可能出现以下两种情况:迭代可能不收敛,即两次迭代结果的差异一直较大;或迭代局部收敛,即将迭代结果带入式(10)后获得的状态矢量不是带约束的极大似然估计子(式(8))全局的最优解. 为避免上述问题的出现,要求迭代初值靠近  $\lambda$  的最优值. 但在实际应用中,良好的初值选择往往是难以获得的。

## 2 一种带二次等式约束的目标跟踪算法

本节针对文献[20]的估计量投影算法不能保证全局收敛的问题,提出一种求解带等式约束的极大似然估计问题的方法,以此作为构建新的带二次等式约束的卡尔曼目标跟踪算法的基础. 该算法的主要思想是将式(7)看作一类广义信赖域子问题(GTRS)<sup>[23,24]</sup>,以保证获得全局最优解。

利用正定矩阵的 Cholesky 分解,我们有  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ . 将其带入式(7)并引入  $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{B} \hat{\theta}$  可获得与式(8)完全等价的带二次等式约束的极大似然估计问题. 重新整理后可写成

$$\min_{\theta \in R^2} \{ \|\zeta - B\theta\|^2 : \theta^T M\theta + m^T\theta + \theta^T m - b = 0 \} \quad (12)$$

文献[24]的定理 3.2 证明:上述优化问题的是一个 GTRS 问题,其最优解满足如下 3 个充要条件:

$$(B^T B + \lambda M)\theta = B^T \zeta - \lambda m \quad (13-a)$$

$$\theta^T M\theta + m^T\theta + \theta^T m - b = 0 \quad (13-b)$$

$$B^T B + \lambda M \succeq 0 \quad (13-c)$$

其中,  $B^T B + \lambda M \succeq 0$  表示矩阵  $B^T B + \lambda M$  半正定.注意到式(13-a)、式(13-b)与式(9-a)、式(9-b)完全相同,它们是式(12)的最优解需满足的 KKT 必要条件(Karush-Kuhn-Tacker condition,简称 KKTCondition);而式(13-c)是 GTRS 问题的最优解需满足的充要条件之一.

为了从式(13)中求解估计值投影法的输出,我们首先求解其中的拉格朗日算子  $\lambda$  的值.它是下式的解:

$$\varphi(\lambda) = \theta^T(\lambda)M\theta(\lambda) + m^T\theta(\lambda) + \theta^T(\lambda)m - b = 0, \lambda \in I \quad (14)$$

上式是通过式(13-a)求得式(12)的候选最优解  $\theta(\lambda) = (B^T B + \lambda M)^{-1}(B^T \zeta - \lambda m)$  并带入式(13-b)后获得的.拉格朗日算子的可行集  $I$  由式(13-c)确定,它是所有使矩阵  $B^T B + \lambda M$  半正定的  $\lambda$  的集合.利用矩阵论知识可得:

$$I = (-1/\lambda_1(M, B^T B), +\infty) \quad (15)$$

其中,  $\lambda_1(X, Y) = \lambda_1(Y^{-1/2}XY^{-1/2})$  表示矩阵  $Y^{-1/2}XY^{-1/2}$  最大的特征值(eigenvalue).

文献[24]的定理 5.2 从理论上证明了在区间  $I$  中,式(14)中的  $\varphi(\lambda)$  是单调递减的.这意味着式(14)的根是唯一的,且可由简单的二分法搜索(bisection search)获得.将式(14)的根带入式(13-a)即可获得估计值投影法所对应的带二次等式约束的极大似然估计子的全局最优解.

我们将基于二分法求解式(12)的步骤总结如下:

- 1) 计算  $\lambda_1(M, B^T B)$ , 并令  $a = -1/\lambda_1(M, B^T B)$ ,  $b = 1/\lambda_1(M, B^T B)$ .
- 2) 设定一个较小的正数  $\delta$ , 计算  $\varphi(a + \delta)$ . 若  $\varphi(a + \delta) > 0$ , 则输出  $a = a + \delta$  并转到第 3 步. 否则  $\delta = \delta/2$ ; 重复上述过程直到  $\varphi(a + \delta) > 0$ , 转到第 3 步.
- 3) 计算  $\varphi(b)$ , 若  $\varphi(b) < 0$ , 则输出  $b$  并转到第 4 步. 否则,  $b = 2b$ ; 重复上述过程直到  $\varphi(b) < 0$ , 转到第 4 步.
- 4) 在区间  $[a, b]$  之间利用二分法求解式(14)的根.
- 5) 将  $\lambda$  的值代入  $\theta(\lambda) = (B^T B + \lambda M)^{-1}(B^T \zeta - \lambda m)$  即可获得新的估计值投影法的最优解.

必须指出的是,基于二分法的上述求解过程也是迭代的.但新算法与文献[20]的方法的根本区别在于:新算法对拉格朗日算子的求解是全局最优的,与其初始选择无关.这是因为 GTRS 问题最优解的充要条件(13-c)的引入,使拉格朗日算子的解唯一(见公式(14)和(15)).

另外,文献[20]中的算法要求二次等式约束中的矩阵  $M$  需至少半正定以获得求解拉格朗日算子的式(11),这限制了该算法的实际应用范围.而新算法对  $M$  未作任何限制,对算法应用于跟踪含较复杂运动轨迹的目标(如目标轨迹为双曲线,其位置对应的二次约束矩阵  $M$  为不定矩阵)提供了可能.

### 3 仿真结果

本节利用计算机仿真说明新算法的有效性.仿真场景的设置与文献[20]类似.目标在二维  $x$ - $y$  平面上沿做匀速圆周运动;运动轨迹的圆心在 origin, 半径为 100m.为了跟踪上述目标的运动,定义其运动状态矢量为  $\theta_k = [x_k \quad v_{x,k} \quad y_k \quad v_{y,k}]^T$ . 其中,  $x_k$  和  $v_{x,k}$  分别表示当前时刻目标的  $x$  轴坐标以及沿  $x$  轴方向的运动速度,  $y_k$  和  $v_{y,k}$  分别为当前时刻目标的  $y$  轴坐标和沿  $y$  轴方向的运动速度.在跟踪的起始 0 时刻,该目标的初始运动状态矢量真实值为  $\theta_0 = [100 \text{ m}, 0 \text{ m/s}, 0 \text{ m}, 10 \text{ m/s}]^T$ .

在第 1 个仿真实验中,我们假定目标被一个传感器跟踪,其采样间隔为  $T = 1\text{s}$ . 我们采用 UKF 作为目标运动跟踪器,其状态方程和测量方程分别是

$$\theta_k = A\theta_{k-1} + v_k \quad (16-a)$$

$$z_k = C\theta_k + w_k \quad (16-b)$$

其中,  $A = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . 过程噪声  $v_k$  和测量噪声  $w_k$  分别为零均值的加性高斯噪声, 它们的

协方差矩阵分别是

$$Q_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}, \sigma_1 = 0.32\text{m/s} \quad (17-a)$$

$$Q_w = \text{diag}([\sigma_x^2 \ \sigma_y^2]), \sigma_x = \sigma_y = 7\text{m} \quad (17-b)$$

我们首先研究无约束 UKF 算法的跟踪精度. 我们设定 UKF 的状态估计初始值为  $\hat{\theta}_0 = \theta_0$ , 其协方差矩阵为

$$P_0 = \text{diag}([5^2 \ 1^2 \ 5^2 \ 1^2]) \quad (18)$$

图 1 给出了在某一次蒙特卡洛仿真中传感器获得的观测量和无约束 UKF 的跟踪轨迹. 我们可以看出, 因过程噪声的引入(见式(16-a)), UKF 能够跟踪目标的转弯, 但除了初始跟踪阶段以外, UKF 给出的轨迹仅近似为一个圆周.

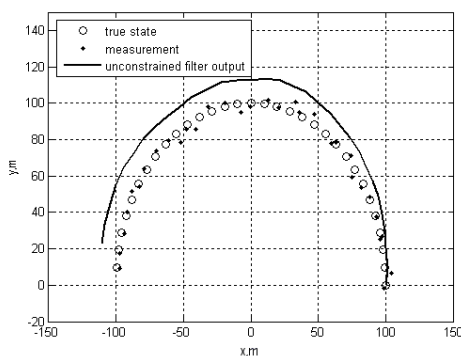


Fig.1 Tracking results from the unconstrained UKF

图 1 无约束 UKF 目标跟踪结果

引入目标轨迹的先验知识:

$$x_k^2 + y_k^2 = R^2, R = 100\text{m} \quad (19)$$

将其看成一个二次等式约束, 将文献[20]与 UKF 结合起来, 用于跟踪目标的运动. 在算法实现中, 我们综合了 PUKF 和 ECUKF 的思想, 将投影后的结果作为 UKF 下一时刻的输入, 但并不更新状态矢量估计的协方差矩阵, 以保证滤波器的稳定性. 求解式(11)需选择拉格朗日算子  $\lambda$  的初始值. 数值仿真可知: 当初值选择为  $\lambda = 0$  时, 带二次等式约束的 UKF 迭代过程收敛, 获得的目标轨迹估计明显优于不带约束的 UKF 滤波器; 而当初值选择略微偏离 0, 带二次等式约束的 UKF 跟踪精度显著下降, 且算法出现发散的现象. 从上述仿真结果可以看出, 文献[20]所提出的算法对  $\lambda$  的初值选择较为敏感. 图 2 给出了当迭代初值为  $\lambda = 0$  时, 某一次蒙特卡洛仿真中目标运动轨迹估计结果.

将本文提出的估计值投影算法与 UKF 结合后获得的运动轨迹估计结果如图 3 所示. 同样, 在算法实现中, 我们将投影后的结果作为 UKF 下一时刻的输入, 但并不更新状态矢量估计的协方差矩阵, 以改善滤波器的稳定性. 比较图 2 与图 3 可以看出: 新算法能够稳定地实现对目标运动的跟踪, 目标位置估计点均落在式(19)给定的圆周上, 性能明显优于不带约束的 UKF 滤波器(对比图 1).

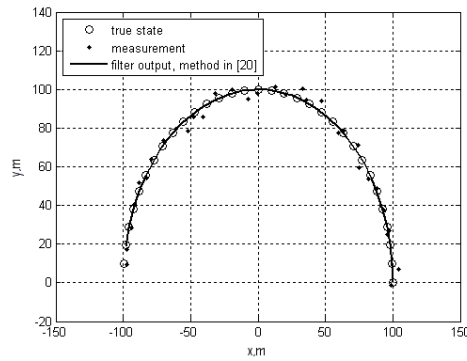


Fig.2 Tracking results from the constrained UKF in Ref.[20]

图2 文献[20]提出的带约束 UKF 的目标跟踪结果

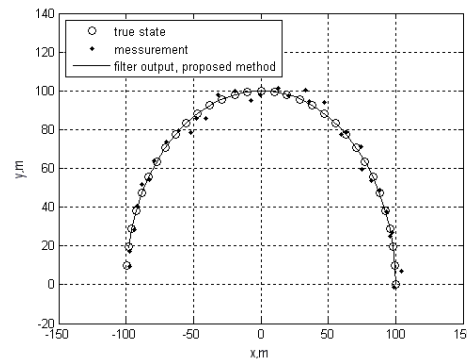


Fig.3 Tracking results from the proposed constrained UKF

图3 本文提出的带约束 UKF 的目标跟踪结果

接下来,使用第 1 次仿真实验的场景,我们比较本文提出的估计值投影法和 UKF 的结合与 MAUKF,PUKF 和 ECUKF 这 3 种方法的目标位置跟踪精度.我们采用 1 000 次蒙特卡洛仿真,4 种方法的目标位置估计的均方误差(mean squared error,简称 MSE)如图 4 所示.

由于初始点选取为真值,因此每种算法在跟踪初始阶段的定位 MSE 均为 0;一段时间后,定位 MSE 将达到一个稳定值.从图中可以看出,PUKF 的性能优于 ECUKF 和 MAUKF.这是由于在后两种算法中,等式约束的使用加速了状态矢量估计的协方差矩阵的收敛,造成算法对跟踪后期目标的转弯运动跟踪能力下降明显.与 PUKF, MAUKF 和 ECUKF 相比,本文提出的算法与 UKF 相结合获得的定位精度最高.这是由于新算法的输出满足等式约束(19),而前述 3 种算法的输出均仅近似满足等式约束.

在第 2 个仿真实验中,为了验证本文提出的算法在测量方程非线性条件下的有效性,我们采用  $M=3$  个传感器跟踪目标.传感器位置分别为  $s_1=[50,0]^T$ ,  $s_2=[-50,0]^T$ ,  $s_3=[0,50]^T$ .每个时刻可获得两个距离差(range difference of arrival,简称 RDOA)观测量  $r_{21}, r_{31}$ .其中,  $r_{i1}=\sqrt{(\theta(1)-x_i)^2+(\theta(3)-y_i)^2}-\sqrt{(\theta(1)-x_1)^2+(\theta(3)-y_1)^2}$ ,  $i=2,3$ .测量方程为  $z=r+w$ ,  $r=[r_{21}, r_{31}]^T$ , 测量噪声  $w$  的协方差矩阵为  $Q_w=\text{diag}([50 \ 50])$ .其他仿真条件设置与第 1 个仿真实验相同.

在本仿真实验中,我们比较本文提出的估计值投影法和 UKF 的结合与 MAUKF,PUKF 和 ECUKF 这 3 种方法的目标位置跟踪精度.我们采用 1 000 次蒙特卡洛仿真,4 种方法的目标位置估计的均方误差如图 5 所示.从图 5 可以看出,由仿真结果可知,在测量方程非线性的条件下,本文提出的算法相对于 MAUKF,PUKF 和 ECUKF 仍具有较高的目标跟踪精度.

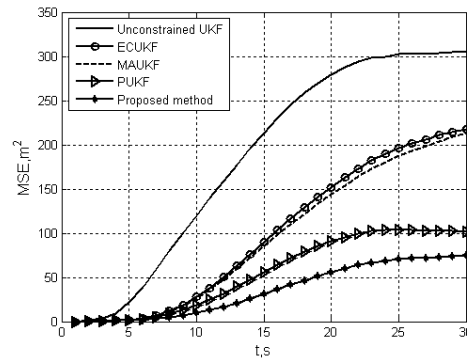


Fig.4 Performance comparison of different constrained UKFs under scenario 1

图4 场景1下多种带约束UKF目标跟踪算法的定位精度比较

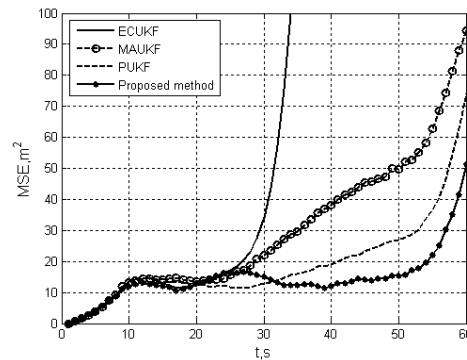


Fig.5 Performance comparison of different constrained UKFs under scenario 2

图5 场景2下多种带约束UKF目标跟踪算法的定位精度比较

## 4 总结

在本文中,我们提出一种带二次约束的目标跟踪算法.它首先利用无约束的卡尔曼滤波器处理新获得的观测实现目标的运动状态的初估计,然后利用求解一个带二次约束的极大似然估计问题将初估计值投影到约束曲面上.我们将约束极大似然估计问题看作一类广义信赖域子问题,获得了一种全局收敛的最优值求解算法.仿真结果表明:相对于文献[20]的估计值投影算法,本文提出的算法对初始值选择不敏感,具有全局收敛的优点;相对于 PUKF,MAUKF 和 ECUKF 等常用的处理非线性约束的目标跟踪算法,本文提出的算法有更高的目标定位精度.

## References:

- [1] Yick J, Mukherjee B, Ghosal D. Wireless sensor network survey. *Computer Networks*, 2008,52:2292–2330.
- [2] Mao G, Fidan B, Anderson BDO. Wireless sensor network localization techniques. *Computer Networks*, 2007,51:2529–2553.
- [3] Rhodes IB. A tutorial introduction to estimation and filtering. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1971,16(6):688–706.
- [4] Low CB, Wang D, Arogeti S, Zhang JB. Causality assignment and model approximation for hybrid bond graph: Fault diagnosis perspectives. *IEEE Trans. on Automation Science and Engineering*, 2010,7(3):570–580.
- [5] Elmaliach Y, Agmon N, Kaminka GA. Multi-Robot area patrol under frequency constraints. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2009,57:293–320.
- [6] Shitrit HB, Berclaz J, Fleurent F, Fua P. Tracking multiple people under global appearance constraints. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Computer Vision*. 2011. 137–144.



- [7] Kirby R, Simmons R, Forlizzi J. COMPANION: A constraint-optimizing method for person-acceptable navigation. In: Proc. of the 18th IEEE Int'l Symp. on Robot and Human Interactive Communication. 2009. 607–612.
- [8] Simon D. Kalman filtering with state constraints: A survey of linear and nonlinear algorithms. IET Control Theory and Applications, 2010,4(8):1303–1318.
- [9] Wen W, Durrant H. Model-Based multi-sensor data fusion. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Robotics Automation. 1992. 1720–1726.
- [10] Alouani A, Blair W. Use of a kinematic constraint in tracking constant speed, maneuvering targets. IEEE Trans. on Automatic Control, 1993,38(7):1107–1111.
- [11] Simon D, Simon DL. Constrained Kalman filtering via density function truncation for turbofan engine health estimation. Int'l Journal of Systems Science, 2010,41(2):159–171.
- [12] Tugnait JK. Constrained signal restoration via iterated extended Kalman filtering. IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985,33(2):472–475.
- [13] Gupta N, Hauser R. Kalman filtering with equality and inequality state constraints. Technical Report, Oxford University Computing Laboratory, 2008.
- [14] Ko S, Bitmead R. State estimation for linear systems with state equality constraints. Automatica, 2007,8:1363–1368.
- [15] Simon D, Chia T. Kalman filtering with state equality constraints. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 2002,1: 128–136.
- [16] Geeter JD, Brussel HV, Schutter JD. A smoothly constrained Kalman filter. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997,19(10):1171–1177.
- [17] Michalska H, Mayne D. Moving horizon observers and observer-based control. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995,40(6): 995–1006.
- [18] Teixeira BOS, Chandrasekar J, Torres LAB, Aguirre LA, Bernstein DS. Unscented filtering for equality-constrained nonlinear systems. In: Proc. of the 2008 American Control Conf. 2008. 39–44.
- [19] Teixeira BOS, Chandrasekar J, Torres LAB, Aguirre LA, Bernstein DS. State estimation for linear and non-linear equality-constrained systems. Int'l Journal of Control, 2009,82(5):918–936.
- [20] Yang C, Blasch E. Kalman filtering with nonlinear state constraints. Aerospace and Electronic Systems, 2009,45:70–84.
- [21] Julier S, Uhlmann J. Unscented filtering and nonlinear estimation. Proc. of the IEEE, 2004,92(3):401–422.
- [22] Moon TK, Stirling WC. Mathematical methods and algorithms for signal processing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2000.
- [23] Beck A, Stoica P, Li J. Exact and approximate solutions of source localization problems. IEEE Trans. on Signal Processing, 2008,56(5):1770–1778.
- [24] More JJ. Generalizations of the trust region subproblem. Optimization Methods and Software, 1993,2:189–209.



曹亚陆(1990—),男,江苏扬州人,硕士,主要研究领域为无线传感器网络下的目标定位与跟踪。  
E-mail: yalu.cao.gao@gmail.com



彭力(1967—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 会员,主要研究领域为视觉物联网。  
E-mail: penglimail2002@163.com



杨乐(1979—),男,博士,副教授,主要研究领域为传感网,无源定位跟踪,信号处理。  
E-mail: le.yang.le@gmail.com



郭福成(1975—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为无源定位,信号处理,信息对抗技术。  
E-mail: gfcl75@gmail.com



刘全胜(1969—),男,教授,主要研究领域为传感网数据分析与融合。  
E-mail: liuqs@wxit.edu.cn