

HMOFA: 一种混合型多目标萤火虫算法*

谢承旺¹, 肖 驰², 丁立新³, 夏学文², 朱建勇⁴, 张飞龙²



¹(广西师范学院 计算机与信息工程学院, 广西 南宁 530299)

²(华东交通大学 软件学院, 江西 南昌 330013)

³(武汉大学 计算机学院, 湖北 武汉 430072)

⁴(华东交通大学 电气与自动化工程学院, 江西 南昌 330013)

通讯作者: 谢承旺, E-mail: chengwangxie@163.com

摘 要: 现实中不断涌现出数目众多且日益复杂的多目标优化问题, 迫切需要发展新型多目标优化算法以应对挑战. 将基本萤火虫算法拓展至多目标优化领域, 提出一种混合型多目标萤火虫算法 HMOFA (hybrid multi-objective firefly algorithm). 该算法提出使用混合水平正交实验设计和连续决策空间量化的方法生成接近于用户指定规模且均匀分布于搜索空间的初始种群, 为后续的进化提供良好的起始点; 利用外部档案中的精英解个体引导萤火虫移动, 促使算法较快收敛; 运用 3 点最短路径方法维持外部档案的多样性. HMOFA 算法与另外 5 种代表性多目标进化算法一同在 17 个基准多目标测试题上进行性能比较, 实验结果表明, HMOFA 算法在收敛性、多样性和鲁棒性方面总体上具有较显著的性能优势.

关键词: 萤火虫算法; 多目标进化算法; 混合水平正交实验设计

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 谢承旺, 肖驰, 丁立新, 夏学文, 朱建勇, 张飞龙. HMOFA: 一种混合型多目标萤火虫算法. 软件学报, 2018, 29(4): 1143-1162. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/5275.htm>

英文引用格式: Xie CW, Xiao C, Ding LX, Xia XW, Zhu JY, Zhang FL. HMOFA: A hybrid multi-objective firefly algorithm. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2018, 29(4): 1143-1162 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/5275.htm>

HMOFA: A Hybrid Multi-Objective Firefly Algorithm

XIE Cheng-Wang¹, XIAO Chi², DING Li-Xin³, XIA Xue-Wen², ZHU Jian-Yong⁴, ZHANG Fei-Long²

¹(School of Computer and Information Engineering, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530299, China)

²(School of Software, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

³(Computer School, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

⁴(School of Electrical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

* 基金项目: 国家自然科学基金(61763010, 61563015, 61663009, 61602174); 广西八桂学者项目; 广西壮族自治区自然科学基金(2016GXNSFAA380209); 江西省自然科学基金(20114BAB201025, 20161BAB 212052, 20161BAB202064); 教育部人文社科青年基金(14YJCZH172); 江西省科技支撑项目(20151BBG70055); 江西省博士后基金(2015KY18); 江西省教育厅科技项目(GJJ12307, GJJ14373, GJJ14374, GJJ160469, GJJ150496); 科学计算与智能信息处理广西高校重点实验室开放课题(GXSCIP201604)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61763010, 61563015, 61663009, 61602174); Guangxi "BAGUI Scholar" Program; Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region, China (2016GXNSFAA380209); Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (20114BAB201025, 20161BAB212052, 20161BAB202064); Ministry of Education Humanities and Social Sciences Youth Fund (14YJCZH172); Jiangxi Science and Technology Support Project (20151BBG70055); Jiangxi Postdoctoral Fund (2015KY18); Science and Technology Project of Jiangxi Provincial Department of Education (GJJ12307, GJJ14373, GJJ14374, GJJ160469, GJJ150496); Science Computing and Intelligent Information Processing of Guangxi Higher Education Key Laboratory (GXSCIP201604)

收稿时间: 2016-11-09; 修改时间: 2017-01-26; 采用时间: 2017-03-02; jos 在线出版时间: 2017-03-17

CNKI 网络优先出版: 2017-03-17 14:37:42, <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20170317.1437.007.html>

Abstract: It is necessary to develop some novel multi-objective optimization algorithms to cope with the complicated multi-objective optimization problems which are emerging and increasingly hard in reality. The basic firefly algorithm is extended to the realm of multi-objective optimization, and a hybrid multi-objective firefly algorithm (HMOFA) is proposed in this paper. Firstly, an initialization approach of mix-level orthogonal experimental design with the quantification of the continuous search space is used to generate an even-distributed initial population in the decision space. Secondly, the elites in the external archive are randomly selected to guide the movement of the fireflies in the evolutionary process. Finally, the archive pruning strategy based on three-point shortest path is used to maintain the diversity of the external archive. The proposed HMOFA is compared with other five peer algorithms in the performance of hypervolume based on seventeen benchmark multi-objective test instances, and the experimental results show that the HMOFA employs the overall performance advantages in convergence, diversity and robustness over other peer algorithms.

Key words: firefly algorithm; multi-objective evolutionary algorithm; mix-level orthogonal experimental design

科学研究与工程应用中存在大量需要同时优化多个目标的问题,它们通常被称为多目标优化问题(multi-objective optimization problem,简称 MOP)。一般地,MOP 问题中各目标之间通过决策变量发生联系并相互冲突,因此,MOP 问题一般并不存在单个的最优解使得各目标同时取得最优值,而往往是一组由折中解组成的集合,即 Pareto 解集^[1]。由于 MOP 模型高度复杂使得一般的解析方法难以凑效,研究者通常利用计算机算法来获得其 Pareto 解集的一个逼近。进化算法(evolutionary algorithm,简称 EA)是一种模拟自然界中生物进化的随机优化方法,由于 EA 算法隐含的并行性,运行一次可产生一组解,而且它对待解问题的数学性质不敏感,因此适用于处理一些不连续、非凸、多模态等优化问题。鉴于 EA 算法在求解 MOP 问题中诸多的优势,使得多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithm,简称 MOEA)的研究获得了长足的发展。

纵观 MOEA 算法近十多年的发展历程,可根据其特征将算法大致分成如下几种类型。

(1) 基于 Pareto 占优的 MOEA 算法。这类算法以 Pareto 存档进化策略(PAES)^[2]、非支配排序遗传算法(NSGA)^[3]及其改进版本 NSGA-II^[4]、强度 Pareto 进化算法(SPEA)^[5]和改进的 SPEA2^[6]等方法为代表,这类 MOEA 算法一般具有原理简单、易于理解和参数较少等优点,但是由于 Pareto 最优性固有的局限使得这一类算法并不能较好地求解具有复杂 Pareto 前沿的 MOP 问题和高维多目标优化问题等;

(2) 基于性能评估指标的 MOEA 算法。这类算法通过直接优化 Pareto 近似集合的评估指标来间接优化原 MOP 问题,其本质是将 MOP 问题转化成单目标问题求解。这类算法以 IBEA^[7]和 Hype^[8]等算法为代表,但在某些情形下,由于性能指标值的计算较为耗时,需要采用抽样的方法提高计算速度^[8]。另外,超体积指标偏好于 Pareto 前沿中的关节点和边界点,使得算法难以获得均匀分布于整个 Pareto 前沿的解集^[9];

(3) 基于分解方法的 MOEA 算法。这类算法将 MOP 问题分解成一系列子问题,然后利用子问题邻域信息协同地求解^[10]。代表性的工作包括 Zhou 等人^[11]基于混合高斯模型的 MOEA/D(MOEA/D-GM)和 Wang 等人^[12]自适应调整约束子问题的 MOEA/D(MOEA/D-ACD)算法等。需要指出的是,基于分解技术的 MOEA 算法在获得均匀分布的解集方面尚存在挑战,其原因在于:一组均匀分布的加权向量并不能保证算法也能获得一组均匀分布于 Pareto 前沿上的交叉点,特别是对于那些具有高度不规则 Pareto 前沿的问题更是如此^[9];

(4) 新型进化机制的 MOEA 算法。这类算法将一些新的进化机制和启发式算法引入到多目标优化领域,代表性的算法包括基于粒子群优化(particle swarm optimization,简称 PSO)的 MOPSO 算法^[13]以及改进的限制粒子速度的 SMPSO 算法^[14];基于分布估计算法(estimation of distribution algorithm,简称 EDA)的 RM-MEDA 算法^[15];基于烟花爆炸优化(fireworks explosion optimization,简称 FEO)的多目标烟花爆炸算法^[16]等。新型进化范例的引入拓宽了解决复杂 MOP 问题的思路,并已成为多目标优化领域新的研究热点之一;

(5) 不同机制相混合的 MOEA 算法。这类算法代表性的工作包括 Molina 等人^[17]将分散搜索(scatter search)和禁忌搜索(tabu search)相结合以解决非线性多目标优化问题,Nebro 等人^[18]提出一种基于档案的混合分散搜索算法 AbYSS,Solima 等人^[19]将协同进化与局部搜索的思想融入到多目标差分进化算法中,以指导搜索向 Pareto 最优解逼近等。混合型 MOEA 算法利用了每个 MOEA 或元启发式方法的长处,并进行优势互补,从而克服单个 MOEA 或元启发式方法所固有的局限,可进一步增强算法在解空间中搜索的效率和效果。

2008 年,Yang^[20]通过对萤火虫群体行为的模拟和简化,提出一种高级启发式算法——萤火虫算法(firefly

algorithm,简称 FA),该算法通过萤火虫之间的相互吸引达到寻优的目的,它是一种基于群体搜索的随机优化方法,属于进化算法的范畴.与其他 EA 算法相比,FA 算法具有概念简单、流程清晰、参数较少和容易实现等优点,一经提出就被用于求解不同领域的优化问题.鉴于 FA 算法基于群体搜索的特性及其良好性能,促使研究者尝试将 FA 算法用于求解日益复杂的 MOP 问题.但必须看到,MOP 问题与单目标优化问题的解之间存在本质的不同,基本 FA 算法并不能直接用于 MOP 问题的求解,需要对 FA 算法进行扩展以适应多目标优化问题的特征.Yang^[21]在 2013 年提出一种多目标萤火虫算法(multi-objective firefly algorithm,简称 MOFA),该算法改进了萤火虫的移动公式,使移动公式的随机项在迭代过程中呈非线性递减的变化,并利用权重比策略确定当前 Pareto 解.Leandro 等人^[22]则在萤火虫移动公式的随机项中引入了依 β 概率分布变化的 α 随机系数,并利用拥挤距离策略维持档案群体的多样性.Tsai 等人^[23]提出基于非支配排序的多目标萤火虫算法,该算法在萤火虫之间无支配关系时执行随机移动或向当前种群的最优个体移动,并利用 NSGA-II 的非支配排序和拥挤距离方法进行种群更新和档案维护.已有的 MOFA 算法虽然能够在一些 MOP 问题上获得较好的结果,但其性能仍可进一步提高.理由是:(1) 现有 MOFA 算法一般采用随机化方法初始种群,但由于随机误差的存在并不能保证初始群体能够均匀分布于问题的搜索空间,从而影响了进化过程对初始群体的利用;(2) 虽然多数 MOFA 算法设置了外部档案保留迄今发现的非劣解,由于这些非劣解通常携带了与问题相关的有益信息,因而又被称为精英解.但鲜有 MOFA 算法利用精英解指导萤火虫搜索,这不利于算法较快地收敛;(3) 迄今,MOFA 算法使用的档案修剪技术存在需设置参数以及多样性保持效果不佳等缺点,需要采用新的更有效的方法.

有鉴于此,本文在现有 MOFA 算法研究的基础上,针对其存在的不足,提出一种混合型多目标萤火虫算法(hybrid multi-objective firefly algorithm,简称 HMOFA),该算法以获得较快的收敛速度与均匀分布的解群为目标.HMOFA 算法与已有 MOFA 算法的不同之处在于:(1) 提出利用混合水平正交实验设计方法产生接近用户指定规模且均匀分布于搜索空间的初始群体,在有效利用计算资源的同时为算法的进化过程提供良好的起始点;(2) 利用档案中的精英解指导萤火虫移动,在较好地平衡算法全局勘探和局部开采的同时,加快算法收敛;(3) 运用 3 点最短路径方法保持档案群体多样性,且无需引入新的参数^[24],以获得分布性较好的解群.上述 3 种策略有机结合,形成了 HMOFA 算法的主要特征,这些策略在算法的不同阶段实施,以协同地提高多目标萤火虫算法的总体性能.

本文第 1 节对多目标优化问题相关概念和基本 FA 算法进行介绍.第 2 节叙述构成 HMOFA 算法的重要组成部分以及算法的流程,这是本文的重点章节.第 3 节是实验与结果分析.最后是本文的结论部分.

1 基本知识

1.1 多目标优化问题

为不失一般性,一个具有 n 个决策变量, m 个目标函数, $(p+q)$ 个约束的最大化连续 MOP 问题可定义如下:

$$\begin{cases} \max F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T \\ \text{s.t. } g_i(x) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p) \\ h_j(x) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, q) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subset \mathbb{R}^n$ 是 n 维决策向量, X 为 n 维决策空间; $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y \subset \mathbb{R}^m$ 定义了维度为 m 的目标空间;而 $F(x)$ 则是由 X 向 Y 映射的函数; $g(x)$ 给出了 p 个不等式约束; $h(x)$ 定义了 q 个等式约束.约束函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 共同确定决策向量 x 的可行域.

1.2 基本萤火虫算法

萤火虫算法的核心思想是萤火虫被亮度较大的萤火虫吸引,并根据位置更新公式更新自身位置,所有萤火虫移动到新的位置后,更新其亮度,并依据吸引规则进行下一次移动.一般地,萤火虫的亮度由待优化的目标函数值决定,萤火虫之间的吸引力与它们的亮度成正比,而与它们的距离成反比^[20].

萤火虫 i 的绝对亮度 I_i 表征萤火虫所在位置处解的目标函数值.在最大化问题中,为降低问题的复杂度,设

在 $\bar{x}_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 处的萤火虫 i 的绝对亮度 I_i 与 \bar{x}_i 处的目标函数值相等,即:

$$I_i = f(\bar{x}_i) \quad (2)$$

假设萤火虫 i 的绝对亮度比萤火虫 j 的绝对亮度大,则萤火虫 j 被 i 吸引而向 i 移动.这种吸引力的大小由萤火虫 i 对萤火虫 j 的相对亮度决定,相对亮度越大,吸引力越大.考虑到萤火虫 i 的亮度随着距离的增加以及空气的吸引而减弱,可定义萤火虫 i 对萤火虫 j 的相对亮度为

$$I_{ij}(r_{ij}) = I_i e^{-\gamma r_{ij}^2} \quad (3)$$

式(3)中的 I_i 为萤火虫 i 的绝对亮度, γ 为光吸收系数, r_{ij} 为萤火虫 i 到萤火虫 j 的距离.

假设萤火虫 i 对萤火虫 j 的吸引力与萤火虫 i 对萤火虫 j 的相对亮度成比例,则由萤火虫 i 相对亮度的定义可得,萤火虫 i 对萤火虫 j 的吸引力 $\beta_{ij}(r_{ij})$ 为

$$\beta_{ij}(r_{ij}) = \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} \quad (4)$$

式(4)中 β_0 为最大吸引力,即在光源处($r=0$)萤火虫的吸引力.这里,将 r_{ij} 定义为萤火虫 i 到萤火虫 j 的笛卡尔距离,即:

$$r_{ij} = \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - x_{jk})^2} \quad (5)$$

由于被萤火虫 i 吸引,萤火虫 j 向其移动而更新自己的位置,萤火虫 j 的位置更新如公式(6)所示:

$$\bar{x}_j(t+1) = \bar{x}_j(t) + \beta_{ij}(r_{ij})(\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)) + \alpha \bar{\epsilon}_j \quad (6)$$

式(6)中的 t 为算法迭代次数, $\bar{x}_i(t)$ 、 $\bar{x}_j(t)$ 分别为第 t 代萤火虫 i 和 j 所处的位置; $\beta_{ij}(r_{ij})$ 为萤火虫 i 对萤火虫 j 的吸引力; α 为常数,一般取 $\alpha \in [0, 1]$; $\bar{\epsilon}_j$ 通常是由高斯分布、均匀分布或其他分布得到的随机数向量.显然,式(6)右边的第 2 项取决于吸引力;第 3 项是带有特定系数的随机项,起扰动的作用.

2 HMOFA 算法

2.1 混合水平正交初始化种群

传统的 MOEA 算法一般采用随机化方法初始化群体,这样产生的群体分布不均匀,很难产生好的个体,降低了算法对初始种群的利用能力^[25].现实中, MOP 问题的 Pareto 前沿地势复杂,因此在初始化过程中,应尽可能地使初始群体均匀覆盖整个可行域,以利于算法逼近真实的 Pareto 前沿.正交实验设计(orthogonal experimental design, 简称 OED)是一种解决多因素、多水平实验问题的有效方法^[26],它利用正交表(orthogonal array, 简称 OA) $L_M(Q^N)$ 安排少数次实验就能找到最好或较好的实验条件. $L_M(Q^N)$ 表示一个具有 N 个因素和 Q 个水平的正交表,其中, L 表示拉丁方, M 表示水平组合.应用正交表 $L_M(Q^N)$ 只需选择 M 个组合去做实验,通常, $M=Q^J$, 这里的 Q 为素数,正交指数 J 为满足式(7)的正整数,且 M 一般远小于 Q^N .

$$\frac{Q^J - 1}{Q - 1} \geq N \quad (7)$$

由于 OED 方法是从全面实验中挑选部分具有代表性的点进行实验,而且这些点具有均匀分散和齐整可比的特点,因此一些研究者采用正交实验法产生初始种群以获得均匀分布的初始点.例如: Leung 等人^[26]把正交实验设计方法应用于遗传算法中,通过正交设计产生初始群体,设计了正交杂交算子,并利用实验验证了算法的有效性; Gong 等人^[25]把二水平正交算子应用到差分演化算法中,并结合统计优生法从杂交子群体中选择最优个体,增加了算法的鲁棒性; Cai 等人^[27]利用正交实验方法设计交叉算子,产生具有代表性的子代个体,以更好地探索解空间; Wang 等人^[28]把正交设计和约束处理技术相结合处理约束优化问题,取得了较好的效果; Zhou 周等人^[29]利用正交实验设计方法产生人工蜂群新的食物源,提高了算法的搜索效率; Zeng 等人^[30]把正交实验设计的方法应用到多目标问题求解中,利用正交数组产生小生境群体,但该算法在每一代通过正交设计产生小生境,增加了算法的复杂度.

必须指出,已有利用 OED 方法产生初始种群的算法一般使用的是等水平正交表,这种正交表假定各因素同

等重要且具有相同的水平划分数,而且范例相对固定且单一.在 MOEA 中利用等水平正交表初始化种群可能存在如下问题:(1) 在复杂的 MOP 问题中,不同的决策变量(因素)对目标函数的影响程度可能不同,那么假定所有因素同等重要是不现实的.例如,在 2-目标的测试函数 ZDT1 中(见表 1),变量 x_1 对函数起决定性影响,而其他 29 个变量的影响则较弱,简单地将该测试问题的 30 个因素进行等水平实验则不尽合理.(2) 一般地,当 MOP 问题的决策变量数目和用户设定的种群规模 NP 确定后,等水平正交表的行数 M 难以适配种群规模 NP ,此时需要对正交表 OA 作进一步处理:(i) 当 $NP < M$ 时,需从 OA 中选择 $|M - NP|$ 个重复个体组成种群,以保持群体规模不变;(ii) 当 $NP > M$ 时,随机地从 OA 中选择 NP 个个体组成种群,多余的实验个体丢弃.显然,第(i)种情形造成了个体的重复,降低了种群的多样性;第(ii)种情形则直接导致部分实验个体丢失,浪费了计算资源.由此可见,在利用正交实验方法产生规模为 NP 的初始群体时,应选择适当的正交表以使得正交表的行数 M 尽可能地接近 NP ,这样既能产生代表性的个体又可有效地利用计算资源.

Table 1 Set of multi-objective optimization functions

表 1 多目标优化问题测试函数集

函数名	Pareto 前沿特征	决策变量数目	目标函数数目	变量范围
ZDT1	凸	30	2	$x_i \in [0,1]$
ZDT2	凹	30	2	$x_i \in [0,1]$
ZDT3	不连续	30	2	$x_i \in [0,1]$
ZDT4	凸、多模态	10	2	$x_i \in [0,1]$
ZDT6	凹、多模态、有偏	30	2	$x_i \in [0,1]$
KUR	不连续	3	2	$-5 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 5$
Deb2	不连续	2	2	$0.1 \leq x_1, x_2 \leq 1.0$
DTLZ1	线性、多模态	7	3	$x_i \in [0,1]$
DTLZ2	凹	30	3	$x_i \in [0,1]$
DTLZ3	凹、多模态	30	3	$x_i \in [0,1]$
DTLZ4	凹、有偏	30	3	$x_i \in [0,1]$
DTLZ5	凹、退化	30	3	$x_i \in [0,1]$
DTLZ6	凹、退化、有偏	30	3	$x_i \in [0,1]$
DTLZ7	混合、不连续、多模态	30	3	$x_i \in [0,1]$
Viennet1	凸	2	3	$x_i \in [-2,2]$
Viennet2	混合	2	3	$x_i \in [-4,4]$
Viennet3	混合、退化	2	3	$x_i \in [-3,3]$

鉴于此,本文提出利用混合水平正交表(mixed level orthogonal array,简称 MLOA)方法产生 HMOFA 算法的初始种群以克服等水平正交表的不足.MLOA 方法通过设计一个合适的混合正交表 $L_M(Q_1^{N_1}Q_2^{N_2})$ 来安排实验,这里的 $L_M(Q_1^{N_1}Q_2^{N_2})$ 表示其是由等水平正交表 $L_{M_1}(Q_1^{N_1})$ 和 $L_{M_2}(Q_2^{N_2})$ 混合而成,其中, M 表示混合正交表的行数, M_1 、 M_2 分别为两个相混合的等水平正交表的行数,且 $M = M_1 \times M_2$, N_1 、 N_2 和 Q_1 、 Q_2 分别表示两个相混合的等水平正交表的因素个数和划分水平数,且 $M_1 = Q_1^{J_1}$, $M_2 = Q_2^{J_2}$, 正交指数 J_1 、 J_2 为满足式(8)的正整数.

$$\begin{cases} \frac{Q_1^{J_1} - 1}{Q_1} \geq N_1 \\ \frac{Q_2^{J_2} - 1}{Q_2} \geq N_2 \end{cases} \quad (8)$$

由于混合水平正交表可以通过调整相混合的等水平正交表的因素个数和水平数而达到预设的实验组数,因此,混合正交表易于产生接近用户设定规模且均匀分布的初始群体,此外,这种初始化种群的方法还能减少实验个体的无端浪费.下面的两个实例说明了 MLOA 方法利于产生设定规模大小的种群.

实例 1. 对于 DTLZ1 测试函数(见表 1),其决策变量个数为 7,假设用户设定的种群规模为 200,若沿用等水平正交表,则通常会采用 $L_{49}(7^8)$ 或 $L_{25}(5^6)$ 正交表,但无论选用哪一种正交表都将使得初始种群中存在多个重复个体.但若使用混合水平正交表,如 $L_{200}(5^6 8^1)$,则混合水平正交表的实验组数正好等于指定的种群规模,且混合水平正交表的因素之和也正好等于决策变量的数目.

实例 2. 对于 ZDT4 测试函数(见表 1),决策变量个数为 10,假设用户指定的种群规模为 100,若采用等水平正交表,则通常选择 $L_{49}(7^8)$ 或 $L_{121}(11^{12})$ 的正交表,若采用前一种正交表,将导致初始群体存在 51 个重复个体,而使用后一种正交表将会舍弃 21 个实验个体.相比之下,混合水平正交表 $L_{100}(5^6 2^3)$ 在将决策变量分组后可产生规模为 100 的初始群体.

为了将混合水平正交方法应用于连续多目标优化问题,这里需要对式(1)中的决策变量空间进行量化处理.假设式(1)中某个决策变量 $x_i \in [l_i, u_i] (i \in [1:n])$,其中, l_i 和 u_i 分别为 x_i 的下界和上界,将 x_i 量化为 Q 个水平 $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,Q}$, 则 $a_{i,j}$ 满足计算公式(9):

$$a_{i,j} = l_i + (j-1)((u_i - l_i)/(Q-1)), \quad j=1,2,\dots,Q \quad (9)$$

如此, x_i 的连续空间就被量化成 $(Q-1)$ 等份.

通常,复杂 MOP 问题决策变量的数目一般较大,如果直接应用正交表,则需安排的实验次数仍然较大,导致占用较多的计算资源,降低了该方法的有效性.因此,有必要对 MOP 问题的决策变量进行分组,一组变量视为一个因素,从而减少总的因素个数,降低正交实验方法的计算开销.假设分组过程将式(1)的 n 个决策变量分为 H 组,如式(10)所示:

$$\begin{cases} G_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{k_1}) \\ G_2 = (x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_{k_2}) \\ \dots \\ G_H = (x_{k_{H-1}+1}, x_{k_{H-1}+2}, \dots, x_n) \end{cases} \quad (10)$$

其中, k_1, k_2, \dots, k_{H-1} 为 $(1, n)$ 之间随机生成的整数,且满足 $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_{H-1} < n$, 则按公式(9)将 $G_i (i \in [1:H])$ 划分为 Q 个水平,如公式(11)所示:

$$\begin{cases} G_i(1) = (a_{(k_{i-1}+1),1}, a_{(k_{i-1}+2),1}, \dots, a_{k_i,1}) \\ G_i(2) = (a_{(k_{i-1}+1),2}, a_{(k_{i-1}+2),2}, \dots, a_{k_i,2}) \\ \dots \\ G_i(Q) = (a_{(k_{i-1}+1),Q}, a_{(k_{i-1}+2),Q}, \dots, a_{k_i,Q}) \end{cases} \quad (11)$$

由于正交表 $L_M(Q^N)$ 须满足均匀分散性,因此,当 $N > H$ 时,则舍弃正交表中后 $(N-H)$ 列后再安排实验.

以下在描述混合水平正交实验方法初始化种群之前,先给出构造等水平正交表的流程.为方便起见,记 $L_M(Q^N) = [a_{i,j}]_{M \times N}$, 其中,第 i 个组合的第 j 个因素的水平值为 $a_{i,j}, a_{i,j} \in \{1, 2, \dots, Q\}$. 设 $[a_{i,j}]_{M \times N}$ 第 j 列为 a_j , 若 $j=1, 2, (Q^3-1)/(Q-1)+1, \dots, (Q^{J-1}-1)/(Q-1)+1$, 则 a_j 称为基本列,其他列称为非基本列.文献[26]给出了创建正交表 $L_M(Q^N)$ 的算法,它首先创建基本的列,然后再创建非基本的列,详细描述见算法 1. 其中, Q 为素数,且 $M=Q^J, J$ 满足式(7),因此,当 Q 给定时,正交表 $L_M(Q^N)$ 的因素个数 N 越大,即正交表的列数越大,水平组合数 M 也越大.

利用算法 1 构造了等水平正交表后,根据 MOP 问题的决策变量数目和指定的种群规模构造混合水平正交表 $L_M(Q_1^{N_1} Q_2^{N_2})$, 算法 2 给出了构造混合水平正交表的过程.根据文献[25-30]的研究,本文的 $J_1=2, J_2$ 将视待解 MOP 问题的不同取值 1 或 2.

算法 1. Construction_orthogonal_array.

Input: 划分水平 Q , 正交指数 J .

Output: 正交矩阵 $(a_{i,j})_{M \times N}$.

1. for ($k=1; k \leq J; k++$)
2. $j=(Q^{k-1}-1)/(Q-1)+1;$

```

3. for (i=1; i≤QJ; i++)
4.     aij = ⌊  $\frac{i-1}{Q^{J-k}}$  ⌋ mod Q;
5. end
6. end
7. for (k=2; k≤J; k++)
8.     j=(Qk-1-1)/(Q-1)+1;
9.     for (s=1; s≤j-1; s++)
10.        for (t=1; t≤Q-1; t++)
11.            aj+(s-1)(Q-1)+t=(as×t+aj) mod Q;
12.        end
13.    end
14. end
15. aij=aij+1; i∈[1:M]∧j∈[1:N].

```

算法 2. Construction_mixed_level_orthogonal_array.

Input: 两个相混合的等水平正交表的划分水平 Q_1, Q_2 , 正交指数 J_1, J_2 .

Output: 混合正交矩阵 $(c_{i,j})_{M \times (N_1 + N_2)}$.

```

1. 利用算法 1 构造等水平正交表  $L_{M_1}(Q_1^{N_1}) = (a_{i,j})_{M_1 \times N_1}$  和  $L_{M_2}(Q_2^{N_2}) = (b_{i,j})_{M_2 \times N_2}$ .
2. for (k=0; k<M1; k++)
3.     for (i=0; i<M2; i++)
4.         c(k-1)M2+i=[ak, bi]
5.     end
6. end
7. 输出混合水平正交矩阵  $(c_{i,j})_{M \times (N_1 + N_2)}$ .

```

算法 3. Generation_initial_population using MLOA.

Input: 待优化问题决策变量数目 n , 种群规模 NP , 正交指数 J_1, J_2 .

Output: 初始化种群.

```

1. 根据 MOP 问题决策变量数目  $n$  和群体规模  $NP$  确定两个相混合正交表的实验次数和划分水平.
2. 利用算法 2 构建混合水平正交矩阵.
3. 利用公式(9)~公式(11)对连续决策空间量化, 并生成混合正交初始种群  $MP$ .
4. if (|MP|<NP)
5.     将包括  $MP$  中所有个体以及  $(NP-|MP|)$  个从  $MP$  中随机选择的个体一同组成初始化群体.
6. else
7.     从  $MP$  中随机选择  $NP$  个实验个体组成初始化群体.
8. end
9. 输出规模为  $NP$  的初始化种群.

```

利用算法 2 构造出混合水平的正交表后, 再利用 MLOA 方法产生规模为 NP 的初始种群. 需要说明的是, 在利用 MLOA 方法产生用户指定规模大小的初始群体时, 仍有可能发生混合正交表的实验组数与预设规模值不一致的问题, 虽然这种情况发生的可能性一般要小于等水平正交实验方法, 但在算法 3 的第 4 步~第 8 步仍包含了对这种小概率事件的处理: 当混合正交表的行数 $|MP| > NP$ 时, 从 $|MP|$ 个实验个体中随机选取 NP 个个体组成下一代种群; 当 $|MP| < NP$ 时, 则不仅将所有 $|MP|$ 个实验个体加入下一代种群, 而且还要在 $|MP|$ 个实验个体中随机选取 $(NP-|MP|)$ 个个体加入下一代种群, 以保持种群规模不变. 这里的 $|MP|$ 表示混合正交表 MP 的实验组数, 即混合

水平正交表的行数.

2.2 档案精英个体引导萤火虫移动

基本 FA 算法中萤火虫 j 被萤火虫 i 所吸引而向 i 移动至新的位置,其中 j 的新位置由 3 个因素共同确定:(1) j 的当前位置;(2) i 和 j 之间的吸引力;(3) 随机扰动.将基本 FA 算法用于求解 MOP 问题需要解决如下问题:(1) 彼此非劣的解个体之间如何移动的问题;(2) 如何利用档案精英个体引导萤火虫移动以改善算法的性能.由于在 HMOFA 算法任意一代的档案中至少存在一个精英解个体^[24],所以,当萤火虫 i 和 j 之间因相互吸引而更新位置时,随机地从档案中选取一个精英解 g^* 引导萤火虫的移动,而萤火虫位置的更新可按式(12)或式(13)进行.

1) 当萤火虫 i 和 j 彼此非劣时,利用精英解 g^* 引导萤火虫移动,则个体 i 和 j 的位置更新如式(12)所示:

$$\begin{cases} \bar{x}_i(t+1) = \omega_0 \bar{x}_i(t) + (1 - \omega_0) \beta_{g^* i} (r_{g^* i}) (\bar{x}_{g^*}(t) - \bar{x}_i(t)) + 2r_{g^* i} \cdot \bar{\varepsilon} & \text{for firefly } i \\ \bar{x}_j(t+1) = \omega_0 \bar{x}_j(t) + (1 - \omega_0) \beta_{g^* j} (r_{g^* j}) (\bar{x}_{g^*}(t) - \bar{x}_j(t)) + 2r_{g^* j} \cdot \bar{\varepsilon} & \text{for firefly } j \end{cases} \quad (12)$$

2) 当萤火虫 i 和 j 之间存在支配关系时,例如:若 $i \succ j$, 则 j 不仅向 i 移动,而且 j 还会向精英个体 g^* 移动,公式(13)给出了个体 i 和 j 的移动公式.

$$\begin{cases} \bar{x}_j(t+1) = \bar{x}_j(t) + \omega_0 \beta_{ij} (r_{ij}) (\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)) + (1 - \omega_0) \beta_{g^* j} (r_{g^* j}) (\bar{x}_{g^*}(t) - \bar{x}_j(t)) + (r_{ij} + r_{g^* j}) \bar{\varepsilon} & \text{if } i \succ j \\ \bar{x}_i(t+1) = \bar{x}_i(t) + \omega_0 \beta_{ij} (r_{ij}) (\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)) + (1 - \omega_0) \beta_{g^* i} (r_{g^* i}) (\bar{x}_{g^*}(t) - \bar{x}_i(t)) + (r_{ij} + r_{g^* i}) \bar{\varepsilon} & \text{if } j \succ i \end{cases} \quad (13)$$

公式(12)和公式(13)中的 ω_0 为定义在区间[0,1]上均匀分布的随机数, r_{ij} 为萤火虫 i 与 j 之间的欧式距离, $r_{g^* j}$ 和 $r_{g^* i}$ 分别为档案精英个体 g^* 与萤火虫 j 和 i 之间的欧式距离, $\bar{\varepsilon}$ 则为定义在区间[-1/2,1/2]上的一组随机向量.

式(12)中的 $2r_{g^* i} \bar{\varepsilon} \in [-r_{g^* i}, r_{g^* i}]$, 即萤火虫的随机步长随 $r_{g^* i}$ 的变化而变化,当萤火虫 i 和 j 彼此非劣时,相互间的吸引力很弱,萤火虫 i 本身可以在 $[-r_{g^* i}, r_{g^* i}]$ 范围内进行自主探索,式(13)中被支配的个体不仅向支配的个体移动,而且还向精英解 g^* 靠近,这样便可更好地平衡算法的全局勘探和局部开采.这里,采用随机方式选取档案精英解客观上起到了改善算法性能的作用,其原因在于:(1) 萤火虫接受精英个体的引导可直接促进优良基因的继承和发展,使得种群能够更快地逼近 Pareto 前沿,有利于加快算法收敛;(2) 随机选取精英解引导萤火虫移动可间接地阻止种群向局部区域聚拢,有利于拓展群体的搜索范围,增加算法发现全局最优解的机会.

2.3 3点最短路径方法

MOEA 算法通常采用容量有限的外部档案保存算法迄今获得的非劣解,当非劣解数目超过档案允许容纳的最大值时,需要对档案进行修剪并尽可能地维持档案群体的多样性.目前使用较多的修剪技术包括:NSGA-II 的拥挤距离机制^[4]、SPEA2 中的 k -最近邻方法^[6]以及 Deb 等人提出的 ε -占优^[13]等.这些多样性保持方法在各自算法中发挥了较好的作用,但它们也存在不同程度的缺陷.例如,拥挤距离方法虽然比较简单,但在有些情况下并不能很好地反映个体的拥挤程度,特别是当个体与其邻近个体之间距离相同时容易发生评估结果不一致的问题,这种不一致表现在目标空间中靠得较近的个体却被误判为稀疏个体.不仅如此,被广泛使用的 ε -占优网格方法同样存在不足:如果决策者不考虑 Pareto 前沿分布的集合特点, ε -占优机制会丢失许多有效解,这种情形在 Pareto 前沿分布几乎接近垂直和水平位置时尤为明显.

为了更好地维护档案群体的分布性,本文利用我们此前提出的 3 点最短路径方法评估解个体在目标空间中的分布性,并将其结合到 HMOFA 算法以维持档案群体的多样性.3 点最短路径方法通过计算目标空间中互不相同的邻近 3 个解点之间的距离表征个体在目标空间的密度^[24].值得一提的是,利用 3 点最短路径方法评估解群的分布性无需引入额外的参数,省去了诸如 ε -占优方法等需要反复调参的不便.

2.4 HMOFA算法流程

下面在第 2.1 节~第 2.3 节叙述的基础上给出混合多目标萤火虫算法 HMOFA 的流程,如算法 4 所示.

算法 4. Hybrid multi-objective firefly algorithm: HMOFA.

Input: 种群 Pop 规模 NP , 外部档案 Arc 规模 N' , 最大迭代次数 T_{max} , 光吸收系数 γ , 萤火虫最大吸引力 β_0 .

Output: 外部档案中 N' 个个体.

1. 利用算法 2 构造混合水平正交表.
2. 利用算法 3 获得混合水平正交初始种群 $Pop(0), Arc=\emptyset$, 迭代器 $t=0$.
3. 基于 Pareto 关系评价 $Pop(0)$, 并将非劣解复制到 Arc 中.
4. while ($t < T_{max}$)
5. for ($i=0; i < NP; i++$)
6. for ($j=0; j < NP; j++$)
7. if (萤火虫 i 和 j 之间存在支配关系)
8. 从 Arc 中随机选取 g^* , 被支配个体基于公式(13)向精英解 g^* 和支配解移动.
9. else
10. 从 Arc 中随机选取 g^* , 非支配个体 i 和 j 按照公式(12)执行移动操作.
11. end
12. end
13. end
14. 更新萤火虫位置, 评估萤火虫群体, 并基于 3 点最短路径方法维持外部档案.
15. $t=t+1$
16. end
17. 输出档案中的群体.

设待优化 MOP 问题的目标数目为 m , 搜索空间的维度为 n , 种群规模为 NP , 外部档案的最大容量为 N' , 最大迭代次数为 T_{max} , 混合正交表中两个等水平正交表的实验组数分别为 M_1 和 M_2 , 它们的因素个数分别为 N_1 和 N_2 , 划水平分别为 Q_1 和 Q_2 , 且满足 $NP=M_1 M_2, n=N_1+N_2$, 则 HMOFA 算法的时间复杂度可估计如下.

(1) 步骤 1 构造两个等水平正交表的时间分别为 $O(M_1 N_1)$ 和 $O(M_2 N_2)$, 构造混合正交表的时间为 $O(M_1 M_2 n)$, 因此步骤 1 的时间复杂度应为 $O(M_1 M_2 n)$;

(2) 步骤 2 获得混合水平正交初始种群的时间为 $O(M_1 M_2 n)$;

(3) 步骤 3 从初始种群选择非支配个体复制到外部档案的时间为 $O(m(M_1 M_2)^2)$;

(4) 步骤 4~步骤 16 的迭代过程中, 对萤火虫群体进行比较的时间为 $O(M_1 M_2)^2$, 从外部档案中随机选取精英个体的时间为 $O(2(M_1 M_2)^2 m)$, 萤火虫移动所需时间为 $O(M_1 M_2)^2 n$, 更新萤火虫位置的时间为 $O(M_1 M_2 m)$, 而评估萤火虫群体并维持外部档案多样性的时间复杂度为 $O(m(NP+N')^2)$. 由于算法一共迭代了 T_{max} 次, 因此, 这一部分的时间复杂度应为 $O(T_{max} m(NP+N')^2)$.

(5) 步骤 17 输出档案集中全部解个体的时间为 $O(N')$.

综上, HMOFA 算法的时间复杂度应为 $O(M_1 M_2 n) + O(M_1 M_2 n) + O(m(M_1 M_2)^2) + O(T_{max} m(NP+N')^2) + O(N') = O(T_{max} m(NP+N')^2)$.

3 实验与结果分析

3.1 实验设置

(1) 对等比较算法

为检验 HMOEA 算法的性能, 这里选取 5 个具有代表性的多目标优化算法作为对等比较算法, 它们分别是:

- (1) Deb 等人提出的改进的非劣分类遗传算法 NSGA-II^[4];
- (2) Nebro 等人提出的限速多目标粒子群算法 SMPSO^[14];
- (3) Nebro 等人提出的基于档案的混合分散搜索算法 AbYSS^[18];
- (4) Wang 等人提出的自适应调整的约束子问题 MOEA/D 算法, 即 MOEA/D-ACD 算法^[12];
- (5) Yang 等人提出的一种多目标萤火虫算法 MOFA^[21].

(2) 多目标测试函数集

为检验本文算法的有效性,这里选取 17 个基准 MOP 问题测试函数组成测试题集,以考察算法求解不同类型的 MOP 问题时的性能.表 1 给出了各测试函数的名称、性质、决策变量数目(n)、目标个数(m)、搜索范围.这 17 个测试问题^[31-33]包括了 7 个 2-目标测试函数 ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT4、ZDT6、KUR 和 Deb2,以及 10 个 3-目标测试函数 DTLZ1~DTLZ7、Viennet1、Viennet2 和 Viennet3.由于这些测试问题的 PF 具有不同的地势特征,形成了不同的难度类型,因而测试题集能够较全面地考察算法的性能.为了便于度量算法的性能,这里对于 2-目标测试问题分别在它们的真实 Pareto 前沿上均匀采样 2 000 个点,而对于 3-目标测试问题则均匀采样 5 000 个点.

(3) 性能指标

MOP 问题的解题目标是获得一个均匀分布且尽可能逼近真实 Pareto 前沿的解集.为此,本文采用超体积指标 HV(hypervolume)来度量算法的性能^[34].超体积指标通过计算目标空间中非支配解集覆盖区域的大小来评估算法的性能.超体积度量方法也被称为 Lebesgue 测度,它在理论上具有良好的数学性质,即在所有的一元测度中,HV 是能够判定非支配解集 X 不比另一个非支配解集 Y 差的方法,且它可与 Pareto 关系保持一致.对于一个近似 Pareto 前沿 A ,超体积的计算公式为

$$HV(A) = \Lambda(\cup_{p \in A} \{x | p \succ x \succ x_{ref}\}) \quad (14)$$

式(14)中, Λ 为 Lebesgue 测度, x_{ref} 为参照点.对于 2-目标优化问题,HV 是坐标区域的面积;对于 3-目标优化问题,HV 是三维空间构成的体积;对于大于 3 个目标的优化问题,HV 表示超体积值.通常,HV 的值越大,解集的质量越高,亦即算法的收敛性与多样性等综合性能越好.

(4) 实验参数

为了客观评估算法的性能,这里将参与比较的 NSGA-II、SMPISO、AbYSS、MOEA/D-ACD 和 MOFA 等算法的部分参数保持与对应参考文献一致的设置,表 2 给出了各对比算法的部分参数取值.

Table 2 Partial parameter settings of all the algorithms compared

表 2 各对比算法的部分参数设置

算法	参数设置
NSGA-II	$p_c = 0.9, p_m = 1/n, \eta_c = 20, \eta_m = 20$
SMPISO	$C_1 \in [1.5, 2.5], C_2 \in [1.5, 2.5], p_m = 1/n, \eta_m = 20$
AbYSS	$N_{RefSet1} = 10, N_{RefSet2} = 10, p_c = 0.9, p_m = 1/n, \eta_c = 20, \eta_m = 20$
MOEA/D-ACD	$CR = 1.0, F = 0.5, p_m = 1/n, \eta_m = 20, T = 20, \delta = 0.9, n_r = 2$
MOFA	$\beta_0 = 1, \gamma = 1$

表 2 中, p_c 表示杂交概率, p_m 为变异概率, η_c 和 η_m 分别为仿二进制交叉算子(SBX)和多项式变异的分布指数.对于 AbYSS 算法而言, $N_{RefSet1}$ 和 $N_{RefSet2}$ 分别为 $RefSet1$ 和 $RefSet2$ 的规模.在 MOEA/D-ACD 算法中, T 为邻域规模的大小, δ 为从大小为 T 的邻域中选取父体的概率, n_r 则表示允许被子代替换掉的最大的父体数.在 SMPISO 算法中, C_1 和 C_2 是两个从区间[1.5,2.5]中随机产生的控制参数.另外,为了使实验结果公平、准确起见,HMOFA 算法中与对比算法相同的参数将设置成与它们相同的值.例如:2-目标问题的种群规模 $NP=100$,外部档案 Arc 的规模为 100,每个测试函数的评估 50 000 次;对于 3-目标测试问题的种群规模 $NP=100$,外部档案的最大容量为 200,各测试函数的评估次数为 200 000 次.根据文献[35]的建议,在计算 HV 值时,将参考点 ref 设置为 Pareto 前沿上界的 1.1 倍(即 $ref=1.1^m$,这里的 m 表示目标函数的数目),以平衡算法所获解集的收敛性与多样性.为了降低计算 HV 值的复杂度,对 2-目标测试问题采样 2 000 个点,对 3-目标测试问题采样 5 000 个点.最后,本文的调参实验表明了 HMOFA 算法的光吸收系数和最大吸引力分别为取 $\gamma=1, \beta_0=1$ 时可获得较好的结果,所以本文实验采用了这两个参数值.

为了减少性能分析中随机因素的干扰,每种算法在所有测试函数上均独立运行 30 次.本文的仿真实验在清华同方电脑上运行,电脑配置为 4G 内存和 3.5GHz 双核 CPU,安装 Windows 10 X64 操作系统,所有算法利用 Java

Myeclipse 2015 平台编程实现,并利用 Matlab R2015b 环境出图.

3.2 实验结果与分析

实验 1.通过比较 6 种对等算法在 17 个测试函数上获得的 HV 值来评估各算法的性能.表 3 给出了各种算法在所有测试例上获得的 HV 均值(Mean)和方差(Std.),并利用水平为 5%的双尾 *t*-检验来判断算法结果的显著性差异.需要指出的是,表 3 中的均值和方差是用一种算法在相同测试问题上独立运行 30 次(每次使用不同的随机数种子)的统计结果.*t*-test 值则是本文算法与其他对比算法在同一测试函数上进行 *t* 检验的结果,其中,+、=和-分别表示本文算法获得的性能指标值在显著性水平为 5%的双尾 *t* 检验中优于、等于和劣于对应列的算法在对应行的测试问题上的显著性区分结果;Score 表示本文算法显著优于对应列的对比算法在 17 个测试问题中的净胜得分,即等+与得-的测试问题个数之差(下文同).同时,采用粗体显示不同算法在同一测试问题上获得的最好值.

从表 3 可以看出,本文的 HMOFA 算法在 17 个测试问题上获得了 10 个最优的 HV 均值,NSGA-II 算法获得了 5 个最优的 HV 均值,SMP SO 和 AbYSS 各获得 1 个最优的 HV 均值,而 MOEA/D-ACD 和 MOFA 算法无一能获得最优的 HV 均值.而在 ZDT3、KUR、Deb2、DTLZ2、DTLZ4 和 DTLZ7 问题上,虽然 HMOFA 算法未能获得最优的 HV 均值,但它在这 6 个测试函数上获得的 HV 均值与那些在相同测试问题上获得了最优的 HV 均值的算法相比,它们之间获得的结果处于相同的数量级上.这表明,在这 6 个测试例上,HMOFA 算法获得的结果接近于最好值.表 3 中的 HV 均值和方差的结果表明,本文算法在 17 个测试问题上具有最好的 HV 性能.另外,从表 3 的 *t*-检验结果来看,HMOFA 算法对比其他 5 种算法的净胜得分均为正数,其中,对比 NSGA-II 算法的净胜分为 4,对比 SMP SO 的净胜分为 2,对比 AbYSS 的净胜分为 8,对比 MOEA/D-ACD 的净胜分为 7,对比 MOFA 的净胜分为 17.*t*-检验结果表明,HMOFA 算法在所有测试问题上获得的 HV 性能指标总体上显著优于另 5 种对比算法.

表 4 采用 Friedman 检验给出了 6 种对比算法的平均排名,可以看出,HMOFA 算法的名次是最好的,次优的是 NSGA-II 算法,随后是 SMP SO、AbYSS 和 MOEA/D-ACD 等算法,排名最差的是 MOFA 算法.Friedman 检验的结果与表 3 中各算法获得的 HV 值所反映出的结果是一致的,它们都表明了 HMOFA 算法较之其他 5 种对比算法具有最好的 HV 性能.究其原因:HMOFA 算法采用混合水平正交初始化策略产生均匀分布于搜索空间的初始群体,不仅为算法后续的迭代过程提供了良好的初始点,而且能够有效地利用计算资源;其次,算法利用档案群体中的精英解个体指导萤火虫移动,有利于促进算法收敛;最后,算法采用 3 点最短路径策略有效地保持了解群的多样性.这 3 种策略有机结合,协同地提高了算法的收敛性与多样性等总体性能.

Table 3 Mean and standard deviation of HV
表 3 HV 均值和方差

函数		HMOFA	NSGA-II	SMP SO	AbYSS	MOEA/D-ACD	MOFA
ZDT1	Mean	6.61E-01	6.59E-01	6.61E-01	6.40E-01	6.61E-01	0.00E+00
	Std.	8.30E-04	3.10E-04	3.80E-04	7.60E-03	1.10E-03	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+	=	+	=	+
ZDT2	Mean	3.28E-01	3.26E-01	3.28E-01	3.09E-01	3.28E-01	0.00E+00
	Std.	5.70E-04	3.40E-04	3.00E-04	7.50E-03	3.00E-04	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+	=	+	=	+
ZDT3	Mean	5.13E-01	5.15E-01	5.14E-01	4.44E-01	4.92E-01	0.00E+00
	Std.	6.20E-03	1.60E-04	1.00E-03	2.20E-02	1.60E-02	0.00E+00
	<i>t</i> -test		-	-	+	=	+
ZDT4	Mean	6.61E-01	6.55E-01	0.00E+00	3.06E-01	1.86E-02	0.00E+00
	Std.	3.70E-04	2.70E-03	0.00E+00	1.90E-01	5.10E-02	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+	+	+	+	+
ZDT6	Mean	4.06E-01	3.93E-01	4.06E-01	4.05E-01	4.04E-01	0.00E+00
	Std.	7.60E-05	1.50E-03	8.20E-05	3.00E-03	3.30E-06	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+	=	=	+	+
KUR	Mean	3.94E-01	4.54E-01	4.50E-01	4.54E-01	4.53E-01	1.47E-01
	Std.	3.40E-02	2.40E-04	6.90E-04	1.60E-04	4.30E-04	7.50E-02
	<i>t</i> -test		-	-	-	-	+

Table 3 Mean and standard deviation of HV (Continued)**表 3** HV 均值和方差(续)

函数		HMOFA	NSGA-II	SMPSO	AbYSS	MOEA/D-ACD	MOFA
Deb2	Mean	9.08E-01	8.86E-01	9.10E-01	8.38E-01	9.05E-01	8.80E-01
	Std.	2.20E-04	4.30E-03	3.20E-06	5.70E-03	1.50E-04	6.10E-04
	t-test		+	-	+	+	+
DTLZ1	Mean	8.02E-04	7.79E-01	0.00E+00	7.68E-01	7.22E-01	0.00E+00
	Std.	8.00E-03	5.60E-04	0.00E+00	5.40E-04	2.50E-03	0.00E+00
	t-test		-	+	-	-	+
DTLZ2	Mean	4.09E-01	4.18E-01	4.06E-01	4.09E-01	4.10E-01	1.71E-01
	Std.	4.10E-03	3.10E-04	3.30E-04	7.20E-04	4.80E-04	1.60E-03
	t-test		-	+	=	-	+
DTLZ3	Mean	1.00E+00	1.00E+00	9.98E-01	1.00E+00	1.00E+00	9.16E-01
	Std.	2.00E-07	4.10E-09	5.10E-05	1.20E-07	3.00E-05	1.20E-03
	t-test		=	+	=	=	+
DTLZ4	Mean	3.90E-01	4.39E-01	4.25E-01	4.20E-01	3.82E-01	2.84E-02
	Std.	6.20E-02	3.30E-04	7.50E-04	3.20E-03	2.10E-03	3.30E-03
	t-test		-	-	-	+	+
DTLZ5	Mean	9.47E-02	9.41E-02	9.45E-02	9.29E-02	8.06E-02	3.55E-02
	Std.	1.70E-05	7.30E-06	3.60E-06	2.70E-05	3.20E-04	7.30E-04
	t-test		+	+	+	+	+
DTLZ6	Mean	9.47E-02	4.05E-08	9.47E-02	9.32E-02	0.00E+00	0.00E+00
	Std.	1.10E-05	4.00E-08	1.30E-06	2.40E-05	0.00E+00	0.00E+00
	t-test		+	=	+	+	+
DTLZ7	Mean	3.18E-01	3.23E-01	3.09E-01	2.66E-01	6.47E-02	0.00E+00
	Std.	3.30E-03	2.00E-04	4.20E-04	2.20E-03	2.90E-03	0.00E+00
	t-test		-	+	+	+	+
Viennet1	Mean	7.23E-01	7.22E-01	7.23E-01	7.01E-01	6.89E-01	6.87E-01
	Std.	9.30E-04	9.70E-05	7.10E-05	8.50E-04	5.90E-04	6.70E-04
	t-test		+	=	+	+	+
Viennet2	Mean	9.58E-01	9.57E-01	9.58E-01	9.46E-01	9.27E-01	9.18E-01
	Std.	2.30E-04	3.90E-05	2.90E-05	4.70E-04	8.00E-04	1.20E-03
	t-test		+	=	+	+	+
Viennet3	Mean	8.42E-01	8.40E-01	8.41E-01	8.37E-01	6.78E-01	7.84E-01
	Std.	1.20E-04	2.60E-05	2.40E-05	2.30E-04	7.30E-03	1.80E-03
	t-test		+	=	+	+	+
Better(+)			10	6	11	10	17
Same(=)			1	7	3	4	0
Worse(-)			6	4	3	3	0
Score			4	2	8	7	17

Table 4 Average rankings of six compared MOEAs based on HV**表 4** 6 种对比算法基于 HV 指标的平均排名

算法	平均排名
HMOFA	4.82
NSGA-II	4.47
SMPSO	4.11
AbYSS	3.41
MOEA/D-ACD	2.97
MOFA	1.20

图 1 用盒图(box plot)的形式给出了 6 种算法在 16 个 MOP 测试问题上独立运行 30 次获得 HV 值的分布情况.为图示方便,这里分别将 HMOFA、NSGA-II、SMPSO、AbYSS、MOEA/D-ACD 和 MOFA 算法简记为 A1、A2、A3、A4、A5 和 A6.

从图 1 可以看出,HMOFA 算法分别在 ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT4、ZDT6、DTLZ3、DTLZ5、DTLZ6 以及 Viennet1~Viennet3 上获得了最好的 HV 值的分布,也就是在 16 个 MOP 测试例上,本文算法获得了 11 个最好的 HV 分布结果,而图 1 的结果也反映了 HMOFA 算法适于处理 ZDT 系列和 Viennet 系列测试问题.NSGA-II 算法在 Deb2、DTLZ1、DTLZ2、DTLZ4 上获得了最好的 HV 分布,即在 16 个测试问题上获得了 4 个最好的 HV 分布,而 NSGA-II 算法在 ZDT1、ZDT2、ZDT3、DTLZ3、DTLZ6 和 Viennet2 等测试问题上获得的 HV 值分布与 HMOFA 算法十分类似.SMPSO 算法在 ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT6、Deb2、DTLZ5、DTLZ6、Viennet1~Viennet3 等测试问题上获得较好的 HV 值分布,并与最优的结果十分接近.AbYSS 算法在 ZDT6、

DTLZ1、DTLZ3、DTLZ4 和 Viennet3 等测试问题上获得的 HV 值分布接近最优的 HV 分布,而在 ZDT4 和 Deb2 等问题上表现较差.MOEA/D-ACD 算法在 ZDT1、ZDT2、ZDT6 和 DTLZ3 等测试问题上获得的 HV 值分布接近最优的 HV 分布,而它却在 ZDT4、DTLZ6 和 Viennet3 等测试问题上表现较差.MOEA/D-ACD 算法在 ZDT1、ZDT2、ZDT6 和 DTLZ3 等测试问题上获得的 HV 值分布接近最优的 HV 分布,而它在 ZDT4、DTLZ6 和 Viennet3 等测试问题上表现却较差.MOFA 算法在 ZDT1~ZDT4、ZDT6、DTLZ1~DTLZ7 等测试问题上获得的 HV 值分布很差.因此,从图 1 不难看出,HMOFA 算法在大部分 MOP 测试问题上的结果要比其他 5 种对比算法分布得更集中,表明本文算法鲁棒性更好.

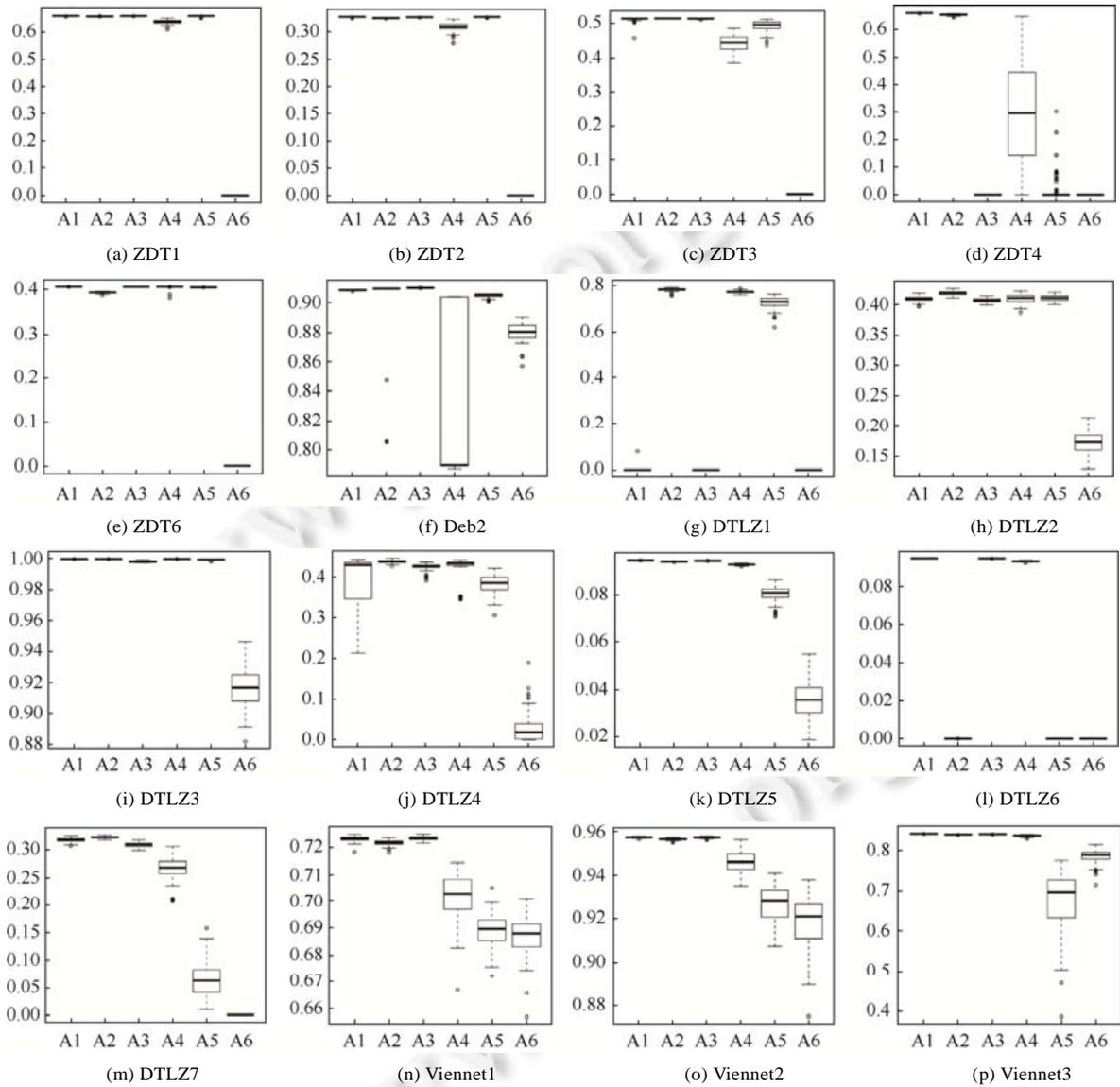


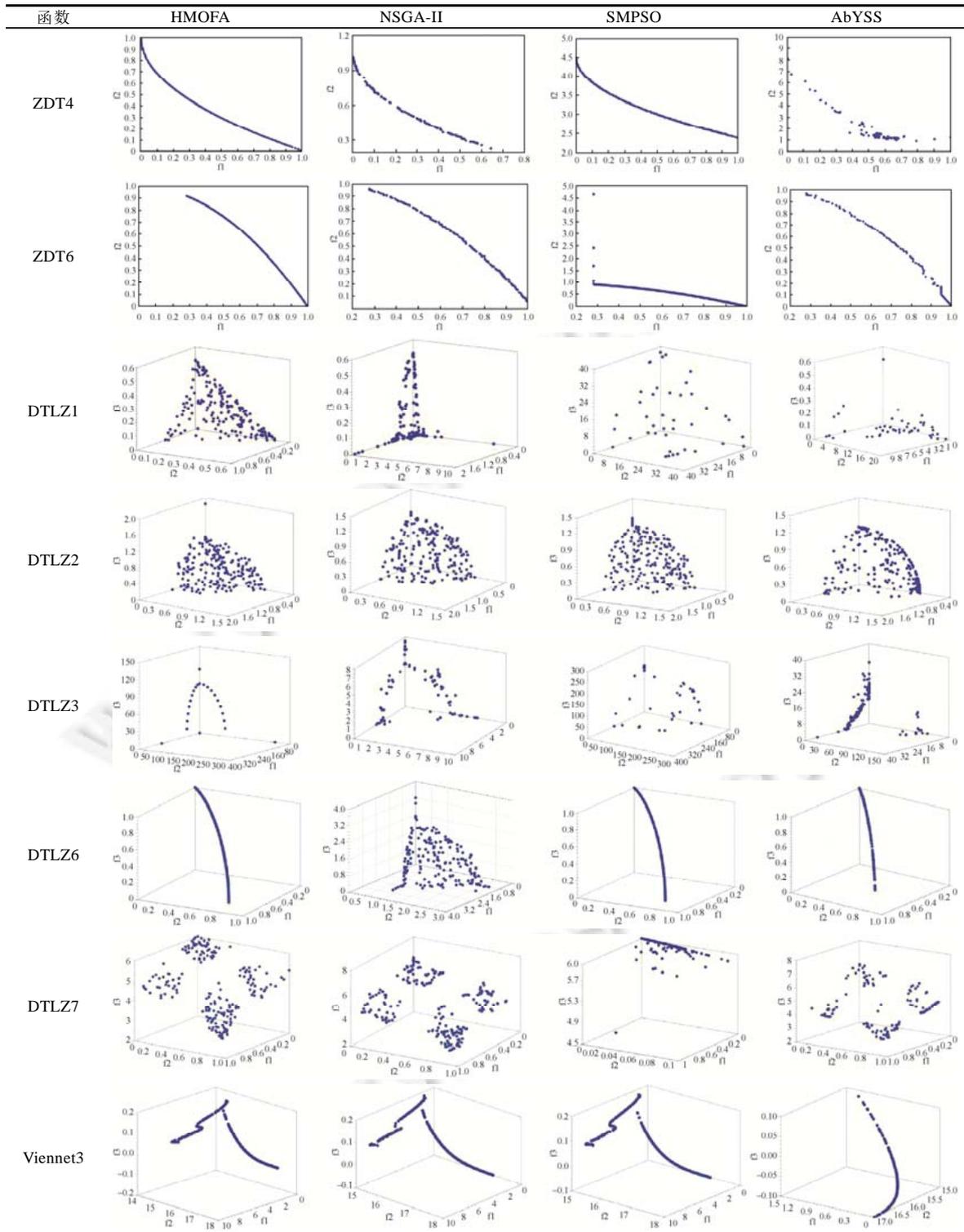
Fig.1 Box plots of the HV results obtained by six MOEAs over 30 independent runs

图 1 6 种对等比较算法独立运行 30 次 HV 结果的盒图

为了更加直观地展示各对比算法的收敛性与多样性,表 5 给出了部分对比算法在部分较难测试问题上的 Pareto 前沿.

Table 5 Approximate PFs of some MOEAs based on some hard MOPs

表 5 部分算法在部分较难测试问题上的 Pareto 前沿



由于完整呈现 6 种算法在 17 个测试函数上的近似 Pareto 前沿共需 102 副图例,鉴于篇幅的限制,这里给出表 4 中排名前 4 名的算法在部分较难测试问题上的近似 Pareto 前沿.需要指出的是,表 5 中各近似 Pareto 前沿均取自算法在每个测试题上执行 30 次独立实验时第 1 次运行所获得的结果.

在表 5 中,对于 2-目标多模态 ZDT4 函数,HMOFA 算法具有最好的收敛性与多样性表现,其次是 SMPSO 算法,随后是 NSGA-II 算法,而 AbYSS 算法的表现是最差的,因为其获得的解集不能收敛到真实 Pareto 前沿.

在 2-目标的 ZDT6 测试问题上,HMOFA 算法获得的解集能够收敛于真实 Pareto 前沿,其次是 NSGA-II 算法,随后是 AbYSS 算法,表现最差的则是 SMPSO 算法.

对于 3-目标多模态的 DTLZ1 测试问题,HMOFA 算法具有直观上最好的收敛性与多样性,其获得的解集能够分布于三角形区域内,而其他 3 种算法获得的解集分布性和收敛性均较差.

对于 DTLZ2 问题,4 种算法获得的解集的分布性和收敛性相差不大,而以 NSGA-II、SMPSO 和 AbYSS 算法略胜一筹.

对于 3-目标凹形多模态 DTLZ3 问题,HMOFA 算法获得解集的收敛性要好于其他 3 种对比算法,但其分布性却不如 NSGA-II 算法,4 种对比算法在 DTLZ3 问题上获得的结果均不理想.

在 3-目标的 DTLZ6 问题上,HMOFA 和 SMPSO 获得的解集具有最好的收敛性和分布性,其次是 AbYSS 算法,表现最差的则是 NSGA-II 算法,因为其获得的解集不能收敛到 Pareto 前沿上.在具有复杂 Pareto 前沿的 3-目标 DTLZ7 问题上,HMOFA 算法和 NSGA-II 算法获得的解集能够收敛到 4 个簇上,其次是 AbYSS 算法,表现最差的是 SMPSO 算法.

对于具有混合且退化 Pareto 前沿的 3-目标的 Viennet3 问题,HMOFA、NSGA-II 和 SMPSO 算法获得了相似的最好的收敛性与分布性结果,表现最差的则是 AbYSS 算法,因为其获得的解集不能收敛到 Viennet3 问题的 Pareto 前沿上.综合以上分析,HMOFA 算法在部分较难测试问题上具有更好的直观上的收敛性与分布性结果.

表 5 中呈现的部分算法在部分较难测试问题上的 Pareto 前沿与表 3 中给出的 HV 值的结果是相吻合的,它们相互印证了 HMOFA 算法相对其他对比算法而言具有更好的性能.当然,本文算法在少数测试问题(如 DTLZ2)上的解集稍差,但根据“没有免费的午餐”定理,我们不指望 HMOFA 算法能在所有测试问题上都获得最好的结果.

实验 2.为考察 HMOFA 算法的收敛速度,设计如下实验:利用 3 个较难的 2-目标测试问题 ZDT4、ZDT6、Deb2 和 6 种较难的 3-目标测试函数 DTLZ5、DTLZ6、DTLZ7、Viennet1、Viennet2 和 Viennet3 组成测试集合,考察 HMOFA 算法与其他 5 种对比算法在运行 100 代的过程中其 GD 值^[36]的变化情况.由于 GD 指标度量了算法的近似解集与真实 Pareto 前沿的距离,即收敛性能,因此,通过观察各算法近似解集的 GD 值随进化代数 t 变化,可以判断出算法收敛速度的快慢.实验中各算法分别运行 100 代,并每隔 10 代计算其获得的 GD 值,图 2 给出了 6 种对比算法在 9 个较难测试问题上的收敛速度曲线.从图 2 可以看出,HMOFA 算法在 ZDT4、ZDT6、Deb2、DTLZ5、DTLZ6、DTLZ7 和 Viennet1 这 7 个 MOP 问题上获得了稳定的、最好的收敛速度,而在 Viennet2 和 Viennet3 问题上获得了次优的收敛速度.虽然 HMOFA 算法未能在 Viennet2 和 Viennet3 问题上获得最好的收敛速度,但它却能在这两个问题上稳定地收敛.对比在 Viennet2 问题上获得了最好收敛速度的 AbYSS 算法,HMOFA 算法在第 90 代之后收敛速度加快,几乎接近 AbYSS 算法的收敛速度.在 Viennet3 问题上,虽然 AbYSS 算法获得了相对最好的收敛速度,但 HMOFA、NSGA-II、MOEA/D-ACD 和 SMPSO 这 4 种算法从第 10 代开始其收敛速度便趋于一致,这 4 种算法能以次优的速度稳定地收敛.综合图 2 可知,HMOFA 算法能够获得较显著的收敛速度上的优势.

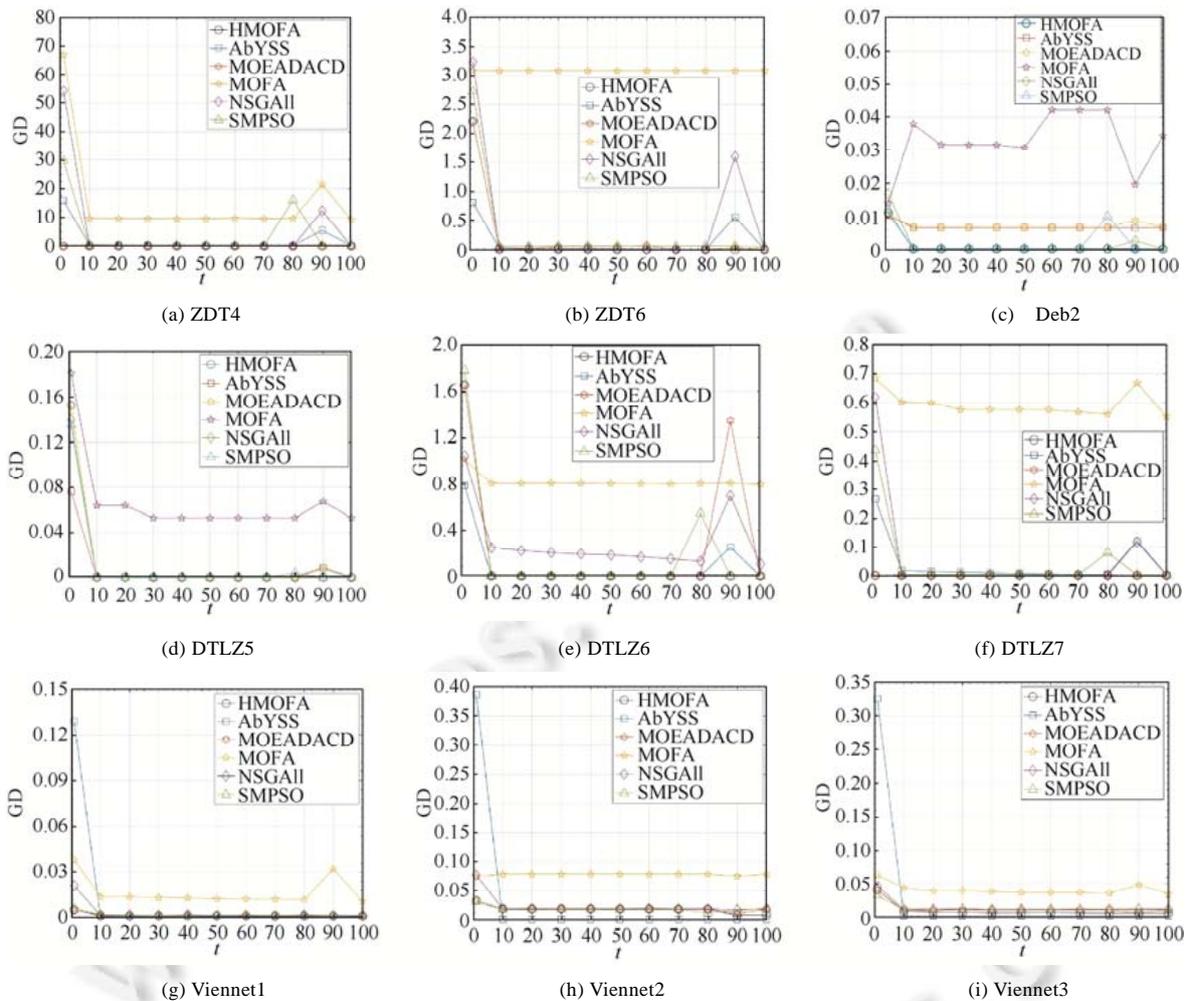


Fig.2 Curves of convergence rates of six MOEAs based on nine MOPs

图2 6种算法在9个较难测试函数上的收敛速度曲线

3.3 进一步讨论

通过上文的实验验证了 HMOFA 算法总体上具有显著的收敛性、多样性和鲁棒性优势,表明了混合水平正交实验初始化种群的方法、利用外部档案的精英个体引导个体移动的策略以及 3 点最短路径的修剪技术有机结合,协同地提高了算法的整体性能.为进一步检验在 HMOFA 算法中引入的混合水平正交初始化方法和档案精英个体引导萤火虫移动策略的有效性,分别设计实验 3 和实验 4 加以测试.

实验 3.为检验 HMOFA 算法中混合水平正交初始化策略的有效性,这里将 HMOFA 算法和未使用混合水平正交初始化方法而仅使用随机初始化方法的 HMOFA 算法(简记为 HMOFA(r))一同在 8 个较难的测试问题上进行 HV 性能测试.需要指出的是,实验 3 中 HMOFA 和 HMOFA(r)除了使用的初始化种群方法不同之外,这两种算法的其他方面均是相同的.表 6 给出了 HMOFA 算法和 HMOFA(r)算法在 8 个测试函数上获得的 HV 值.

从表 6 可以看出,HMOFA 算法在 8 个较难测试问题上获得了全部最优的 HV 均值,而 HMOFA(r)算法仅在 ZDT6 和 DTLZ1 问题上获得了与 HMOFA 算法相同的最优的 HV 均值,而 HMOFA(r)在其他 6 个测试问题上获得的 HV 均值都不如 HMOFA 算法的好.另外,从表 6 的 t -检验结果来看,HMOFA 算法对比 HMOFA(r)算法在 HV 性能上的净胜得分为 6.由于 HV 指标能够同时反映解群的收敛性和分布性,因此,采用混合水平正交初始化

种群的方法有利于算法改善群体的收敛性与分布性.由此表明了混合水平正交初始化种群的方法是有效的.究其原因,混合水平正交初始化方法一方面产生均匀分布于整个搜索空间的初始解点,初始群体的多样性促进了种群在全局范围内寻优而不易于陷入局部最优.另外,由于混合水平正交初始化方法一般能产生接近用于指定规模的初始群体,可高效地利用计算资源,这些因素相互作用改善了算法的性能.

Table 6 Results of HV for HMOFA and HMOFA(*r*) on eight MOPs

表 6 HMOFA 和 HMOFA(*r*)在 8 个测试函数上获得的 HV 值

函数		HMOFA	HMOFA(<i>r</i>)
ZDT4	Mean	6.61E-01	0.00E+00
	Std.	4.20E-04	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+
ZDT6	Mean	4.06E-01	4.06E-01
	Std.	6.50E-05	7.10E-05
	<i>t</i> -test		=
DTLZ1	Mean	0.00E+00	0.00E+00
	Std.	0.00E+00	0.00E+00
	<i>t</i> -test		=
DTLZ2	Mean	4.10E-01	4.09E-01
	Std.	2.60E-03	4.00E-03
	<i>t</i> -test		+
DTLZ3	Mean	1.00E+00	9.99E-01
	Std.	1.90E-07	5.10E-04
	<i>t</i> -test		+
DTLZ6	Mean	9.47E-02	0.00E+00
	Std.	1.10E-05	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+
DTLZ7	Mean	3.17E-01	3.04E-01
	Std.	3.00E-03	6.20E-03
	<i>t</i> -test		+
Viennet3	Mean	8.42E-01	8.41E-01
	Std.	1.00E-04	2.10E-04
	<i>t</i> -test		+
	Better(+)		6
	Same(=)		2
	Worse(-)		0
	Score		6

实验 4.为检验 HMOFA 算法中档案精英个体引导萤火虫移动机制的有效性,这里将 HMOFA 和未采用精英解引导萤火虫移动而仅使用基本 FA 算法萤火虫移动方法的 HMOFA 算法(简记为 HMOFA(*b*))一同在 8 个测试函数上进行 HV 性能测试,实验 4 中,HMOFA 和 HMOFA(*b*)除使用的萤火虫移动机制不同之外,这两种算法的其他方面均是一致的.表 7 给出了 HMOFA 算法和 HMOFA(*b*)算法在 8 个测试函数上获得的 HV 值.

从表 7 可以看出,HMOFA 在 8 个较难问题上获得了全部最优的 HV 均值,而 HMOFA(*b*)算法仅在 DTLZ1 问题上获得与 HMOFA 算法相同的最优的 HV 均值,而在其他 7 个 MOP 问题上获得的 HV 均值都要差于 HMOFA 算法.表 7 的 *t*-检验结果中,HMOFA 算法对比 HMOFA(*b*)算法在 HV 性能上的净胜分为 7,而仅在 DTLZ1 问题上与 HMOFA(*b*)算法的结果无显著性区别.究其原因,HMOFA 算法利用档案精英个体指导搜索,精英解携带了与问题相关的有益信息,使得算法能够较快地收敛.另外,由于 HMOFA 算法采用随机方式从档案中选取精英解引导个体移动,因而不会导致群体在局部区域聚集.所以,这里的档案精英解引导策略有利于改善算法的收敛性与多样性.实验 4 的结果表明,档案精英解指导种群搜索的方法是有效的.

Table 7 Results of HV for HMOFA and HMOFA(*b*) on eight MOPs

表 7 HMOFA 和 HMOFA(*b*)在 8 个测试函数上的 HV 值

函数		HMOFA	HMOFA(<i>b</i>)
ZDT4	Mean	6.61E-01	0.00E+00
	Std.	4.20E-04	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+
ZDT6	Mean	4.06E-01	0.00E+00
	Std.	6.50E-05	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+

Table 7 Results of HV for HMOFA and HMOFA(*b*) on eight MOPs (Continued)
 表 7 HMOFA 和 HMOFA(*b*)在 8 个测试函数上的 HV 值(续)

函数		HMOFA	HMOFA(<i>b</i>)
DTLZ1	Mean	0.00E+00	0.00E+00
	Std.	0.00E+00	0.00E+00
	<i>t</i> -test		=
DTLZ2	Mean	4.10E-01	1.79E-01
	Std.	2.60E-03	1.80E-02
	<i>t</i> -test		+
DTLZ3	Mean	1.00E+00	9.20E-01
	Std.	1.90E-07	1.60E-02
	<i>t</i> -test		+
DTLZ6	Mean	9.47E-02	0.00E+00
	Std.	1.10E-05	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+
DTLZ7	Mean	3.17E-01	0.00E+00
	Std.	3.00E-03	0.00E+00
	<i>t</i> -test		+
Viennet3	Mean	8.42E-01	7.90E-01
	Std.	1.00E-04	1.60E-02
	<i>t</i> -test		+
	Better(+)		7
	Same(=)		1
	Worse(-)		0
	Score		7

4 结 论

现实中的多目标优化问题不断增多且日益复杂,迫切需要发展新的有效的多目标优化方法应对挑战.近年来,基于新型进化范例和混合机制的多目标优化算法渐已成为多目标优化领域的新的研究热点,它们在求解各种复杂 MOP 问题中占据重要地位.本文提出一种混合型多目标萤火虫算法 HMOFA,该算法将基本 FA 算法拓展至多目标优化领域,并将混合水平正交初始化方法、档案精英个体引导策略和 3 点最短路径技术融入其中,以提高算法的整体性能.实验结果表明,HMOFA 算法在收敛性、多样性和鲁棒性等方面要显著地优于其他 5 种对比算法.未来将从 3 个方面做进一步的工作:(1) 利用更多、更困难的 MOP 问题测试 HMOFA 算法;(2) 将 HMOFA 算法应用于工程实践中的 MOP 问题;(3) 尝试将新的学习机制引入 MOEA 算法,不断改善 MOEA 算法求解复杂 MOP 问题的性能.

References:

- [1] Gong MG, Jiao LC, Yang DD, Ma WP. Research on evolutionary multi-objective optimization algorithms. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2009,20(2):271–289 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3483.htm>
- [2] Knowles JD, Corne DW. Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy. Evolutionary Computation, 2000,8(2):149–172. [doi: 10.1162/106365600568167]
- [3] Srinivas N, Deb K. Multi-Objective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms. Evolutionary Computation, 1994,2(3):221–248. [doi: 10.1162/evco.1994.2.3.221]
- [4] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2002,6(2):182–197. [doi: 10.1109/4235.996017]
- [5] Zitzler E, Thiele L. Multi-Objective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 1999,3(4):257–271. [doi: 10.1109/4235.797969]
- [6] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. In: Giannakoglou K, Tsahalis DT, Periaux J, Papailioudis KD, Fogarty T, eds. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 95–100.
- [7] Zitzler E, Kunzli S. Indicator-Based selection in multiobjective search. In: Proc. of the Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII). LNCS 3242, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 832–842. [doi: 10.1007/978-3-540-30217-9_84]

- [8] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 2011,19(1):45–76. [doi: 10.1162/EVCO_a_00009]
- [9] Li MQ, Yang SX, Liu XH. Pareto or non-Pareto: Bi-Criterion evolution in multiobjective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2016,20(5):645–665. [doi: 10.1109/TEVC.2015.2504730]
- [10] Zhang QF, Li H. MOEA/D: A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2007,11(6):712–731. [doi: 10.1109/TEVC.2007.892759]
- [11] Zhou AM, Zhang QF, Zhang GX. Multiobjective evolutionary algorithm based on mixture Gaussian models. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2014,25(5):913–928 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4514.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004514]
- [12] Wang LP, Zhang QF, Zhou AM, Gong M, Jiao L. Constrained subproblems in a decomposition-based multiobjective evolutionary algorithm. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2016,20(3):475–480. [doi: 10.1109/TEVC.2015.2457616]
- [13] Coello CCA, Pulido GT, Lechuga MS. Handling multiple objectives with particles swarm optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*. 2004,8(3):256–279. [doi: 10.1109/TEVC.2004.826067]
- [14] Nebro AJ, Durillo JJ, García-Nieto J, Coello CCA, Luna F, Alba E. SMPSO: A new PSO metaheuristic for multi-objective optimization. In: *Proc. of the IEEE Symp. Computer Int'l Multi-Criteria Decis.-Mak. Nashville, 2009*. 66–73. [doi: 10.1109/MCDM.2009.4938830]
- [15] Zhang QF, Zhou AM, Jin Y. RM-MEDA: A regularity model based multi-objective estimation of distribution algorithm. *IEEE Trans. on Evolutionary Computations*, 2007,12(1):1–23. [doi: 10.1109/TEVC.2007.894202]
- [16] Xie CW, Xu L, Zhao HR, Xia XW, Wei B. Multi-Objective fireworks optimization algorithm using elite opposition-based learning. *Acta Electronica Sinica*, 2016,44(5):1180–1188 (in Chinese with English abstract).
- [17] Molina J, Laguna M, Martí R, Caballero R. SSPMO: A scatter tabu search procedure for non-linear multi-objective optimization. *Infornis Journal on Computing*, 2007,19(1):91–100. [doi: 10.1287/ijoc.1050.0149]
- [18] Nebro AJ, Luna F, Alba E, Dorronsoro B, Durillo JJ, Beham A. AbYSS: Adapting scatter search to multiobjective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2008,12(4):439–457. [doi: 10.1109/TEVC.2007.913109]
- [19] Soliman O, Bui LT, Abbass H. A memetic coevolutionary multi-objective differential evolution algorithm. In: *Multi-Objective Memetic Alg. Berlin: Springer-Verlag, 2009*. 369–388. [doi: 10.1007/978-3-540-88051-6_17]
- [20] Yang XS. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. 2nd ed., Luniver Press, 2010.
- [21] Yang XS. Multiobjective firefly algorithm for continuous optimization. *Engineering with Computers*, 2013,29(2):175–184. [doi: 10.1007/s00366-012-0254-1]
- [22] dos Santos CL, Bora TC, Schauenburg F, Alotto P. A multiobjective firefly approach using beta probability distribution for electromagnetic optimization problems. *IEEE Trans. on Magnetics*, 2013,49(5):2085–2088. [doi: 10.1109/TMAG.2013.2238902]
- [23] Tsai CW, Huang YT, Chang MC. A non-dominated sorting firefly algorithm for multi-objective optimization. In: *Proc. of the 14th Int'l Conf. on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA)*. IEEE, 2015. 62–67.
- [24] Xie CW, Wang ZJ, Xia XW. Multi-Objective evolutionary algorithm based on archive-elite learning and opposition-based learning. *Chinese Journal of Computers*, 2017,40(3):757–772 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.11897/SP.J.1016.2017.00757]
- [25] Gong WY, Cai ZH. Research on an ϵ -dominance based orthogonal differential evolution algorithm for multi-objective optimization. *Journal of Computer Research and Development*, 2009,46(4):655–666 (in Chinese with English abstract).
- [26] Leung YW, Wang YP. An orthogonal genetic algorithm with quantization for global numerical optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2001,5(1):41–53. [doi: 10.1109/4235.910464]
- [27] Cai ZX, Jiang ZY, Wang Y, Luo YD. A novel constrained optimization evolutionary algorithm based on orthogonal experimental design. *Chinese Journal of Computers*, 2010,33(5):855–864 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2010.00855]
- [28] Wang Y, Liu H, Cai Z, Zhou Y. An orthogonal design based constrained evolutionary optimization algorithm. *Engineering Optimization*, 2007,39(6):715–736. [doi: 10.1080/03052150701280541]
- [29] Zhou XY, Wu ZJ, Wang MW. Artificial bee colony algorithm based on orthogonal experimental design. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2015,26(9):2167–2190 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4800.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004800]
- [30] Zeng SY, Wei W, K LS, Yao SZ. A multi-objective evolutionary algorithm based on orthogonal design. *Chinese Journal of Computers*, 2005,28(7):1153–1162 (in Chinese with English abstract).

- [31] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 2000,8(2):173–195. [doi: 10.1162/106365600568202]
- [32] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable multi-objective optimization test problems. In: Fogel DB, ed. *Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. Piscataway: IEEE Service Center, 2002. 825–830. [doi: 10.1109/CEC.2002.1007032]
- [33] Tang LX, Wang XP. A hybrid multiobjective evolutionary algorithm for multiobjective optimization problems. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2013,17(1):20–46. [doi: 10.1109/TEVC.2012.2185702]
- [34] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 1999,3(4):257–271. [doi: 10.1109/4235.797969]
- [35] Ishibuchi H, Hitotsuyanagi Y, Tsukamoto N, Nojima Y. Many-Objective test problems to visually examine the behavior of multiobjective evolution in a decision space. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Problem Solving from Nature*. Krakow, 2010. 91–100. [doi: 10.1007/978-3-642-15871-1_10]
- [36] Van Veldhuizen DA, Lamont GB. On measuring multi-objective evolutionary algorithm performance. In: *Congress on Evolutionary Computation*. Piscataway: IEEE Press, 2000. 204–211. [doi: 10.1109/CEC.2000.870296]

附中文参考文献:

- [1] 公茂果,焦李成,杨咚咚,马文萍.进化多目标算法研究.软件学报,2009,20(2):271–289. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3483.htm>
- [11] 周爱民,张青富,张桂戎.一种基于混合高斯模型的多目标进化算法.软件学报,2014,25(5):913–928. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4514.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004514]
- [16] 谢承旺,许雷,赵怀瑞,夏学文,魏波.应用精英反向学习的多目标烟花爆炸算法.电子学报,2016,44(5):1180–1188.
- [24] 谢承旺,王志杰,夏学文.应用档案精英学习和反向学习的多目标进化算法.计算机学报,2017,40(3):757–772. [doi: 10.11897/SP.J.1016.2017.00757]
- [25] 龚文引,蔡之华.基于 ϵ 占优的正交多目标差分演化算法研究.计算机研究与发展,2009,46(4):655–666.
- [27] 蔡自兴,江中央,王勇,罗一丹.一种新的基于正交实验设计的约束优化进化算法.计算机学报,2010,33(5):855–864. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2010.00855]
- [29] 周新宇,吴志健,王明文.基于正交实验设计的人工蜂群算法.软件学报,2015,26(9):2167–2190. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4800.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004800]
- [30] 曾三友,魏巍,康立山,姚书振.基于正交设计的多目标演化算法.计算机学报,2005,28(7):1153–1162.



谢承旺(1974—),男,湖北武汉人,博士,副教授,CCF 高级会员,主要研究领域为智能计算,多目标优化.



肖驰(1992—),男,学士,主要研究领域为智能计算.



丁立新(1967—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 专业会员,主要研究领域为智能计算,信息处理.



夏学文(1974—),男,博士,副教授,CCF 专业会员,主要研究领域为智能计算,信息处理.



朱建勇(1977—),男,博士,讲师,主要研究领域为工业过程的随机分布,预测控制.



张飞龙(1992—),男,学士,主要研究领域为智能计算.