软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2018,29(10):3091−3110 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005385]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

公式真度的 Hamming 距离表示形式与分解定理*

于 鹏[1,2], 赵 彬[1]

[1](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710119)

[2](陕西科技大学 文理学院,陕西 西安 710021)

通讯作者: 赵彬, E-mail: zhaobin@snnu.edu.cn

摘 要: 首先应用模糊集截集的方法,给出了多值逻辑系统 $Ł_n$ 中广义重言式的一个等价刻画,并利用模糊集间的标准 Hammin 距离,定义了公式间的 Hamming 距离、Hamming 相似度与 Hamming 真度,给出了计量逻辑学基本概念的 Hamming 距离表示方法.然后给出了计量逻辑学中公式真度的一个分解定理,这个定理指出在计量逻辑学中,任意一个公式的真度等于一些互不相容的公式的真度之和,而公式 φ 本身则逻辑等价于这些公式的并.最后应用所提方法定义了广义 MP 问题的三-I 真度解,并讨论了三-I 真度解的存在性问题.

关键词: Hamming 距离;近似推理;计量逻辑学;相容理论;三-I 真度解

中图法分类号: TP181

中文引用格式: 于鹏,赵彬.公式真度的 Hamming 距离表示形式与分解定理.软件学报,2018,29(10):3091–3110. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5385.htm

英文引用格式: Yu P, Zhao B. The Hamming distance representation and decomposition theorem of formula's truth degree. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2018,29(10):3091–3110 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/5385.htm

The Hamming Distance Representation and Decomposition Theorem of Formula's Truth Degree

YU Peng[1,2], ZHAO Bin[1]

[1](School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

[2](School of Arts and Sciences, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China)

Abstract. First in this paper, an equivalent characterization of generalized tautologies in $Ł_n$ is introduced by using the method of cut of fuzzy set, the Hamming distance, Hamming similarity degree and Hamming truth degree between formulas are defined by means of standard Hamming distance between fuzzy sets, and Hamming distance representation of the basic concepts of quantitative logic is described. Then, the truth degree decomposition theorem of formula in quantitative logic is presented. This theorem points out that in quantitative logic, the truth degree of any formula φ is equal to the sum of the truth degrees of some incompatible formulas, and the formula φ itself is logically equivalent to the join of these formulas. Finally, the problem of triple-I truth degree solution of the generalized MP problem is proposed, and the existence of the triple-I truth degree solution is discussed.

Key words. Hamming distance; approximate reasoning; quantitative logic; consistency theory; triple I truth degree solution

1 引 言

以公式真度为核心概念的计量逻辑学[1]是一种新的非经典数理逻辑的推理模式,它开辟了非经典数理逻

∗基金项目: 国家自然科学基金(11531009); 中央高校基本科研业务费专项资金(GK201501001)

Foundation item: National Natural Sciences Foundation of China (11531009); Fundamental Research Funds for the Central Universities (GK201501001)

收稿时间: 2016-12-12; 修改时间: 2017-06-19; 采用时间: 2017-09-09; jos 在线出版时间: 2018-06-07

CNKI 网络优先出版: 2018-06-07 14:53:39, http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20180607.1453.003.html

辑研究的新方向,促进了非经典数理逻辑的发展.目前,计量逻辑学的方法已在多个命题逻辑系统中得以推广应用,并取得了一些重要成果[2−18].文献[2]在经典二值命题逻辑系统中利用势为 2 的均匀概率,引入了公式真度的概念,初步建立了计量逻辑学的理论框架;文献[3]将二值逻辑系统中的计量化方法推广到了 Łukasiewicz n-值命题逻辑系统 $Ł_n$ 中;文献[4]在 n -值 R_0 命题逻辑系统中对广义真度进行了研究;文献[5]将计量逻辑的方法引入到了多值模态逻辑中,建立了多值模态逻辑系统中的计量逻辑模型;文献[6]采用公理化方法给出了一类一阶谓词逻辑公式的公理化真度,将计量逻辑学引入到了一阶谓词逻辑中;文献[7,8]将随机化的方法引入到计量逻辑学中,建立了概率计量逻辑学,专著文献[9]便是对这些研究成果的总结.分析了这些研究成果后我们发现,几乎所有的文献都沿用着文献[2]中先真度、后相似度、再伪距离的研究框架展开讨论.不同的是,逻辑系统变了,相应的真度、相似度的性质也随之改变,但理论框架、基本思想是一样的.对不同计量逻辑系统性质的讨论远多于对计量逻辑基本概念的讨论.文献[10]是一种尝试,其作者利用一个公式的诱导函数的算术平均值给出了公式真度的均值表示形式,对真度做出了一种合理的解释.本文作者在分析以上文献的基础上,利用模糊集的截集及模糊集的标准 Hamming 距离等方法,在多值命题逻辑系统 $Ł_n$ 中给出了广义重言式的一个模糊截集的等价刻画,引入了公式的τ_α真度概念,实现了广义重言式的程度化推理.然后利用模糊集间的标准 Hamming 距离,引入了公式间的 Hamming 距离(简称 H-距离)、Hamming 相似度(简称 H-相似度)与 Hamming 真度(简称 H-真度)的概念,从模糊集的角度对计量逻辑学的基本概念做出了合理的解释,丰富了计量逻辑学的内容,为程度化推理提供了一种可能的途径.

在给出了公式真度的 Hamming 距离表示形式以后,通过构造相应的逻辑公式,我们给出了计量逻辑学中一个公式的真度分解定理.这个定理表明,在计量逻辑学框架下,任意一个公式φ的真度都可以表示成一些互不相容的公式的真度之和,而公式φ本身则逻辑等价于这些公式的并.运用本文的方法,我们还给出了 n 值命题逻辑系统 $Ł_n$ 中具有相同真度的公式集的相容性的刻画.最后,我们在 $Ł_n$ 系统中提出了广义 MP 及多重广义 MP 问题的三-I 真度解的问题,并给出了它们的解.

2 广义重言式与模糊集

首先记 $I_n=\left\{0,\dfrac{1}{n-1},\ldots,\dfrac{n-2}{n-1},1\right\}(n\geqslant 2)$, 在 I_n 中分别规定:

(1) $a\to_L b=(1-a+b)\wedge 1, a\otimes_L b=(a+b-1)\vee 0;$

(2) $a\to_{R_0} b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ (1-a)\vee b, & a>b\end{cases}$, $a\otimes_{R_0} b=\begin{cases}a\wedge b, & a+b>1\\ 0, & a+b\leqslant 1\end{cases}$,

$a\vee b=\max\{a,b\}, \neg a=a\to 0,$

则 $(I_n,\to_L,\otimes_L,\vee,\neg),(I_n,\to_{R_0},\otimes_{R_0},\vee,\neg)$ 分别是 Łukasiewicz n 值命题逻辑系统 $Ł_n$ 与 R_0 n 值命题逻辑系统 L_n^*.

定义 2.1. 设 $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$是可数集,$F(S)$是由 S 生成的 $(\neg,\to,\otimes)$ 型自由代数,称 S 中的元为原子公式,$F(S)$中的元为合式公式,$F(S)$的子集Γ称为理论.

定义 2.2. 设 $v:F(S)\to I_n$ 是 $(\neg,\to,\otimes)$ 型同态,称 v 为 $F(S)$的赋值, $A\in F(S)$, $v(A)$ 称为 A 的赋值,$F(S)$的赋值映射的全体记为Ω.若对每一个赋值 $v\in\Omega$,都有 $v(A)=1$,则称公式 A 为重言式.若对每一个赋值 $v\in\Omega$,都有 $v(A)=0$,则称公式 A 为矛盾式.全体重言式之集与全体矛盾式之集分别记作 Tau 与 Contr.设 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 若$\forall v\in\Omega$,都有 $v(A)\geqslant\alpha$,则称 A 为α-重言式.若 A 是α-重言式,且存在一个 $v\in\Omega$,使得 $v(A)=\alpha$,则称 A 为可达α-重言式.

定义 2.3. 设 $A,B\in F(S)$,若$\forall v\in\Omega$,都有 $v(A)=v(B)$,则称公式 A 与 B 逻辑等价,并用 $A\approx B$ 表示.

令 $S_m=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ 是原子命题集 S 上的有限命题集.公式φ是含有 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 的合式公式,则公式φ在 S 上的赋值 v 由 v 在 S_m上的赋值所唯一确定,其全体记为Ω_m.当 v 限制在 S_m 上以后,对于任意的公式 $A(p_1,p_2,\ldots,p_m)$,其赋值映射 v 的赋值域可用 I_n^m 表示, I_n^m 所含元素个数为 n^m 个.为下文叙述方便,记 I_n^m 为 U_m, 即 $I_n^m=U_m=\{x_1,\ldots,x_{n^m}\}$, 其中, $x_i\in I_n^m$ 且 $x_1,\ldots,x_{n^m}$ 按字典序依次排列.此时, $v_x(\varphi)$ 表示公式φ在一个赋值 $x(x\in U_m)$下的像.例如,

n=3,m=2 时, $U_2=\left\{(0,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,0),\left(1,\frac{1}{2}\right),(1,1)\right\}$, 公式 $\varphi=p\wedge q$ 在赋值 x_i 下的像依次为 $0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$.

定义 2.4. 设 U 是任意一个集合, $L=\left\{0,\frac{1}{n-1},...,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$, 称映射 $A:U\to L$ 为一个 n 值模糊集.

注 2.1. 定义 2.4 是文献[13]中三值模糊集合的一个自然推广.

令 $U_m=\{x_1,...,x_{n^m}\}$, 公式 $\varphi=\varphi(p_1,p_2,...,p_m)\in F(S_m)$, 定义 U_m 到 I_n 上的映射

$$\varphi:U_m\to I_n$$

为

$$\varphi(x)=v_x(\varphi),$$

则公式φ可视为论域 U_m 上的 n 值模糊集.

将公式φ视为论域 U_m 上的 n 值模糊集之后,公式集 $F(S_m)$上的α-重言式的概念就有了新的描述.即下列结论成立.

定理 2.1. 公式φ是α-重言式当且仅当 n 值模糊集φ的α-截集与 U_m 相等,即 $\varphi_\alpha=U_m$.

进一步可以定义一个公式的τ_α真度概念.

定义 2.5. 设公式$\varphi\in F(S_m)$,定义

$$\tau_\alpha(\varphi)=\frac{|\varphi_\alpha|}{|U_m|},$$

称 $\tau_\alpha(\varphi)$ 为公式φ的τ_α真度.

从上述公式φ的τ_α真度定义可以看出, $\frac{|\varphi_\alpha|}{|U_m|}$ 表示的是论域 U_m 中使得公式φ的赋值大于等于α的元素个数占整个 U_m 元素个数的比值,这在一定程度上反映了公式φ为α-重言式的程度.

定义 2.6. 设公式$\varphi\in F(S_m)$,定义

$$\tau_{\alpha+}(\varphi)=\frac{|\varphi_{\alpha\cdot}|}{|U_m|},$$

其中, $\varphi_{\alpha\cdot}$ 表示模糊集φ的α强截集,称 $\tau_{\alpha+}(\varphi)$ 为公式φ的 $\tau_{\alpha+}$ 真度.

注 2.2. 本文定义的τ_α真度不仅可以给出公式φ隶属于不同α-重言式的程度,而且还具有区分不同α-重言式的功能.例如对于两个可达α-重言式φ与ψ,其中靠近重言式的公式不妨设为φ,其 $\tau_\beta(\alpha<\beta)$ 真度值大于远离重言式的公式ψ的 $\tau_\beta(\alpha<\beta)$ 真度值.进一步地, $\tau_1(\varphi)$ 就是文献[11]中定义的公式φ的绝对真度.

例 2.1:令 $S_2=\{p,q\},\varphi=(p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q),\psi=(p\vee\neg p)\wedge(q\to q)$, 在 Łukasiewicz 5 值命题逻辑系统 Ł$_5$ 中,考察公式φ与ψ隶属于各个重言式的程度.

解:设 $S_2=\{p,q\}$, 则论域 U_2 所含有的元素个数为 $|U_2|=5^2=25$, 公式φ与ψ对应的模糊集可由表 1 给出.

Table 1 Truth table for the formulas in Ł$_5$

表 1 Ł$_5$ 中公式的真值表

U_2	(0,0)	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\left(0,\frac{2}{4}\right)$	$\left(0,\frac{3}{4}\right)$	(0,1)	…	(1,0)	$\left(1,\frac{1}{4}\right)$	$\left(1,\frac{2}{4}\right)$	$\left(1,\frac{3}{4}\right)$	(1,1)
φ	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	…	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
ψ	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1

从表 1 可得 U_2 上的模糊集φ与ψ分别为

$$\varphi=\left(1,\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right),$$
$$\psi=\left(1,1,1,1,1,\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1,1\right),$$

则

$$\varphi_{\frac{1}{2}}=U_2,\ \varphi_{\frac{3}{4}}=\{x_2,x_4,x_6,x_7,x_9,x_{10},x_{16},x_{17},x_{19},x_{20},x_{22},x_{24}\},\ \varphi_1=\{x_1,x_5,x_{21},x_{25}\},$$
$$\psi_{\frac{1}{2}}=U_2,\ \psi_{\frac{3}{4}}=\{x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\},\ \psi_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_{21},x_{22},x_{23},x_{24},x_{25}\}.$$

公式φ是$\frac{1}{4}$- 重言式,可达的$\frac{1}{2}$- 重言式,属于$\frac{3}{4}$- 重言式的程度是$\frac{13}{25}$,属于重言式的程度是$\frac{4}{25}$.

公式ψ是$\frac{1}{4}$- 重言式,可达的$\frac{1}{2}$- 重言式,属于$\frac{3}{4}$- 重言式的程度是$\frac{20}{25}$,属于重言式的程度是$\frac{10}{25}$.

从以上例子可以看出,虽然φ,ψ同为可达$\frac{1}{2}$- 重言式,但公式ψ可信程度更高,这反映在τ_α重言式上就是$\tau_{\frac{3}{4}}(\psi)>\tau_{\frac{3}{4}}(\varphi)$.

关于$\tau_\alpha,\tau_{\alpha+}$真度,下列性质成立.

性质 2.1. 设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,则

(i) $0\leqslant\tau_\alpha\leqslant 1$;

(ii) $\tau_1(\varphi)=1$当且仅当φ是重言式;

(iii) $\alpha<1,\tau_\alpha(\varphi)+\tau_{(1-\alpha)+}(\neg\varphi)=1$;

(iv) $\tau_\alpha(\varphi\vee\psi)+\tau_\alpha(\varphi\wedge\psi)=\tau_\alpha(\varphi)+\tau_\alpha(\psi)$;

(v) 若$\varphi\to\psi$是定理,则$\tau_\alpha(\varphi)\leqslant\tau_\alpha(\psi)$;

(vi) $\tau_\alpha(\varphi\wedge\psi)\leqslant\min\{\tau_\alpha(\varphi),\tau_\alpha(\psi)\}\leqslant\tau_\alpha(\varphi\vee\psi)$.

3 公式真度的 Hamming 距离表示形式

本节中我们将利用模糊集间的标准 Hamming 距离导出公式集上的 H-距离、H-相似度及 H-真度的概念,从而给出计量逻辑学中基本概念的 Hamming 距离表示形式.

定义 3.1[13]. 设集合$U=\{x_1,\dots,x_n\}$, A与B是U上的模糊集,定义模糊集A与B之间的 Hamming 距离为

$$\rho(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)|.$$

定义 3.2. 设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,定义公式φ,ψ间的 H-距离为

$$\rho_H(\varphi,\psi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m}|\varphi(x_i)-\psi(x_i)|,x_i\in U_m.$$

例 3.1:取$S_2=\{p,q\}$,在逻辑系统 Ł$_3$中,求公式$\varphi=p_1\vee p_2$与$\psi=p_1\wedge p_2$之间的 H-距离.

解:按照定义 3.2,此时的论域$U_2=\left\{(0,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,0),\left(1,\frac{1}{2}\right),(1,1)\right\}$. U_2上的 3 值模糊集为

$$\varphi=\left(0,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,1,1\right),\ \psi=\left(0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right),$$

则 $\rho_H(\varphi,\psi)=\frac{1}{9}\left(|0-0|+\left|\frac{1}{2}-0\right|+|1-0|+\left|\frac{1}{2}-0\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|+\left|1-\frac{1}{2}\right|+|1-0|+\left|1-\frac{1}{2}\right|+|1-1|\right)=\frac{4}{9}$.

注 3.1.

(i) 定义 3.2 中定义的公式φ,ψ间的 H-距离是伪距离而非真正的距离,这是由于逻辑等价的两个公式φ与ψ

其 H-距离虽然为 0,但φ与ψ不一定相等.关于公式的逻辑等价容易证明:当 $\varphi,\bar{\varphi},\psi,\bar{\psi}$ 均含有相同的原子公式且 $\varphi\approx\bar{\varphi},\psi\approx\bar{\psi}$ 时, $\rho_H(\varphi,\psi)=\rho_H(\bar{\varphi},\bar{\psi})$.

(ii) 由定义 3.2 可知 $\rho_H(\varphi,\psi)=\rho_H(\neg\varphi,\neg\psi)$.

(iii) 之所以选择标准Hamming距离而不选取欧式距离(记为 ρ_E)作为公式集$F(S_m)$上公式间的度量,是因为标准Hamming距离具有公式间距离的不变性(见定理3.1),而欧式距离则不具有这样的性质.例如,取 $S_2=\{p,q\}$,则在逻辑系统 Ł$_3$ 中,公式 $\varphi=p\vee q$ 与 $\psi=p\wedge q$ 的欧式距离 $\rho_E(\varphi,\psi)=\sqrt{3}$. 但将 S_2 添加原子公式 r 得到 $S_3=\{p,q,r\}$ 之后, 公式 $\varphi\approx\varphi_1=(p\vee q)\wedge(r\to r),\psi\approx\psi_1=(p\wedge q)\wedge(r\to r)$. 公式 φ_1 与 ψ_1 的欧式距离 $\rho_E(\varphi_1,\psi_1)=3$, $\rho_E(\varphi,\psi)\neq\rho_E(\varphi_1,\psi_1)$, 欧式距离不适宜成为公式集 $F(S_m)$上的度量.

定理 3.1(公式间距离的不变性). 将 S_m 添加原子公式 $p_{m+1},\ldots,p_{m+t}$, 得到 S_{m+t},相应地,将 $F(S_m)$中的公式φ与ψ逻辑等价拓展为 $\bar{\varphi}=\varphi\wedge\left(\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{t}(p_{m+i}\to p_{m+i})\right),\bar{\psi}=\psi\wedge\left(\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{t}(p_{m+i}\to p_{m+i})\right)$, 则 $\rho_H(\varphi,\psi)=\rho_H(\bar{\varphi},\bar{\psi})$.

证明:当 t=1 时.定义映射 $g:U_m\to P(U_{m+1})$ 为

$$g(x)=\{(x,i)\mid i\in I_n\},$$

其中,(x,i)表示以 x 为前 m 个分量以 i 为第 m+1 个分量的 m+1 维向量,则 $g(U_m)=U_{m+1}$, 即 $U_{m+1}=\bigcup\limits_{x\in U_m}\{(x,i)\mid i\in I_n\}$.
由题设条件 $\bar{\varphi}=\varphi\wedge(p_{m+i}\to p_{m+i})\approx\varphi,\bar{\psi}=\psi\wedge(p_{m+i}\to p_{m+i})\approx\psi$ 可知, $\bar{\varphi},\bar{\psi}$ 作为 U_{m+1} 上的 n 值模糊集有 $\bar{\varphi}((x,i))=\varphi(x)$, $\bar{\psi}((x,i))=\psi(x)\left(i=0,\dfrac{1}{n-1},\ldots,1\right)$. 所以,

$$\begin{aligned}p_H(\bar{\varphi},\bar{\psi})&=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{x\in U_m,i\in I_n}|\bar{\varphi}((x,i))-\bar{\psi}((x,i))|\\&=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{x\in U_m,i\in I_n}|\varphi(x)-\psi(x)|\\&=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{x\in U_m}n\,|\varphi(x)-\psi(x)|\\&=\frac{1}{n^{m}}\sum_{x\in U_m}|\varphi(x)-\psi(x)|\\&=p_H(\varphi,\psi).\end{aligned}$$

当 $t>1$ 时,可仿照上面的证明定义函数列 $g_i(i=1,\ldots,t)$, 得到公式序列 $\{\varphi_i\}$ 与 $\{\psi_i\}(i=1,\ldots,t)$ 满足 $\rho_H(\varphi,\psi)=\rho_H(\varphi_1,\psi_1)=\ldots=\rho_H(\varphi_t,\psi_t),\varphi_t=\bar{\varphi},\psi_t=\bar{\psi}$, 命题得证. □

为进一步描述不同公式间的距离做如下准备工作.

将[0,1]区间 n 等分,得到 n 个小区间: $\left[0,\dfrac{1}{n}\right),\left[\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right),\ldots,\left[\dfrac{1}{n},1\right]$, 则立方体$[0,1]^m$ 被分成 n^m 个体积为 $\dfrac{1}{n^m}$ 的小立方体,依次记为 $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n^m}$. 由于 $\left[\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n}\right)\cap I_n=\dfrac{i}{n-1}$, 所以 $\forall x_i\in U_m$ 都存在某个小立方体包含 x_i,不妨设 $x_i\in\sigma_i$, 定义函数 $\tilde{\varphi}(x)$ 为

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x_i),x\in\sigma_i.$$

定理 3.2(公式间距离的积分表示). 设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,则公式φ,ψ间的 H-距离为

$$\rho_H(\varphi,\psi)=\int_{[0,1]^m}|\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\psi}(x)|\,\mathrm{d}x,x\in[0,1]^m.$$

证明:由 $\tilde{\varphi}(x)$ 的定义可知, $\tilde{\varphi}(x)$ 是小区域σ_i 的常值函数, $\forall x\in\sigma_i,\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x_i)$, 所以,

$$\int_{\sigma_i}|\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\psi}(x)|\,\mathrm{d}x=|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|\int_{\sigma_i}\mathrm{d}x=\frac{1}{n^m}|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|.$$

从而有,

$$\rho_H(\varphi,\psi)=\frac{1}{n^m}\sum_{x_i\in U_m}|\varphi(x_i)-\psi(x_i)|=\sum_{x_i\in U_m}|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|\int_{\sigma_i}\mathrm{d}x=\int_{[0,1]^m}|\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\psi}(x)|\,\mathrm{d}x.$$

以上我们介绍的是有限值逻辑系统中公式间的距离,下面我们介绍无穷值逻辑系统中公式间的距离.

定义 3.3. 在模糊逻辑系统 Łuk、 L^* 中,设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,则定义公式φ与ψ间的 H-距离为

$$\rho_H(\varphi,\psi)=\int_{[0,1]^m}|\varphi(x)-\psi(x)|\,\mathrm{d}x, x\in[0,1]^m,$$

其中,$\varphi(x)$与$\psi(x)$是以$[0,1]^m$为定义域、以$\varphi(x)=v_x(\varphi)$为隶属度的公式模糊集.

定义 3.3 中公式间的距离就是文献[14]中由测度导出的公式间的距离,这种导出方式相比文献[14]而言,要更为自然一些.

定义 3.4. 设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,定义公式φ与ψ间的 H-相似度为

$$\xi_H(\varphi,\psi)=1-\rho_H(\varphi,\psi).$$

进一步地,定义公式φ的 H-真度为

$$\tau_H(\varphi)=\xi_H(\varphi,T).$$

下面讨论由标准 Hamming 距离导出的公式间的 H-相似度及 H-真度的性质.

容易证明,在定义 3.4 的意义下两个逻辑等价的公式φ与ψ间的相似度为 1,而矛盾式与重言式的相似度为 0,并且有以下定理成立.

定理 3.3. 设$\varphi,\psi,\chi\in F(S_m)$,且$\varphi\to\psi$与$\psi\to\chi$是重言式,则$\xi_H(\varphi,\psi)\geqslant\xi_H(\varphi,\chi)$.

证明:因为$\varphi\to\psi$与$\psi\to\chi$是重言式,所以$\forall x\in U_m,\varphi(x)\leqslant\psi(x),\psi(x)\leqslant\chi(x)$,进而$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\varphi(x)-\chi(x)|$,所以$\xi_H(\varphi,\psi)\geqslant\xi_H(\varphi,\chi)$. □

由定理 3.3 以及定义 3.4 可知,本文定义的 H-相似度满足一般意义上模糊集间的相似性度量[13].

定理 3.4. 设$\varphi\in F(S_m)$,则$\tau_H(\varphi)=\tau(\varphi)$ (其中,$\tau(\varphi)$为文献[2]中定义的公式φ的真度).

证明:因为

$$\begin{aligned}\tau_H(\varphi)&=\xi_H(\varphi,T)\\&=1-\rho_H(\varphi,T)\\&=1-\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m}(1-\varphi(x_i))\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m}\varphi(x_i)\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k}{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m\mid\varphi(x_i)=\frac{k}{n-1}\right\}\right|\\&=\tau(\varphi).\end{aligned}$$ □

注 3.2.

(i) 定理 3.4 以及下文定理 3.5 中出现的公式φ的真度$\tau(\varphi)$、公式φ与ψ间的相似度$\xi(\varphi,\psi)$、距离$\rho(\varphi,\psi)$的定义与性质可参阅文献[2].

(ii) 由于 H-真度与计量逻辑学中的真度是一致的,所以下文中我们将二者等同看待,统一用τ表示.

定理 3.5. 设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,则

(i) 在 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 $Ł_n$ 中,$\rho_H(\varphi,\psi)=\rho(\varphi,\psi)$;

(ii) 在 n 值 R_0 命题逻辑系统 L_n^* 中,$\rho_H(\varphi,\psi)\neq\rho(\varphi,\psi)$.

证明:(i) 因为

$$\begin{aligned}\rho_H(\varphi,\psi)&=\frac{1}{n^m}\sum_{x_i\in U_m}|\varphi(x_i)-\psi(x_i)|\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m\,\|\,\varphi(x_i)-\psi(x_i)|=\frac{k}{n-1}\right\}\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{n^m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m \mid \varphi(x_i)=\frac{j}{n-1},\psi(x_i)=\frac{t}{n-1},|j-t|=k\right\}\right|\\
&=\frac{1}{n^m}\sum_{l=n-1}^{0}\frac{l}{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m \mid \varphi(x_i)=\frac{j}{n-1},\psi(x_i)=\frac{t}{n-1},|j-t|=l\right\}\right|\\
&=\frac{1}{n^m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-1-k}{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m \mid \varphi(x_i)=\frac{j}{n-1},\psi(x_i)=\frac{t}{n-1},|j-t|=n-1-k=l\right\}\right|\\
&=\frac{1}{n^m}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n-1}\right)\left|\left\{x_i\in U_m \mid (\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)(x_i)=\frac{k}{n-1}\right\}\right|\\
&=\frac{1}{n^m}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m \mid (\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)(x_i)=\frac{k}{n-1}\right\}\right|\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-1}\left|\left\{x_i\in U_m \mid (\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)(x_i)=\frac{k}{n-1}\right\}\right|\right)\\
&=1-\xi(\varphi,\psi)\\
&=\rho(\varphi,\psi).
\end{aligned}
$$

(ii) 令 $\varphi=p\wedge(q\to q),\psi=q\wedge(p\to p)$,在 4 值 R_0 系统中,$\rho_H(\varphi,\psi)=\frac{20}{48},\rho(\varphi,\psi)=\frac{22}{48},\rho_H(\varphi,\psi)\neq\rho(\varphi,\psi)$. □

注 3.3.

(i) 由定义 3.2、定义 3.3、定理 3.5 可以看出,计量逻辑学中的核心概念公式真度、相似度、距离是可以由模糊集间的标准 Hamming 距离表示出来的.这种表示的意义在于我们可以选取适当的模糊距离通过先定义公式的距离,然后定义公式的相似度,最后定义公式真度的方式,建立一种类似于计量逻辑学的程度化推理方法,这也是我们今后继续开展研究的方向之一.

(ii) 从定理 3.4、定理 3.5(ii)可以看出,在 n 值 R_0 逻辑系统中,本文定义的公式距离不同于文献[1]中公式的距离,但由此导出的公式真度是相同的,这是一个很有趣的现象.

4 公式真度的分解定理及实例

本节我们讨论公式真度的分解问题,这个问题的出发点源于对度量空间$(F(S),\rho)$中度量基的考虑和对 Ł$_n$ 中准析取范式的讨论.

定理 4.1(公式真度分解定理). 令 $S_m=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ 是原子命题集 S 中的有限命题集,则$\forall\varphi\in F(S_m)$,存在公式集$\Gamma_m\subseteq F(S_m)$使得

$$\tau(\varphi)=\sum_{\varphi_i\in\Gamma_m}\tau(\varphi_i),$$

其中,$\forall\varphi_i,\varphi_j\in\Gamma_m,\varphi_i\wedge\varphi_j\approx\overline{0}$ (矛盾式),并且 $\varphi\approx\bigvee_{\varphi_i\in\Gamma_m}\varphi_i$.

为证明定理 4.1 需要证明引理 4.1 与引理 4.2.

引理 4.1. 在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 Ł$_n$ 中,设 $F(P)$是由单个原子公式 P 生成的公式集,则有

(i) 当 $n-1$ 为素数时,存在公式序列 $\{\varphi_{ki}\}(i=1,\ldots,n-2,k=1,2,\ldots,n-1)$ 满足条件:公式 φ_{ki} 对应的模糊集第 i 个分量为 $\frac{k}{n-1}$,其余分量为 0,即

$$\varphi_{ki}(x)=\begin{cases}\frac{k}{n-1}, & x=\frac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{i}{n-1}\end{cases}.$$

(ii) 当 $n-1$ 为合数,且 $(i,n-1)=i_t(i_t\geqslant 1)$ 时,存在公式序列 $\{\varphi_{li}\}\left(l=1,\ldots,\frac{n-1}{i_t},i=1,2,\ldots,n-2\right)$ 满足条件:公式

φ_{li} 对应的模糊集第 i 个分量为 $\frac{li_t}{n-1}$,其余分量为 0,即

$$\varphi_{li}(x)=\begin{cases}\frac{li_t}{n-1}, & x=\frac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{i}{n-1}\end{cases}.$$

(iii) 对于任意的自然数 n,存在公式序列 $\{\varphi_i\}(i=1,2,...,n-1)$ 满足条件:公式 φ_i 对应的模糊集第 i 个分量为 1,其余分量为 0,即

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{i}{n-1}\end{cases}.$$

证明:

(i) 当 $n-1$ 是素数时.对于任意的 $i(1\leqslant i<n-1),(i,n-1)=1$, 对 i 用数学归纳法证明.

第 1 步:当 i=1 时,首先构造公式序列 $\{\varphi_k\}(k=1,2,...,n-2)$:

$$\varphi_1=p,\varphi_2=\neg\varphi_1\rightarrow\varphi_1,...,\varphi_{n-2}=\neg\varphi_{n-3}\rightarrow\varphi_1,$$

则公式序列 $\{\varphi_k\}$ 满足:

$$\varphi_1\left(\frac{i}{n-1}\right)=\frac{i}{n-1},$$

$$\varphi_2\left(\frac{i}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{2i}{n-1}, & \frac{i}{n-1}<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{i}{n-1}>\frac{1}{2}\end{cases},$$

$$\varphi_3\left(\frac{i}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{3i}{n-1}, & \frac{i}{n-1}<\frac{1}{3}\\ 1, & \frac{i}{n-1}>\frac{1}{3}\end{cases},$$

...

$$\varphi_{n-2}\left(\frac{i}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{(n-2)i}{n-1}, & \frac{i}{n-1}<\frac{1}{n-2}\\ 1, & \frac{i}{n-1}>\frac{1}{n-2}\end{cases},$$

然后令 $\varphi=\neg\varphi_{n-2}\wedge\varphi_1$, 则

$$\varphi\left(\frac{1}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n-1}, & \frac{i}{n-1}<\frac{1}{n-2}\\ 0, & \frac{i}{n-1}>\frac{1}{n-2}\end{cases}.$$

以上述公式φ为基础构造公式序列 $\{\psi_k\}(k=1,...,n-1)$:

$$\psi_1=\varphi,\psi_2=\neg\psi_1\rightarrow\psi_1,...,\psi_k=\neg\psi_{k-1}\rightarrow\psi_1.$$

最后令 $\varphi_{k1}=\psi_k$, 则有

$$\varphi_{k1}(x)=\begin{cases}\frac{k}{n-1}, & x=\frac{1}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{1}{n-1}\end{cases}.$$

第 2 步:假设 $\frac{i}{n-1}=\frac{r-1}{n-1}<\frac{1}{2}$ 时结论成立,即存在公式序列 $\{\varphi_{ki}\}(i=1,...,n-2),k=1,...,n-1)$ 满足

$$\varphi_{ki}(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{n-1}, & x=\dfrac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\dfrac{i}{n-1}\end{cases}.$$

第 3 步:当 $\dfrac{i}{n}=\dfrac{r}{n-1}<\dfrac{1}{2}$ 时,令 $n-1=kr+q(1\leqslant q<r)$,此时仍分 3 步完成证明.

(1) 构造公式序列 $\{\varphi_i\}(i=1,2,...,k)$

$$\varphi_1=p,\varphi_2=\neg\varphi_1\to p,...,\varphi_k=\neg\varphi_{k-1}\to p,$$

则公式φ_k满足

$$\varphi_k\left(\frac{i}{n-1}\right)=\begin{cases}\dfrac{ki}{n-1}, & \dfrac{i}{n-1}\leqslant\dfrac{1}{k}\\ 0, & \dfrac{i}{n-1}>\dfrac{1}{k}\end{cases}.$$

(2) 令 $\psi=\neg\varphi_k$,则

$$\psi\left(\frac{i}{n-1}\right)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)-ki}{n-1}, & \dfrac{i}{n-1}<\dfrac{r}{n-1}\\ \dfrac{q}{n-1}, & \dfrac{i}{n-1}=\dfrac{r}{n-1}\\ \dfrac{(n-1)-ki}{n-1}, & \dfrac{r}{n-1}<\dfrac{i}{n-1}<\dfrac{1}{k}\\ 0, & \dfrac{i}{n-1}>\dfrac{1}{k}\end{cases},$$

并且对于任意的 $j,j\neq r$ 时,$\psi\left(\dfrac{r}{n-1}\right)\neq\psi\left(\dfrac{j}{n-1}\right)$.

(3) 由归纳假设可知,当 $\psi\left(\dfrac{r}{n-1}\right)=\dfrac{q}{n-1}<\dfrac{1}{2}$ 时,可以构造相应的公式序列 $\{\varphi_{kr}\}(k=1,2,...,n-1)$ 满足

$$\varphi_{kr}(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{n-1}, & x=\dfrac{r}{n-1}\\ 0, & x\neq\dfrac{r}{n-1}\end{cases}.$$

此公式序列$\{\varphi_{kr}\}$便是满足题设要求的公式序列.

最后,当 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{i}{n-1}\leqslant 1$ 时,只需将$\varphi_1=p$ 换成$\varphi_1=\neg p$,方法类似便可证明相应结论.

(ii) 当 $n-1$ 为合数时.假设 $n-1=n_1^{k_1}n_2^{k_2}...n_t^{k_t}$,其中,$n_1,n_2,...,n_t$ 是 $n-1$ 的素因子,分步骤证明如下.

第 1 步:$t=1$ 时,$n-1=n_1^{k_1}$,此时的 $i=1,2,...,n-2$ 可以分为 3 类:第 1 类$(i,n-1)=1$,第 2 类$(i,n-1)=i$,第 3 类 $(i,n-1)=n_1^{t_1}p(p\geqslant 1)$.下面证明中均假设 $\dfrac{i}{n-1}<\dfrac{1}{2}$.

(1) 当$(i,n-1)=1$时,不妨设 $n-1=ki+q(1\leqslant q<i)$,可以利用 $n-1$ 是素数时构造的公式序列 $\{\varphi_i\}$ $(i=1,2,...,k)$,令 $\psi_1=\neg\varphi_k$,则

$$\psi_1\left(\frac{i}{n-1}\right)=\frac{q}{n-1},$$

并且 $j\neq i$ 时,$\psi_1\left(\dfrac{j}{n-1}\right)\neq\dfrac{q}{n-1}$.令

$$n-1=k_1q+q_1(1\leqslant q_1<q<i),$$

以ψ_1 为基础继续构造相应公式序列 $\{\psi_{1i}\}(i=1,2,...,k_1,\psi_{1i}=\neg\psi_{1i-1}\to\psi_1)$.若在公式序列 $\{\psi_{1i}\}$ 中可以找到一个公

式 ψ_{1i}^*, 使得这个公式与公式序列 $\{\varphi_i\}$ 中某个公式 φ_j^* 在 $\frac{i}{n-1}$ 处的值相差为 $\frac{1}{n-1}$, 则令 $\varphi=\neg\psi_{1i}^*\to\varphi_j^*$, 或令 $\varphi=\psi_{1i}^*\to\varphi_j^*$. 以 φ 为基础,重复(i)中构造 φ_{k1} 的过程,便可得到相应结论.否则,再以 $n-1=k_2q_1+q_2$ 为基础重复以上过程,直到找到两个公式在 $\frac{i}{n-1}$ 处的差值为 $\frac{1}{n-1}$ 为止,这个可由(i,n)=1 保证.

(2) 当 $i=n_1^{t_1},(i,n-1)=i$ 时,设 $i_t=n_1^{k_1-t_1}=k$, 令

$$\varphi_1=p,\varphi_2=\neg\varphi_1\to p,\dots,\varphi_k=\neg\varphi_{k-1}\to p,$$

则有

$$\varphi_k\left(\frac{r}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{kr}{n-1}, & \frac{r}{n-1}<\frac{i}{n-1}<\frac{1}{k}\\ 1, & \frac{r}{n-1}\geqslant\frac{i}{n-1}\geqslant\frac{1}{k}\end{cases}.$$

公式 φ_k 对应的模糊集为 $\left(0,\frac{k}{n-1},\frac{2k}{n-1},\dots,\frac{k(i-1)}{n-1},1,\dots,1\right)$.

令 $\psi_1=\neg\varphi_k$, 然后构造递归公式序列 $\{\psi_j\}(j=1,2,\dots,i):\psi_j=\neg\psi_{j-1}\to\psi_1$, 直到得到 ψ_i 对应的模糊集为

$$(\underbrace{1,1,\dots,1}_{i},0,\dots,0).$$

再令 $\chi=\neg\psi_i\wedge p$, 则 χ 对应的模糊集为 $(\underbrace{0,0,\dots,0}_{i-1},\frac{i}{n-1},1,\dots,1)$. 以 χ 为基础继续构造公式序列 $\{\chi_i\}(i=1,2,\dots,k-1):\chi_1=\chi,\chi_2=\neg\chi_1\to\chi_1,\chi_3=\neg\chi_2\to\chi_1,\dots,\chi_{k-1}=\neg\chi_{k-2}\to\chi_1$, 则 χ_{k-1} 对应的模糊集为

$$\left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{i-1},\frac{(k-1)i}{n-1},1,\dots,1\right).$$

最后,令 $\omega=\neg\chi_{k-1}\wedge\chi$, 则有

$$\omega\left(\frac{r}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{i}{n-1}, & \frac{r}{n-1}=\frac{i}{n-1}\\ 0, & \frac{r}{n-1}\neq\frac{i}{n-1}\end{cases}.$$

以公式 ω 为基础依次构造公式 $\omega_1=\omega,\omega_2=\neg\omega_1\to\omega,\dots,\omega_k=\neg\omega_{k-1}\to\omega$, 则

$$\omega_l(x)=\begin{cases}\frac{li}{n-1}, & x=\frac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{i}{n-1}\end{cases},$$

其中, $l=1,2,\dots,k$, w_l 就是符合要求的公式列 φ_{li}.

(3) 当 $(i,n)=n_1^{t_1}p,(i,n-1)=n_1^{t_1}$ 时,令 $i_t=n_1^{k_1-t_1}=k$.

构造公式序列 $\varphi_k:\varphi_k=\neg\varphi_{k-1}\to\varphi_1$. 可以证明序列 $\{\varphi_k\}$ 是一个单调递增序列.与此同时,每一个公式 φ_k 作为 I_n 上的函数本身也是单调递增的.由此可推知,存在 $k'<k$, 使得

$$\varphi_{k'}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{k'r}{n-1}, & \frac{r}{n-1}<\frac{i}{n-1}\\ \frac{n_1}{n-1}, & \frac{r}{n-1}=\frac{i}{n-1}\\ 1, & \frac{r}{n-1}>\frac{i}{n-1}\end{cases}.$$

再次以公式 $\varphi_{k'}$ 为基础构造相应的公式序列 $\varphi_{li}(l=1,2,\dots,i_t)$ 满足:

$$\varphi_{li}(x)=\begin{cases}\dfrac{li_t}{n-1}, & x=\dfrac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\dfrac{i}{n-1}\end{cases}.$$

第 2 步:假设 n–1 含有 t–1 个素因子时结论成立,即存在公式序列 $\{\varphi_{li}\}\left(l=1,\dots,\dfrac{n-1}{i_t},i=1,2,\dots,n-2\right)$,满足

$$\varphi_{li}(x)=\begin{cases}\dfrac{li_t}{n-1}, & x=\dfrac{i}{n-1}\\ 0, & x\neq\dfrac{i}{n-1}\end{cases}.$$

第 3 步:当 n–1 含有 t 个素因子时,可以令 $n_1^{k_1}n_2^{k_2}\dots n_{t-1}^{k_t}=p$ 重复前面的步骤,便可得到相应结论.

第 4 步:对于 $\dfrac{i}{n-1}\geqslant\dfrac{1}{2}$,只需将上述证明中的 p 换成$\neg p$ 便可得到相应结论.

(iii) 该结论是(i)与(ii)的直接推论. □

引理 4.2. 在 n 值命题逻辑系统 $Ł_n$ 中,设 $F(P)$是由单个原子公式 P 生成的公式集,则

(i) 存在公式φ使得

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

(ii) 存在公式ψ使得

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x\neq 1.\end{cases}$$

证明:

(i) 令 $\varphi_1=p,\varphi_2=\neg\varphi_1\to\varphi_1,\dots,\varphi_n=\neg\varphi_{n-1}\to\varphi_1$,然后令 $\varphi=\neg\varphi_n$,便可得到相应结论.

(ii) 令 $\varphi_1=\neg p,\varphi_2=\neg\varphi_1\to\varphi_1,\dots,\varphi_n=\neg\varphi_{n-1}\to\varphi_1$,然后令 $\varphi=\neg\varphi_n$,便可得到相应结论. □

定理 4.1 的证明:

(i) n–1 为素数

当 m=1 时,$\forall\varphi\in F(P)$,由引理 4.2 可知,存在公式$\varphi_0\in F(P)$满足 $\varphi(x_1)=\varphi_0(x_1)=1,\varphi_0(x)=0(x\neq x_1)$,或者存在公式$\varphi_1\in F(P)$满足 $\varphi(x_{n^m})=\varphi_1(x_{n^m})=1,\varphi_1(x)=0(x\neq x_{n^m})$. 此处, $x_1=(0,\dots,0),x_{n^m}=(1,\dots,1)$, 以下为方便起见,用 0 代表 x_1,用 1 代表 x_{n^m}.

与此同时,由引理 4.1 可知,存在公式$\varphi_{ki}\in F(P)$,满足 $\varphi\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=\varphi_{ki}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=\dfrac{k}{n-1}$, 而 $\varphi_{ki}\left(\dfrac{j}{n-1}\right)=0(j\neq i)$.

此时,依据公式φ在 x=0 与 x=1 的取值情况,取Γ_1如下:

(1) $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 时.取 $\Gamma_1=\left\{\varphi_{ki}\in F(p)\mid\varphi_{ki}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=\dfrac{k}{n-1},i=1,\dots,n-2\right\}$;

(2) $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$ 时.取 $\Gamma_1=\left\{\varphi_{ki}\in F(p)\mid\varphi_{ki}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=\dfrac{k}{n-1},i=1,\dots,n-2\right\}\cup\{\varphi_1\}$;

(3) $\varphi(0)=1,\varphi(1)=0$ 时.取 $\Gamma_1=\left\{\varphi_{ki}\in F(p)\mid\varphi_{ki}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=\dfrac{k}{n-1},i=1,\dots,n-2\right\}\cup\{\varphi_0\}$;

(4) $\varphi(0)=\varphi(1)=1$ 时.取 $\Gamma_1=\left\{\varphi_{ki}\in F(p)\mid\varphi_{ki}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=\dfrac{k}{n-1},i=1,\dots,n-2\right\}\cup\{\varphi_0\}\cup\{\varphi_1\}$,

则 $\forall\varphi_i,\varphi_j\in\Gamma_1,\varphi_i\wedge\varphi_j\approx\overline{0}$, 并且有 $\tau(\varphi)=\sum\limits_{\varphi_i\in\Gamma_1}\tau(\varphi_i),\varphi\approx\bigvee\limits_{\varphi_i\in\Gamma_1}\varphi_i$.

当 m>1 时,用 $\varphi_{ki}^{p_t}$ 表示由原子公式 p_t 生成的公式中在 $\dfrac{i}{n-1}$ 处赋值为 $\dfrac{k}{n-1}$,其余 $\dfrac{j}{n-1}$ 处赋值为 0 的公式(此

时,默认 $\frac{i}{n-1}=0$ 时, $\frac{k}{n-1}$ 只能取 0 或者 1).特别地, $\varphi_{n-1i}^{p_t}$ 表示原子公式 p_t 生成的在 $\frac{i}{n-1}$ 处赋值为 1、其余 $\frac{j}{n-1}$ 处赋值为 0 的公式.

设 $x=(x_1,...,x_m)\in I_n^m,\forall\varphi\in F(S_m),\varphi(x)=\frac{k}{n-1}$. 此时,不妨设 $x_1=\frac{i}{n-1}\neq 0,1$.

构造公式

$$\psi_x=\varphi_{kx_1}^{p_1}\wedge\varphi_{n-1x_2}^{p_2}\wedge...\wedge\varphi_{n-1x_m}^{p_m},$$

则 $\psi_x(x)=\psi_x(x_1,...,x_m)=\varphi_{kx_1}^{p_1}(x_1)\wedge\varphi_{n-1x_2}^{p_2}(x_2)\wedge...\wedge\varphi_{n-1x_m}^{p_{m1}}(x_m)=\frac{k}{n-1}\wedge 1...\wedge 1=\frac{k}{n-1}$, 且在 $y=(y_1,...,y_m)\neq x$ 时,存在 $x_i\neq y_i$,不妨设 $x_1\neq y_1$ 或者 $x_2\neq y_2$,其余的相同,则

$$\psi_x(y)=\varphi_{kx_1}^{p_1}(y_1)\wedge\varphi_{n-1x_2}^{p_2}(x_2)\wedge...\wedge\varphi_{n-1x_m}^{p_m}(x_m)=0\wedge 1...\wedge 1=0,$$

或者有

$$\psi_x(y)=\varphi_{kx_1}^{p_1}(x_1)\wedge\varphi_{n-1x_2}^{p_2}(y_2)\wedge...\wedge\varphi_{n-1x_m}^{p_m}(x_m)=\frac{k}{n-1}\wedge 0\wedge 1\wedge...\wedge 1=0.$$

总之,当 $y\neq x$ 时, $\psi_x(y)=0$,所以得到如下结论.

对于由 $S_m=\{p_1,p_2,...,p_m\}$ 生成的公式集 $F(S_m)$而言,存在公式 ψ_x 满足

$$\psi_x(y)=\begin{cases}\frac{k}{n-1}, & y=x\\ 0, & y\neq x\end{cases}.$$

所以,对于公式 φ 而言,存在公式集 $\Gamma_m=\{\psi_k\in F(S_m)\,|\,\psi_k(x)=\varphi(x),\psi_k(y)=0,y\neq x,k=1,...,n^m\}$ 使得

$$\tau(\varphi)=\sum_{k=1}^{n^m}\tau(\psi_k),$$

并且 $\psi_i\wedge\psi_j\approx\overline{0},\varphi\approx\bigvee_{k=1}^{n^m}\psi_k$.

(ii) $n-1$ 为合数

假设 $\varphi(x)=\frac{k}{n-1}$, 若 $x=(x_1,...,x_m)$ 中存在分量 x_i,使得 x_i 取值为 $\frac{j}{n-1}$ 中的 j 与 $n-1$ 互素,则以公式 $\psi_{kx_i}^{p_i}$ 为基础仿照(1)中的证明,构造相应的公式序列加以证明.

若 $x=(x_1,...,x_m)$ 中每一个分量的分子分母均有大于 1 的公因子,则在 x 中一定存在一个分量 $x_i=\frac{j}{n-1}$ 使得 k 与 j 的公因子整除 k,否则,不存在公式 φ,使得 $\varphi(x)=\frac{k}{n-1}$ (见引理 4.1(ii)),此时,以 $\psi_{kx_i}^{p_i}$ 为基础仿照(1)中的证明构造相应的公式序列,便可得到相应结论.

综上所证, $\forall\varphi\in F(S_m)$存在公式集 Γ_m, 使得 $\tau(\varphi)=\sum_{\varphi_i\in\Gamma_m}\tau(\varphi_i)$, 并且 $\forall\varphi_i,\varphi_j\in\Gamma_m,\varphi_i\wedge\varphi_j\approx\overline{0},\varphi\approx\bigvee_{\varphi_i\in\Gamma_m}\varphi_i$.

作为分解定理的应用,我们看如下两个例子.

例 4.1:在 Łukasiewicz 4 值命题逻辑系统 Ł$_4$ 中,有如下真值表,见表 2.

Table 2 Truth table for the formulas in Ł$_4$

表 2 Ł$_4$ 中公式的真值表

	φ_0	φ_{11}	φ_{21}	φ_{31}	φ_{12}	φ_{22}	φ_{32}	φ_1	χ
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0

其中,

$\varphi_0=\neg(\neg(\neg p\to p)\to(\neg p\to p)),\varphi_{11}=\neg(\neg p\to p)\wedge p,$

$\varphi_{21}=\neg(\neg(\neg p\to p)\wedge p)\to(\neg(\neg p\to p)\wedge p),\varphi_{31}=\neg\varphi_{21}\to\varphi_{11},\varphi_{12}=\neg(p\to\neg p)\wedge\neg p,$

$\varphi_{22}=\neg\varphi_{12}\to\varphi_{12}\ \varphi_{32}=\neg\varphi_{22}\to\varphi_{12},\varphi_1=\neg(\neg(p\to\neg p)\to(p\to\neg p)).$

公式χ满足 $\chi(0)=1,\chi\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},\chi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3},\chi(1)=0,$ 则 $\chi=\varphi_0\vee\varphi_{21}\vee\varphi_{12}.$

例 4.2:在 Łukasiewicz 7 值命题逻辑系统 $Ł_7$ 中,设

$\varphi_0=\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg p\to p)\to p)\to p)\to p)\to p),\varphi_{11}=\neg(\neg(\neg p\to p)\to p)\wedge p,$

$\varphi_{21}=\neg\varphi_{11}\to\varphi_{11},\varphi_{31}=\neg\varphi_{21}\to\varphi_{21},\varphi_{41}=\neg\varphi_{31}\to\varphi_{31},\varphi_{51}=\neg\varphi_{41}\to\varphi_{41},\varphi_{61}=\neg\varphi_{51}\to\varphi_{51},$

$\varphi_{22}=\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg p\to p))\to\neg(\neg p\to p))\wedge p\to(\neg(\neg(\neg(\neg p\to p))\to\neg(\neg p\to p))\wedge p))\wedge$
$(\neg(\neg(\neg(\neg p\to p))\to\neg(\neg p\to p))\wedge p),\ \varphi_{42}=\neg\varphi_{22}\to\varphi_{22},\varphi_{62}=\neg\varphi_{42}\to\varphi_{22},\ldots,$

$\varphi_1=\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(p\to\neg p)\to\neg p)\to\neg p)\to\neg p)\to\neg p).$

公式χ满足 $\chi(0)=1,\chi\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6},\chi\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{2}{6},\chi\left(\frac{3}{6}\right)=1,\chi\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{2}{6},\chi\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{6},\chi(1)=1,$ 则

$$\chi=\varphi_0\vee\varphi_{11}\vee\varphi_{22}\vee\varphi_{63}\vee\varphi_{24}\vee\varphi_{35}\vee\varphi_1.$$

Table 3 Truth table for the formulas in $Ł_7$

表 3 $Ł_7$ 中公式的真值表

	φ_0	φ_{11}	φ_{61}	…	φ_{33}	φ_{63}	…	φ_1	χ
0	1	0	0	…	0	0	…	0	1
$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	1	…	0	0	…	0	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{6}$	0	0	0	…	0	0	…	0	$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{6}$	0	0	0	…	0	0	…	0	$\frac{1}{6}$
$\frac{4}{6}$	0	0	0	…	0	0	…	0	$\frac{1}{6}$
$\frac{5}{6}$	0	0	0	…	0	0	…	0	$\frac{1}{6}$
1	0	0	0	…	0	0	…	0	$\frac{1}{6}$

注 4.1. 在例 4.1 与例 4.2 中,公式χ是任意选取的一个公式,公式χ的真度可以表示成一些互不相容的公式的真度和以及公式χ逻辑等价于这些公式的并.这从一个侧面反映了 $Ł_n$ 系统中公式真度的特点.

5 公式真度的取值及公式集的相容性

在本节中我们将讨论两方面的问题:一个是公式真度的取值问题,另一个是具有相同真度的公式集的相容性问题.关于第 1 个问题,本文将给出一个不同于文献[19]的证明方法.关于第 2 个问题,虽然也有文献涉及[20],但该文献只涉及闭理论的相容性,并未涉及具有相同真度的公式集合的相容性问题,且该文献中相关结论的证明用到了 McNaughton 函数,不易理解,而本文相比较文献[20],考虑得更为细致,最后,文献[20]中相关结论均可由本文的方法推出.

下面我们先看公式真度的取值问题.

定理 5.1. 命题逻辑系统 $Ł_n$ 中,公式的真度之集

$$H=\left\{\frac{k}{n^m(n-1)}\mid k=0,1,\ldots,n^m(n-1),m=1,2,\ldots\right\}.$$

证明:只需证明 $\forall \frac{k}{n^m(n-1)} \in H$, 存在一个公式$\varphi$,满足 $\tau(\varphi)=\frac{k}{n^m(n-1)}$.

情形 1.当 k=0 或 $k=n^m(n-1)$ 时,可以构造矛盾式与重言式满足上述要求.

情形 2.当 k=1 时,$F(S_m)$中公式φ对应的模糊集长度为 n^m,考察元素$\left(\frac{1}{n-1},0,\ldots,0\right)$隶属于不同模糊集的隶属度.由定理 4.1 的证明可知,可以构造公式 $\varphi=\varphi_{1x_1}^{p_1}\wedge\varphi_{n-1x_2}^{p_2}\wedge\ldots\wedge\varphi_{n-1x_m}^{p_m}$, 满足 $\tau(\varphi)=\frac{1}{n^m(n-1)}$.

情形 3.当$1<k<n^m(n-1)$时,分情形证明.

(1) 当$(n-1)/k$时,令$k=(n-1)l$.

任意选取 l 个 I_n^m 中的向量 $x_t(t=1,2,\ldots,l)$, x_{ti}表示第 t 个向量的第 i 个分量,以 x_t为基础,构造公式序列

$$\varphi_t=\varphi_{n-1x_{t1}}^{p_1}\wedge\varphi_{n-1x_{t2}}^{p_2}\wedge\ldots\wedge\varphi_{n-1x_{tm}}^{p_m},$$

则有 $\varphi_t(x_t)=1,\varphi_t(x_j)=0(j\neq t)$. 再令

$$\varphi=\mathop{\vee}_{t=1}^{l}\varphi_t,$$

则 $\varphi(x_t)=1,\varphi(x)=0(x\in I_n^m-\{x_t\})$. 所以, $\tau(\varphi)=\frac{l}{n^m}=\frac{k}{n^m(n-1)}$, 公式 φ 满足题设条件.

(2) 当$(n-1)\nmid k$时,令$k=(n-1)l+q(0\leqslant l<n^m)$.

首先取 $x=\left(\frac{1}{n-1},0,\ldots,0\right)$, 构造公式 $\psi_{qx_1}^{p_1}$, 则 $\psi_{qx_1}^{p_1}(x)=\frac{q}{n-1}$, $\psi_{qx_1}^{p_1}(y)=0(y\neq x)$. 然后在 $I_n^m-\{x\}$ 中任意选取 l 个不同的向量 $\{x_t\}(t=1,2,\ldots,l)$, 令

$$\varphi_t=\varphi_{n-1x_{t1}}^{p_1}\wedge\varphi_{n-1x_{t2}}^{p_2}\wedge\ldots\wedge\varphi_{n-1x_{tm}}^{p_m},$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi_t(x_t)&=(\varphi_{n-1x_{t1}}^{p_1}\wedge\varphi_{n-1x_{t2}}^{p_2}\wedge\ldots\wedge\varphi_{n-1x_{tm}}^{p_m})(x_t)\\&=\varphi_{n-1x_{t1}}^{p_1}(x_{t1})\wedge\varphi_{n-1x_{t2}}^{p_2}(x_{t2})\wedge\ldots\wedge\varphi_{n-1x_{tm}}^{p_m}(x_{tm})\\&=1\wedge1\wedge\ldots\wedge1=1.\end{aligned}$$

并且, $\varphi_t(x_j)=0(j\neq t)$. 再令

$$\varphi=\psi_{qx_1}^{p_1}\vee(\mathop{\vee}_{t=1}^{l}\varphi_t),$$

则 $\varphi(x)=\frac{q}{n-1}$, $\varphi(x_t)=1$, $\varphi(y)=0(y\neq x,y\neq x_t)$. 所以,

$$\tau(\varphi)=\frac{1}{n^m}\left(l+\frac{q}{n-1}\right)=\frac{(n-1)l+q}{n^m(n-1)}=\frac{k}{n^m(n-1)}.$$

公式φ满足题设条件. □

注 5.1. 文献[19]中对上述结论的证明用到了 McNaughton 函数,相对来说比较抽象,而本文用到的构造性方法,看上去要更加具体一些.

推论 5.1. 在逻辑系统 Ł$_n$ 中,公式的真度之集在[0,1]区间稠密.

定理 5.2. 设 $0\leqslant\alpha<1$, 令 $\Delta=\{\varphi\mid\tau(\varphi)=\alpha,\varphi\in F(p)\}$, 则

(i) 当 $\alpha\leqslant\frac{n-1}{n}$ 时,公式集Δ是不相容命题集;

(ii) 当 $\frac{n-1}{n}<\alpha\leqslant1$ 时,公式集Δ是相容命题集.

证明:

(i) 当 n−1 为素数时.

情形 1.α=0.Δ显然是不相容命题集.

情形 2. $\alpha=\dfrac{1}{n(n-1)}$. 可以通过引理 4.1 构造公式的方法构造公式 $\psi_1,\dots,\psi_{n-2}$, 其对应的 n 值模糊集依次为

$$\left(0,\frac{1}{n-1},0,\dots,0\right),\left(0,0,\frac{1}{n-1},0,\dots,0\right),\dots,\left(0,0,\dots,\frac{1}{n-1},0\right),$$

则 $\tau(\psi_i)=\dfrac{1}{n(n-1)}(i=1,\dots,n-2)$.

令 $\varphi=\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n-2}\psi_i$, 则 $\varphi\in D(\Delta)$, Δ 是不相容命题集.

情形 3. $\alpha=\dfrac{n-1}{n}$. 可以构造公式 $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$, 其对应的 n 值模糊集依次为

$$(0,1,1,\dots,1),(1,0,1,\dots,1),\dots,(1,1,\dots,1,0),\ \ \tau(\psi_i)=\frac{n-1}{n}(i=1,\dots,n).$$

令 $\varphi=\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n}\psi_i$, 则 $\varphi\in D(\Delta)$, Δ 是不相容命题集.

情形 4.当 $\alpha=\dfrac{k}{n(n-1)}, 1<k<(n-1)^2$ 时,分情况证明.

(1) 当 $(n-1)/k$ 时,令 $k=(n-1)l$, 可以构造公式 $\psi_1,\dots,\psi_{l+1}$, 其对应的 n 值模糊集依次为

$$\left(\underbrace{1}_{1},0,\underbrace{1,\dots,1}_{l-1},0,\dots,0\right),\left(\underbrace{1,\dots,1}_{2},0,\underbrace{1,\dots,1}_{l-2},0,\dots,0\right),\dots,\left(\underbrace{1,\dots,1}_{l},0,\dots,0\right),\left(0,\underbrace{1,\dots,1}_{l},0,\dots,0\right),$$

$$\tau(\psi_i)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n(n-1)}(i=1,\dots,l+1).$$

令 $\varphi=\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{l+1}\psi_i$, 则 $\varphi\in D(\Delta)$, Δ 是不相容命题集.

(2) 当 $(n-1)\nmid k$ 时,令 $k=(n-1)l+q(l<n-1,q\leqslant n-2)$. 此时,可以构造公式 $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$, 其对应的 n 值模糊集依次为

$$\left(\underbrace{1}_{1},0,\frac{q}{n-1},\underbrace{1,\dots,1}_{l-1},0,\dots,0\right),\left(\underbrace{1,\dots,1}_{2},0,\frac{q}{n-1},\underbrace{1,\dots,1}_{l-2},0,\dots,0\right),\dots,\left(\underbrace{1,\dots,1}_{l},0,\frac{q}{n-1},0,\dots,0\right),$$

$$\left(1,\frac{q}{n-1},0,\underbrace{1,\dots,1}_{l-1},0,\dots,0\right),\left(0,0,\frac{q}{n-1},\underbrace{1,\dots,1}_{l-1},0,\dots,0,1\right),$$

则 $\tau(\psi_i)=\dfrac{1}{n}\left(l+\dfrac{q}{n-1}\right)=\dfrac{(n-1)l+q}{n(n-1)}=\dfrac{k}{n(n-1)}(i=1,\dots,l)$, 令 $\varphi=\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{l}\psi_i$, 则 $\varphi\in D(\Delta)$, Δ 是不相容命题集.

当 n–1 为合数时,分情形证明.

情形 1.当 $\alpha=0,\alpha=\dfrac{n-1}{n}$ 时,可以仿照 n–1 是素数的情形构造相应公式,证明Δ是不相容命题集.

情形 2.当 $\alpha=\dfrac{1}{n(n-1)}$ 时,假设 $\{1,2,\dots,n-2\}$ 中与 n–1 互素的数字为 $r_1,r_2,\dots,r_t$, 则构造公式序列 $\psi_1,\dots,\psi_t$, 其对应的 n 值模糊集合在第 r_i+1 个分量处为 $\dfrac{1}{n-1}$, 其余分量处全为 0,则 $\tau(\psi_i)=\dfrac{1}{n-1}$, $\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{t}\psi_i\in D(\Delta)$, Δ 是不相容命题集.

情形 3.当 $\alpha=\dfrac{k}{n(n-1)}, 1<k<(n-1)^2$ 时,分情况证明如下.

(1) 当 $(n-1)/k$ 时,可以仿照 n–1 是素数的情形构造相应公式,证明Δ是不相容命题集.

(2) 当 $(n-1)\nmid k$ 时,令 $k=(n-1)l+q(l<n-1,q\leqslant n-2)$. 构造公式 $\psi_1,\dots,\psi_{l+2}$, 满足

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{q}{n-1}, & x=\dfrac{1}{n-1}\\ 1, & x=\dfrac{2}{n-1},\dots,\dfrac{l+1}{n-1},\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\psi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{q}{n-1}, & x=\dfrac{1}{n-1}\\ 1, & x=0,\dfrac{2}{n-1},\dots,\dfrac{i-1}{n-1},\dfrac{i+1}{n-1},\dots\dfrac{l+1}{n-1}(2\leqslant i<l)'\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\psi_{l+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{q}{n-1}, & x=\dfrac{1}{n-1}\\ 1, & x=0,\dfrac{2}{n-1},\dots,\dfrac{l}{n-1},\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\psi_{l+2}(x)=\begin{cases}\dfrac{q}{n-1}, & x=\dfrac{n-2}{n-1}\\ 1, & x=0,\dfrac{2}{n-1},\dots,\dfrac{l+1}{n-1},\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

则 $\tau(\psi_i)=\dfrac{k}{n(n-1)},\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{l+2}\psi_i\in D(\Delta)$,$\Delta$ 是不相容命题集.

(ii) $\dfrac{n-1}{n}<\alpha\leqslant 1$.

此时, $\alpha=\dfrac{1}{n}\left(n-1+\dfrac{i}{n-1}\right)(i=1,2,\dots,n-1),\forall\varphi\in\Delta,\varphi(0)=\varphi(1)=1$. 否则, $\tau(\alpha)\leqslant\dfrac{n-1}{n}$, 并且 $\varphi(0)=\varphi^2(0)=\dots=\varphi^n(0)=1$. 若 $\varphi,\psi\in\Delta$, 则 $\varphi^n\otimes_L\psi^n\not\approx\bar{0}$,$\Delta$ 是相容集.此处, $\varphi^n=\varphi\otimes_L\varphi^{n-1},\varphi\otimes\psi=\neg(\varphi\to_L\psi)$. □

定理 5.3. 令 $S_m=\{p_1,\dots,p_m\},0\leqslant\alpha<1,\Delta=\{\varphi\mid\tau(\varphi)=\alpha,\varphi\in F(S_m)\}$, 则

(i) 当 $\alpha\leqslant 1-\dfrac{1}{n^m}$ 时,公式集Δ是不相容命题集;

(ii) 当 $1-\dfrac{1}{n^m}<\alpha\leqslant 1$ 时,公式集Δ是相容命题集.

推理 5.2[20]. 令 $S=\{p_1,p_2,\dots\},0\leqslant\alpha<1,\Delta=\{\varphi\mid\tau(\varphi)=\alpha,\varphi\in F(S)\}$, 则公式集$\Delta$是不相容命题集.

证明:任意 $\alpha\in[0,1)$, 取 m 为不超过 $In^{\frac{1}{1-\alpha}}\big/In^n$ 的最大整数,即 $m=\left[In^{\frac{1}{1-\alpha}}\big/In^n\right]$, 则 $\alpha<1-\dfrac{1}{n^m}$. 由定理 5.3 可知,Δ 是不相容命题集. □

定理 5.4. 基于逻辑系统 Ł$_n$ 的逻辑度量空间$(F(S),\rho)$是不完备度量空间.

证明:由于真度之集 H 在[0,1]中稠密,所以, $\forall\alpha\in[0,1],\alpha\notin H$, 存在 H 中的一个单调下降序列$\{\alpha_n\}$满足 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\alpha$.

$\forall\varepsilon>0$,选取足够大的 m,使得 $\alpha_n-\alpha_{n+m}<\varepsilon$. 由推论 4.1 可知,存在 $F(S)$中的公式序列φ_i 满足 $\tau(\varphi_i)=\alpha_i$, $\tau(\varphi_i\to\varphi_{i-1})=1$. 此时,

$$\varphi_n\vee\varphi_{n+m}\approx\varphi_n,\varphi_n\wedge\varphi_{n+m}\approx\varphi_{n+m},$$

$$\tau(\varphi_n)-\tau(\varphi_{n+m})<\varepsilon,\rho(\varphi_n,\varphi_{n+m})=\tau(\varphi_n\vee\varphi_{n+m})-\tau(\varphi_n\wedge\varphi_{n+m})=\alpha_n-\alpha_{n+m}<\varepsilon.$$

公式序列$\{\varphi_i\}$是$(F(S),\rho)$中的 Cau-chy 序列,但$\{\varphi_i\}$不收敛.

假设$\{\varphi_i\}$收敛于公式φ,则有 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\rho(\varphi_n,\varphi)=0$.

因为 $\rho(\varphi_n,\varphi)=\tau(\varphi_n\vee\varphi)-\tau(\varphi_n\wedge\varphi)\geqslant\tau(\varphi_n)-\tau(\varphi),\rho(\varphi,\varphi_n)\geqslant\tau(\varphi)-\tau(\varphi_n)$, 所以,

$$|\tau(\varphi)-\tau(\varphi_n)|\leqslant\rho(\varphi,\varphi_n).$$

由 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\rho(\varphi_n,\varphi)=0$ 可知, $\tau(\varphi_n)=\tau(\varphi)=\alpha$, 而 $\alpha\notin H$, 矛盾! $\{\varphi_i\}$序列不收敛,$(F(S),\rho)$是不完备度量空间. □

6 广义 MP 及多重广义 MP 问题三-I 真度解的存在性

本节中,我们将利用构造性方法给出模糊推理中三-I 算法的计量逻辑学基础.

以下问题称为广义 MP 问题:

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & \varphi\to\psi \\ & \varphi^* \\ \hline \text{求} & \psi^* \end{array} \qquad \varphi,\psi,\varphi^*,\psi^*\in F(S)$$

以下问题称为多重广义 MP 问题:

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & \varphi_i\to\psi_i \\ & \varphi_i^* \\ \hline \text{求} & \psi^* \end{array} \qquad \varphi_i,\psi_i,\varphi_i^*,\psi^*\in F(S),i=1,2,...,n.$$

定义 6.1. 设 $\varphi,\psi,\varphi^*,\psi^*,\varphi_i,\psi_i,\varphi_i^*,\psi^*\in F(S),i=1,2,...,n$. 在 $Ł_n$ 中,

(i) 广义 MP 问题的三-I 真度解 ψ^* 是 $F(S)$中使得下式成立的具有最小真度的公式 ψ^*:

$$\tau((\varphi\to\psi)\to(\varphi^*\to\psi^*))=1.$$

(ii) 多重广义 MP 问题的三-I 真度解 ψ^* 是 $F(S)$中使得下式成立的具有最小真度的公式 ψ^*:

$$\tau((\varphi_i\to\psi_i)\to(\varphi_i^*\to\psi^*))=1,\ i=1,2,...,n.$$

由于在 $Ł_n$ 中 $\varphi\to(\psi\to\chi)\approx\varphi\otimes\psi\to\chi$, 所以广义 MP 问题的三-I 真度解的存在性问题归结为求满足 $\tau((\varphi\to\psi)\otimes\varphi^*\to\psi^*)=1$ 的具有最小真度的公式 ψ^* 的问题.在此问题中,如果记 $(\varphi\to\psi)\otimes\varphi^*$ 为公式ω,记 ψ^* 为公式χ,则上述问题归结为方程 $\tau(\omega\to\chi)=1$ 是否有解的问题.关于方程 $\tau(\omega\to\chi)=1$ 解的存在性问题有如下结论.

定理 6.1. 设 $\varphi(p_1,...,p_m)\in F(S).p_1,...,p_m$ 是在公式φ中出现的原子公式.若 $\tau(\varphi)=\alpha,\tau(\varphi\to\chi)=1$, 则当限制公式$\chi$中只包含 $p_1,...,p_m$ 时,上述等式中χ的等价类可以统计出来.

证明:由于公式 $\varphi(p_1,...,p_m)$ 含有 m 个原子公式,所以φ对应的模糊集长度为 n^m.

当 $n-1$ 为素数时.

设 $\Lambda_i=\left\{x\in U_m\mid\varphi(x)=\dfrac{i}{n-1}\right\}(i=0,1,...,n-1)$, 并令 $|\Lambda_i|=k_i$ 则由 $\tau(\varphi)=\alpha$ 可知 $\sum_{i=1}^{n-1}ik_i=k$.

在引理 4.1 证明过程中将公式$\varphi_1=p$ 换成$\varphi_1=\varphi$,利用引理 4.1 构造公式的方法可以构造一个公式序列$\{\psi_{ji}\}$ $(i=1,2,...,n-i)$ 满足

$$\psi_{ji}(x)=\begin{cases}\dfrac{j}{n-1}, & x\in\Lambda_i\\ 0, & y\neq x\end{cases},$$

则上述构造的公式ψ_{ji} 满足 $\psi_{ji}(x)=\dfrac{j}{n-1}\geqslant\dfrac{i}{n-1}=\chi(x),\psi(y)=0(y\neq x)$, 这样的公式共有 $(n-i)^{k_i}$ 个,并且不同的ψ_{ji} 两两互不相容,记 $\Phi_i=\{\psi_{ji}(x)\mid j=i,i+1,...,n-1\}$.

与此同时,为保证 $\tau(\varphi\to\chi)=1$ 要求公式χ在公式φ赋值为 1 的元素处赋值为 1,这时仍然将引理 4.1 中的$\varphi_1=p$ 换成$\varphi_1=\varphi$,并构造相应的公式.由于 $|\Lambda_{n-1}|=k_{n-1}$, 则在每一个 $x_i\in\Lambda_{n-1}$ 处可以构造唯一一个公式 ψ_i 满足$\psi_i(x_i)=1$,令 $\tilde{\psi}=\vee\psi_i$, 则 $\forall x\in\Lambda_{n-1},\tilde{\psi}(x)=1$, 这样的 $\tilde{\psi}$ 只有 1 个.

最后,在φ赋值为 0 的元素处.

此时,将Λ_0 分为两类,一类是Λ_0 中的向量 x,其分量中只包含 0 或 1 并用 $\widehat{\Lambda}_0$ 表示,其元素个数为 t_1.另一类是

Λ_0中的向量 x,其分量中至少有一个不等于 0 或 1 并用 $\breve{\Lambda}_0$ 表示,其元素个数为 t_2,即 $\Lambda_0=\hat{\Lambda}_0\cup\breve{\Lambda}_0,\hat{\Lambda}_0\cap\breve{\Lambda}_0=\varnothing$, $|\Lambda_0|=t_1+t_2$.

对于 $x\in\hat{\Lambda}_0$,由于 x 的分量只取 0 或 1,则只能在 x 处构造矛盾式 $\overline{0}$ 或公式ω满足 $\omega(x)=1,\omega(y)=0(y\neq x)$,这样的$\omega$有 t_1 个,并记 $\Phi_0^1=\{\overline{0},\omega\},|\Phi_0^1|=t_1+1$.

对于 $x\in\breve{\Lambda}_0$,由于 x 的分量中存在分量取值为 $\dfrac{i}{n-1}$ 不等于 0 或 1,所以可以按照引理 4.1 中的方法构造公式列 $\psi_{j0}(j=0,1,\dots,n-1)$,使得

$$\psi_{j0}(x)=\begin{cases}\dfrac{j}{n-1}, & x\in\breve{\Lambda}_i\\ 0, & y\neq x\end{cases}.$$

满足上述条件的公式 ψ_{j0} 共有 n^{t_2} 个,其全体记为 Φ_0^2,则满足 $x\in\Lambda_0,\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ 的公式 $\psi\in\Phi_0=\Phi_0^1\cup\Phi_0^2$.

取 $\chi_0\in\Phi_0,x_1\in\Phi_1,\dots,\chi_{n-2}\in\Phi_{n-2}$,令

$$\chi=\chi_0\vee\chi_1\vee\dots\vee\chi_{n-2}\vee\tilde{\psi},$$

则 $\forall x\in U_m,\varphi(x)\leqslant\chi(x),\tau(\varphi\to\chi)=1$. 根据以上分析,这样的公式共有 $(t_1+1)n^{t_2}(n-1)^{k_1}(n-2)^{k_2}\dots(2)^{k_{n-2}}$, 其中,$t_1+t_2=k_0$.

当 n 为合数时.

仍然设 $\Lambda_i=\left\{x\in U_m\mid\varphi(x)=\dfrac{i}{n-1}\right\}(i=0,1,\dots,n-1)$, 并令 $|\Lambda_i|=k_i$. 此时,任取 $x\in U_m$, 分如下情形加以证明.

(1) $\varphi(x)=0$.依据 x 的分量中是否包含非 0、1 中的元素,可细分为两种情形.

情形 1.x 中只包含 0 或 1,则χ在 x 处只能取 0 或者 1,其个数可以统计出来.

情形 2.x 中包含 $\dfrac{i}{n-1},0<\dfrac{i}{n-1}<1$. 此时,$\chi$在 x 处可取 $0,\dfrac{1}{n-1},\dots,1$ 中的任意一个值,其个数也是可以统计出来的,并记这样的公式全体为 Φ_0.

(2) $\varphi(x)=\dfrac{i}{n-1},(i,n)=1$. 此时,按照引理 4.1(i)中构造公式的方法,可以在 x 处构造 $n-i$ 个公式ψ_i满足 $\psi_i(x)=\dfrac{j}{n-1},\psi_i(y)=0(y\neq x)$. 而 U_m 中使得 $\varphi(x)=\dfrac{i}{n-1}$ 的 x 个数是 k_i 个,因此,这样的公式有 $(n-i)^{k_i}$ 个,并记这样的公式全体为 Φ_i.

(3) $\varphi(x)=\dfrac{i}{n-1},(i,n)=i_t\neq 1$. 此时,按照引理 4.1(ii)中构造公式的方法,可以在 x 处构造相应的公式ψ_i 满足 $\psi_i(x)=\dfrac{j}{n-1},\psi_i(y)=0(y\neq x)$. 其中,$i_t/j$ 且 $j\geqslant i$, 并记这样的公式全体为 Φ_i.

(4) $\varphi(x)=1$,则满足 $\tau(\varphi)=\alpha,\tau(\varphi\to\chi)=1$ 的公式χ在 x 处只能取 1,这样的公式只有 1 个,记为 $\tilde{\psi}$.

取 $\chi_0\in\Phi_0,\chi_1\in\Phi_1,\dots,\chi_{n-2}\in\Phi_{n-2}$,令

$$\chi=\chi_0\vee\chi_1\vee\dots\vee\chi_{n-2}\vee\tilde{\psi},$$

则 $\forall x\in U_m,\varphi(x)\leqslant\chi(x),\tau(\varphi\to\chi)=1$.

综上所述,满足 $\tau(\varphi)=\alpha,\tau(\varphi\to\chi)=1$ 的公式χ是可以统计出来的. □

注 6.1. 在上述定理 6.1 的证明中,取 $x\in U_m,\varphi(x)=\dfrac{i}{n-1}$, 且 x 的分量中有多于两个分量的值不等于 0 或 1,不妨设为 x_1,x_2,则在构造公式ψ_{ji}时,虽然可以通过原子公式 p_1 与 p_2 分别构造相应的公式ψ_{ji},但二者是相互等价的,所以等同看待.

推论 6.1. 设 $\alpha_1>\alpha_2>\dots>\alpha_n,\alpha_i\in H$, 则在 $F(S)$中存在公式序列$\{\varphi_i\}$,满足 $\tau(\varphi_i\to\varphi_{i-1})=1$.

定理 6.1 指出方程 $\tau(\varphi\to\chi)=1$ 的解是存在的,具有最小真度的解显然就是公式φ本身,所以广义 MP 问题的三-I 真度解就是公式 $(\varphi\to\psi)\otimes\varphi^*$.

同理,多重广义 MP 问题的三-I 真度解的存在性问题可以归结为方程组

$$\begin{cases}\tau(\varphi\to\chi)=1\\ \tau(\psi\to\chi)=1\end{cases}$$

是否有解的问题,关于此问题有如下结论.

定理 6.2. 设$\varphi,\psi\in F(S_m)$,且 $\tau(\varphi)=\alpha,\tau(\psi)=\beta$,则方程组

$$\begin{cases}\tau(\varphi\to\chi)=1\\ \tau(\psi\to\chi)=1\end{cases}$$

有解且χ的等价类可以统计出来.

证明:只需证明上述方程组与 $\tau(\varphi\vee\psi\to\chi)=1$ 同解.

一方面,假设χ是方程 $\tau(\varphi\vee\psi\to\chi)=1$ 的解,下面证明χ是上述方程组的解.由于 $(\varphi\vee\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)$ 以及 $(\varphi\vee\psi\to\chi)\to(\psi\to\chi)$ 是 Ł$_n$ 中的重言式,所以 $\tau(\varphi\to\chi)\geqslant\tau(\varphi\vee\psi\to\chi)=1,\tau(\psi\to\chi)\geqslant\tau(\varphi\vee\psi\to\chi)=1$, χ满足上述方程组.

另一方面,若χ满足上述方程组,则 $\varphi\to\chi,\psi\to\chi$ 均是 Ł$_n$ 中的重言式,所以 $\varphi\vee\psi\to\chi$ 是 Ł$_n$ 中重言式, $\tau(\varphi\vee\psi\to\chi)=1$. χ是方程 $\tau(\varphi\vee\psi\to\chi)=1$ 的解. □

7 总 结

本文中我们将有限公式集上的赋值映射视为论域,公式视为该论域上的模糊集,运用模糊集的方法给出了公式间的 H-距离、H-相似度及 H-真度的概念,对计量逻辑学的基本概念做出了一种解释,为程度化推理提供了新的路径,得到了一些有意义的结果.其中,公式真度的分解定理从一个侧面反映了 Ł$_n$ 系统中公式真度的特点,而三-I 算法的真度解可以看作是三-I 算法的计量逻辑学基础.那么,沿着本文的思路,是否可以在其他逻辑系统中展开相应的讨论,是一个值得进一步讨论的课题,尤其是我们能否引入其他的模糊距离,从而实现命题集上的程度化推理也是一个很有意义的研究课题.

References:

[1] Wang GJ, Zhou HG. Quantitative logic. Information Science, 2009,179:226–247.

[2] Wang GJ, Fu L, Song JS. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic. Science in China (Series A), 2002,45(9): 1106–1116.

[3] Li BJ, Wang GJ. Theory of truth degrees of formulas in Łukasiewicz *n*-valued propositional logic and a limit theorem. Science in China (Series F), 2005,48(6):727–738.

[4] Li J, Wang GJ. Theory of truth degrees of proposition in logic system L_n^*. Science in China (E), 2006,36(6):631–643 (in Chinese with English abstract).

[5] Shi HX, Wang GJ. Quantitative method for multi-value modal logics. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2012,23(12): 3074–3087 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4212.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04212]

[6] Wang GJ. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application. Science in China (F), 2012, 42(5):648–662 (in Chinese with English abstract).

[7] Wang GJ, Hui XJ. Randomization of classical inference patterns and its application. Science in China (F), 2007,50(6):867–877.

[8] Zhou HJ, Wang GJ. Borel probabilistic and quantitative logic. Science in China (F), 2011,54(9):1843–1854.

[9] Zhou HJ. Probability Quantitative Logic and Its Application. Beijing: Science Press, 2015 (in Chinese).

[10] Wu HB, Zhou JR. The form of mean representation of truth degree with application in quantitative logic. Acta Electronica Sinica, 2012,40(9):1822–1828 (in Chinese with English abstract).

[11] Li J, Li SP, Xia YF. Theory of truth degree in Łukasiewicz *n*-valued proposotional logic. Acta Mathematica Sinica, 2004,47(4): 769–780 (in Chinese with English abstract).

[12] Li BJ, Wang GJ. Logic pseudo-metric spaces of regular implication operators. Acta Electronica Sinica, 2010,38(3):497–502 (in Chinese with English abstract).

[13] Lei YJ, Zhao J, *et al*. Intuitionistic Fuzzy Set Theory and Its Application. Beijing: Science Press, 2014 (in Chinese).

[14] Wang GJ, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 2003,136(1):71–91.

[15] Wang GJ, Shi HX. Quantitative research of generalized tautologies in *n*-valued propositional logic L_n^*. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2009,37(2):1–12 (in Chinese with English abstract).

[16] Wang GJ. The theory of Σ-α-tautologies in the revised Kleene system. Science in China (E), 1998,28(2):146–152 (in Chinese with English abstract).

[17] Wu HB. The theory of generalized tautologies in the revised Kleene system. Science in China (E), 2001,44:233–238.

[18] Wang QP, Wang GJ. Normal form of Łukasiewicz logic formulae and related counting problems. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2013,24(3):433–453 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4231.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2013.04231]

[19] Yu H, Zhan WR, Wang GJ. Distributions of truth degree, divergent degree and consistency degree in logic sytem Ł$_n$. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2008,35(5):6–9 (in Chinese with English abstract).

[20] She YH, Wang GJ. Topological characterization of consistency of logic theories in *n*-valued Łukasiewicz logic Ł$_n$. Chinese Journal of Electronics, 2010,19(3):427–430.

附中文参考文献:

[4] 李俊,王国俊.逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论.中国科学(E),2006,36(6):631–643.

[5] 时慧娴,王国俊.多值模态逻辑的计量化方法.软件学报,2012,23(12):3074–3087. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4212.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04212]

[6] 王国俊.一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用.中国科学(F),2012,42(5):648–662.

[9] 周红军.概率计量逻辑及其应用.北京:科学出版社,2015.

[10] 吴洪博,周建仁.计量逻辑中真度的均值表示形式及其应用.电子学报,2012,40(9):1822–1828.

[11] 李俊,黎锁平,夏亚峰.值 Łukasiewicz 逻辑中命题的真度理论.数学学报,2004,47(4):769–780.

[12] 李壁镜,王国俊.正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间.电子学报,2010,38(3):497–502.

[13] 雷英杰,赵杰,等.直觉模糊集理论及其应用.北京:科学出版社,2014.

[15] 王国俊,石慧娴.值逻辑系统 L_n^* 中广义重言式的计量化研究.陕西师范大学学报(自然科学版),2009,37(2):1–12.

[16] 王国俊.修正的 KLeene 系统中的Σ-α-重言式理论.中国科学(E),1998,28(2):146–152.

[18] 王庆平,王国俊.多值 Łukasiewicz 逻辑公式的范数表示和计数问题.软件学报,2013,24(3):433–453. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4231.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2013.04231]

[19] 于海,詹婉荣,王国俊.逻辑系统 Ł$_n$ 中的真度、发散度与相容度的分布.陕西师范大学学报(自然科学版),2008,35(5):6–9.

于鹏(1981－),男,宁夏永宁人,博士生,讲师,主要研究领域为非经典数理逻辑,计量逻辑.

赵彬(1965－),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为格上拓扑,非经典数理逻辑.