软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2017,28(10):2539−2547 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005175]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

NMG-代数中同态核的结构刻画*

周红军, 马 琴, 兰淑敏

(陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
通讯作者: 周红军, E-mail: hjzhou@snnu.edu.cn; sdzhjun@gmail.com

摘 要: 逻辑代数上的 Bosbach 态与 Riečan 态是经典概率论中 Kolmogorov 公理的两种不同方式的多值化推广,也是概率计量逻辑中语义计量化方法的代数公理化,是非经典数理逻辑领域中的重要研究分支.现已证明具有 Glivenko 性质的逻辑代数上的 Bosbach 态与 Riečan 态等价,并且逻辑代数的 Glivenko 性质是研究态算子的构造和存在性的重要工具,因而是态理论中的研究热点之一.研究了 NMG-代数基于核算子的 Glivenko 性质,证明 NMG-代数具有核基 Glivenko 性质的充要条件是该核算子是从此 NMG-代数到其像集代数的同态,并给出 NMG-代数中同态核的结构刻画.这里,NMG-代数是刻画序和三角模 $\langle([0,1/2],T_{\mathrm{NM}}),([1/2,1],T_{\mathrm{M}})\rangle$ 的逻辑系统 NMG 的语义逻辑代数.
关键词: 概率计量逻辑;NMG-代数;Glivenko 定理;同态核
中图法分类号: TP301

中文引用格式: 周红军,马琴,兰淑敏.NMG-代数中同态核的结构刻画.软件学报,2017,28(10):2539−2547. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5175.htm
英文引用格式: Zhou HJ, Ma Q, Lan SM. Characterizations of homomorphic nuclei on NMG-algebras. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2017,28(10):2539−2547 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/5175.htm

Characterizations of Homomorphic Nuclei on NMG-Algebras

ZHOU Hong-Jun, MA Qin, LAN Shu-Min

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: Bosbach states and Riečan states are two different types of many-valued generalizations of classical probability measures on Boolean algebras by extending the prominent Kolmogorov axioms in different ways. Being regarded as algebraic and axiomatic counterparts of the semantic quantification in probabilistically quantitative logic, both states draw great interests of researchers in the community of non-classical mathematical logics. It has been proved in the literature that Bosbach states and Riečan states coincide on many-valued logical algebras having the Glivenko property, and that the Glivenko property plays a key role in the study of construction and existence of states on logical algebras. This paper studies the Glivenko property of NMG-algebras with respect to a nucleus, providing several necessary and sufficient conditions for the underlying nucleus to be a homomorphism into the NMG-algebra with its range as the supporting set. A particularly interesting characterization shows that a nucleus on an NMG-algebra is such a homomorphism if and only if it is a double relative negation defined by an involutive element whose (canonical) negation is a fixpoint of the t-norm square operation.
Key words: probabilistically quantitative logic; NMG-algebra; Glivenko theorem; homomorphic nucleus

信息的不确定性是现实生活中普遍存在的一个基本特征,将概率测度论和多值逻辑交叉融合是不确定性推理领域近 20 年的研究热点之一[1−3].周红军在文献[4]中分别从语义计量化、模态形式化及代数公理化这 3 个角度系统地总结和梳理了命题型的概率计量逻辑理论及其在逻辑理论的相容度、程度化推理、极大相容理

* 基金项目: 国家自然科学基金(61473336, 11171200); 陕西省青年科技新星计划(2016KJXX-24); 中央高校基本科研业务费专项资金特别支持项目(GK201403001)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61473336, 11171200); Youth Science and Technology Program of Shaanxi Province (2016KJXX-24); Fundamental Research Funds for the Central Universities (GK201403001)
收稿时间: 2016-03-21; 修改时间: 2016-06-17, 2016-10-08; 采用时间: 2016-10-31

论的结构刻画、逻辑代数的 Stone 拓扑表示等领域中的应用,从而为不确定性推理构建了语言表达能力和逻辑推理能力均很强的概率计量化模型,建立了多值概率的基本框架.其中,通过在多值逻辑代数上推广经典概率论中的 Kolmogorov 公理这一代数公理化方法而建立的态理论是概率计量逻辑的一个重要分支,态算子按照推广方式的不同又分为 Bosbach 态与 Riečan 态[4−6].我们在文献[4,5]中已证明具有 Glivenko 性质的逻辑代数上的 Bosbach 态与 Riečan 态等价,并且逻辑代数的 Glivenko 性质是研究态算子的构造和存在性的重要工具,也具有一定的广泛性,如 BL-代数、R_0-代数与 Heyting 代数都是 Glivenko 的.

经典 Glivenko 定理证明了一个逻辑公式 φ 是经典二值命题逻辑中的定理的充要条件是其双重否定 $\neg\neg\varphi$ 是直觉命题逻辑中的定理.它的代数版本可以描述为 Heyting 代数 M 中的所有对合元之集 $\mathrm{Reg}(M)$ 构成 Boole 代数,且 $\neg\neg: M\to \mathrm{Reg}(M)$ 是满同态,其中,$\neg x = x\to 0, x\in M, \mathrm{Reg}(M)=\{x\in M\mid \neg\neg x = x\}$. Cignoli 和 Torrens 在文献[7]中将上述 Glivenko 定理推广到了剩余格这一基本逻辑代数结构中,并给出了双重否定 $\neg\neg$ 成为到 $\mathrm{Reg}(M)$ 的满同态的若干充要条件.Pump 在文献[8]中证明了 KL-代数基于泛映射的 Glivenko 定理,其中,泛映射是双重否定的一种推广.注意,并非所有的剩余格都是 KL-代数.在剩余格中,通过把双重否定一般化,我们在文献[5]中引入了相对否定的概念.设 M 是剩余格,并取定 $a\in M$, 定义 $\neg_a: M\to M$ 为 $\neg_a x = x\to a, x\in M$. 称 $\neg_a$ 为 M 中相对于 a 的相对否定,简称 a-相对否定,称 a 为相对元.注意,上述 $\neg$ 实为 $\neg_0$.基于双重相对否定,我们进一步推广了 Cignoli 和 Torrens 的结果,得到了双重相对否定成为到剩余格 $\mathrm{Reg}_a(M)=\{x\in M\mid \neg_a\neg_a x = x\}$ 的满同态的充要条件.沿用文献[9]中的术语,双重相对否定 $\neg_a\neg_a$ 是核算子(nucleus).我们再次在文献[10]中研究了剩余格基于核算子的 Glivenko 定理,给出了核算子是相应同态(以下简称同态核,并参见定理 1 后面的说明)的充要条件,得到了 Glivenko 定理目前最广泛的代数形式.注意,即使同态核也不限于双重相对否定 $\neg_a\neg_a$ 的形式.研究表明,同态核对研究剩余格上的 Bosbach 态有特殊作用,而相对否定是研究剩余格上的 Riečan 态的重要工具.如前所述,剩余格上的 Bosbach 态与 Riečan 态是多值概率中两种最著名的概念,因此,理清同态核与双重相对否定间的关系将有助于 Bosbach 态与 Riečan 态间的比较研究.

我们在文献[11]中给出了 R_0-代数(或称为 NM-代数,参阅文献[12])中同态核的刻画,证明了在 R_0-代数 M 中核算子 μ 是同态核当且仅当 $\mu=\neg_a\neg_a$, 其中, $(\neg a)^2=\neg a,\ a\in M$. 本文将研究 NMG-代数中基于核算子的 Glivenko 定理及其同态核的刻画,此时,主要结论需加强为:在 NMG-代数 M 中核算子 μ 是同态核当且仅当存在 $a\in M$ 且满足 $(\neg a)^2=\neg a,\ \neg\neg a = a$ 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$. 注意,NMG-代数是较 R_0-代数更为广泛的一类逻辑代数,特别是它的否定运算 $\neg$ 未必是对合的,因而与文献[11]中的结论不同,证明方法也有所不同,但结论更具广泛性. NMG-代数作为第一个基于左连续序和三角模的模糊逻辑 NMG 的等价代数,其语义也备受关注(具体地,可参阅文献[13,14]).

本文第 1 节简要介绍 NMG-代数的基本知识,包括 NMG-代数上的核算子以及基于核算子的 Glivenko 定理.第 2 节首先在标准 NMG-代数 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 中研究同态核的结构,证明核算子 μ 是同态核当且仅当存在 $a\in[0,1/4)\cup\{1\}$ 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$. 然后将此结论推广到一般 NMG-链 M 中,证明核算子 μ 是同态核当且仅当 $\mu=\neg_a\neg_a$, 其中, $a\in M^-\cup\{1\}$. 最后利用 NMG-代数的次直积表示定理证明在 NMG-代数 M 中核算子 μ 是同态核当且仅当 $\mu=\neg_a\neg_a$, 其中, $(\neg a)^2=\neg a, \neg\neg a = a, a\in M$. 第 3 节是结束语及今后有待考虑的问题.

1 预备知识

本节简要介绍有关 NMG-代数的一些基本知识,以及 NMG-代数基于核算子的 Glivenko 定理,参阅文献[4,9,13].为介绍 NMG-代数,首先对剩余格进行简单介绍.

称 $(2,2,2,2,0,0)$ 型代数 $(M,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 为剩余格,若

(i) $(M,\wedge,\vee,0,1)$ 为有界格;

(ii) $(M,\otimes,1)$ 是交换幺半群;

(iii) $(\otimes,\to)$ 构成 M 上的伴随对,即

$$x\otimes y\leqslant z \text{ iff } x\leqslant y\to z, x,y,z\in M,$$

其中,$\leqslant$为格 M 中的偏序.

定义 1. 称剩余格 $(M,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 为 NMG-代数,若对任意的 $x,y\in M$, 满足:

(i) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$;

(ii) $(x\otimes y\to 0)\vee(x\wedge y\to x\otimes y)=1$;

(iii) $(\neg\neg x\to x)\vee(x\wedge y\to x\otimes y)=1$, 其中, $\neg x=x\to 0$.

其他逻辑代数,如 MTL-代数、BL-代数、R_0-代数以及 Heyting 代数等都是具有特殊代数结构的剩余格,参阅文献[4].其中,R_0-代数是满足定义 1(i)与定义 1(ii)的对合剩余格,即需把定义 1(iii)加强为 $\neg\neg x\to x=1$, 因而 R_0-代数是 NMG-代数,但反之不真.例如,在 $[0,1]$ 上定义 $x\wedge y=\min\{x,y\}, x\vee y=\max\{x,y\}$,

$$x\otimes y=\begin{cases}0, & x+y\leqslant 1/2\\ \min\{x,y\}, & x+y>1/2\end{cases},\quad x\to y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ \max\{(1/2)-x,y\}, & x>y\end{cases},$$

则 $([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 是 NMG-代数,但不是 R_0-代数.更一般地,设 $\alpha\in(0,1)$, 在 $[0,1]$ 上定义 $\wedge=\min,\vee=\max$,

$$x\otimes y=\begin{cases}0, & x+y\leqslant \alpha\\ \min\{x,y\}, & x+y>\alpha\end{cases},\quad x\to y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ \max\{\alpha-x,y\}, & x>y\end{cases},$$

则 $([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 也是 NMG-代数,记为 $[0,1]_\alpha$. 称 $[0,1]_{1/2}$ 为标准 NMG-代数,记为 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$. $[0,1]_\alpha$ 中的三角模 $\otimes$ 实为序和三角模 $\langle([0,\alpha],T_{\mathrm{NM}}),([\alpha,1],T_{\mathrm{M}})\rangle$, 其中, T_{NM} 与 T_{M} 分别为幂零极小与取小三角模(参阅文献[13]).对 $\alpha,\beta\in(0,1)$, 下述映射 f 为 $[0,1]_\alpha$ 与 $[0,1]_\beta$ 间的代数同构:

$$f(x)=\begin{cases}(\beta/\alpha)x, & 0\leqslant x\leqslant\alpha\\ ((1-\beta)/(1-\alpha))(x-1)+1, & \alpha<x\leqslant 1\end{cases}\tag{1}$$

因 NMG-代数满足预线性公理 $(x\to y)\vee(y\to x)=1$, 所以,在 NMG-代数中次直积表示定理成立,即任一 NMG-代数都可表示成一族 NMG-链的次直积,因此,NMG-链在研究 NMG-代数时起着核心作用.在 NMG-代数 M 中规定

$$M^+=\{x\in M\mid x>\neg x\},\ M^-=\{x\in M\mid x<\neg x\},$$

则由次直积表示定理可知, $M^-=\{\neg x\mid x\in M^+\}$. 任一 NMG-代数 M 中至多有一点 $p\in M$ 使得 $p=\neg p$,称这样的 p 为 M 的否定不动点.对任意 NMG-链 M,若 M 含有否定不动点 p,则 $M=M^+\cup M^-\cup\{p\}$, 且对任意的 $x\in M^-$ 与 $y\in M^+, x<p<y$. 当 M 无不动点时, $M=M^+\cup M^-$. 例如, $[0,1]^+_{\mathrm{NMG}}=(1/4,1], [0,1]^-_{\mathrm{NMG}}=[0,1/4), p=1/4$. 注意, $[0,1]-\{1/4\}$ 带上 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 中的运算也构成 NMG-代数,但它没有否定不动点.另外,王三民等人在文献[13]中也证明了 NMG-代数的标准完备性定理,即,一个等式在所有 NMG-代数中成立当且仅当它在标准 NMG-代数 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 中成立.这为验证 NMG-代数中的等式带来极大方便,如,不难验证 $(x\to y)\vee((x\to y)\to(\neg x\vee y))=1$ 在 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 中成立,从而它在所有 NMG-代数中成立.由此等式,便得到 NMG-链 M 中蕴涵算子的表达式.

$$x\to y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ \neg x\vee y, & x>y\end{cases}, x\in M.\tag{2}$$

由 NMG-代数的次直积表示定理和标准完备性定理,还可进一步验证:对任一 $x\in M^-$,

$$x=\neg\neg x\tag{3}$$

由式(3)可知, $\{\neg x\mid x\in M^-\}\subset M^+$.

定义 2. 设 M 是 NMG-代数,称自映射 $\mu:M\to M$ 为 M 上的核算子(nucleus),若对任意 $x,y\in M$, μ满足:

(i) $x\leqslant\mu(x)$;

(ii) 当 $x\leqslant y$ 时, $\mu(x)\leqslant\mu(y)$;

(iii) $\mu(\mu(x))=\mu(x)$;

(iv) $\mu(x)\otimes\mu(y)\leqslant\mu(x\otimes y)$.

易验证双重相对否定 $\mu=\neg_a\neg_a$ 与恒等映射都是核算子,但核算子不限于上述两种形式[4,10].本文关心同态核算子的结构,为此,先列出核算子的基本性质,其证明参阅文献[4,9].

命题 1. 设μ是 NMG-代数 M 上的核算子, $x,y\in M$, 则:

(i) $\mu(x\to y)\leqslant\mu(x)\to\mu(y)=x\to\mu(y)$;

(ii) $\mu(x\to\mu(y))=x\to\mu(y)$;

(iii) $\mu(x\otimes y)=\mu(\mu(x)\otimes y)=\mu(\mu(x)\otimes\mu(y))$;

(iv) $\mu(x\wedge y)\leqslant\mu(\mu(x)\wedge\mu(y))=\mu(x)\wedge\mu(y)$;

(v) $\mu(x\vee y)=\mu(\mu(x)\vee\mu(y))$.

命题 2. NMG-代数 M 上的自映射μ是核算子当且仅当对任意的 $x,y\in M$, $\mu(x)\to\mu(y)=x\to\mu(y)$.

设 M 是 NMG-代数,μ是 M 上的核算子.令

$$\mathrm{Reg}_\mu(M)=\{x\in M\mid\mu(x)=x\},$$

则由核算子是闭包算子可知 $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 是闭包系统,从而对$\wedge$封闭;又由命题 1(i)与命题 1(ii)可知 $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 对$\to$封闭.再定义 $x\vee_\mu y=\mu(x\vee y),x\otimes_\mu y=\mu(x\otimes y),x,y\in\mathrm{Reg}_\mu(M)$, 则 $(\mathrm{Reg}_\mu(M),\wedge,\vee_\mu,\otimes_\mu,\to,\mu(0),1)$ 构成剩余格,但它未必是 NMG-代数.若μ保持$\to$,则可验证μ是 NMG-代数同态,从而,此时 $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 是 NMG-代数.

记 $D_\mu(M)=\{x\in M\mid\mu(x)=1\}$,可验证 $D_\mu(M)$ 是 M 中的 MP-滤子,并按文献[4]中的式(8.1.14)生成商 NMG-代数 $M/D_\mu(M)$.

定理 1(Glivenko 定理). 设 M 是 NMG-代数,μ是 M 上的核算子,则以下各条等价.

(i) $\mathrm{Reg}_\mu(M/D_\mu(M))=M/D_\mu(M)$;

(ii) 对任一 $x\in M$, $\mu(\mu(x)\to x)=1$;

(iii) 对任意的 $x,y\in M$, $\mu(x\to y)=x\to\mu(y)$;

(iv) μ 是从 M 到 $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 的满同态,此时, $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 同构于 $M/D_\mu(M)$.

证明:参阅文献[4,10]. □

设μ是 NMG-代数 M 上的核算子,若 M 与μ满足定理 1 中的等价条件,则称 M 具有μ-Glivenko 性质,或称 M 是μ-Glivenko 的,并称μ是同态核.特别地,μ是同态核指μ是从 M 到 $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 的满同态,要区别于 M 上的自同态,因为 $\mathrm{Reg}_\mu(M)$ 不是 M 的子代数.今后将 $\neg_a\neg_a$ -Glivenko 有时也简称为 a-Glivenko.

2 NMG-代数中同态核的刻画

本节研究 NMG-代数中同态核的结构.遵循由具体到抽象的原则,首先考虑标准 NMG-代数,然后考虑 NMG-链,最后再研究一般 NMG-代数中的同态核.

定理 2. 设 $M=[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 为标准 NMG-代数,μ是 M 上的核算子,则 M 是μ-Glivenko 的当且仅当存在 $a\in[0,1/4)\cup\{1\}$, 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$.

证明: $(\Leftarrow)$ M 显然是 1-Glivenko 的.下设 $a\in[0,1/4)$,则有

$$\neg_a\neg_a x=\begin{cases}1, & x\geqslant(1/2)-a\\ x, & a<x<(1/2)-a\\ a, & x\leqslant a\end{cases}\tag{4}$$

于是,对任一 $x\in[0,1]$, $\neg_a\neg_a(\neg_a\neg_a x\to x)=1$. 所以,$M$ 具有 a-Glivenko 性质, $a\in[0,1/4)$.

$(\Rightarrow)$ 设 M 是μ-Glivenko 的.首先,对 $x\in[1/4,1]$, 有 $\mu(\mu(x)\to x)=1$. 若 $x<\mu(x)$, 则 $(1/2)-\mu(x)<(1/2)-x\leqslant x$, 从而有 $\mu(x)=\mu((1/2-\mu(x))\vee x)=\mu(\mu(x)\to x)=1$. 于是,对 $x\in[1/4,1]$,必有 $\mu(x)=x$ 或 $\mu(x)=1$.特别地, $\mu(1/4)=1/4$ 或 $\mu(1/4)=1$.

情形 1: $\mu(1/4)=1$.

由μ保序可知,对任一 $x\geqslant1/4$, 有 $\mu(x)=1$. 设 $x\in[0,1/4)$, 由μ为同态及 $1/4\to x=1/4$ 可得

$$\begin{aligned}\mu(x)=1\to\mu(x)&=\mu(1/4)\to\mu(x)\\&=\mu(1/4\to x)\\&=\mu(1/4)=1.\end{aligned}$$

所以有 $\mu=\neg_1\neg_1$.

情形 2: $\mu(1/4)=1/4$.

设 $x<1/4$,则有:

$$1/4\to x=1/4,$$

从而有:

$$1/4=\mu(1/4)=\mu(1/4\to x)=\mu(1/4)\to\mu(x)=1/4\to\mu(x),$$

于是必有:

$$\mu(x)<1/4.$$

设 $\mu(x)>x$, 则有:

$$\begin{aligned}1&=\mu(\mu(x)\to x)=\mu((1/2-\mu(x))\vee x)\\&=\mu(1/2-\mu(x))=\mu(\mu(x)\to 0)\\&=\mu(x)\to\mu(0),\end{aligned}$$

于是 $\mu(x)=\mu(0)$.

这说明,对任一 $x\in[0,1/4)$, $\mu(x)=x$ 或 $\mu(x)=\mu(0)<1/4$.

令 $x_0=\inf\{x\in[0,1]\mid\mu(x)=1\}$, 则有:

论断 1: $1/4<x_0\leqslant 1/2$ 且 $\mu(0)=1/2-x_0$.

$\mu(1/2-\mu(0))=\mu(\mu(0)\to 0)=\mu(0)\to\mu(0)=1$, 所以, $x_0\leqslant 1/2-\mu(0)$. 假设 $x_0<1/2-\mu(0)$, 则存在 x 使得 $x_0<x<1/2-\mu(0)$ 且 $\mu(x)=1$. 从而有 $\mu(0)<\neg x=1/2-x<x$, 所以,

$$\begin{aligned}1&=\mu(x)=\mu(x\vee\mu(0))\\&=\mu(\neg x\to\mu(0))\\&=\neg x\to\mu(0).\end{aligned}$$

这说明 $\neg x\leqslant\mu(0)$, 矛盾!于是证明 $x_0=1/2-\mu(0)$.

论断 2:

$$\mu(x)=\begin{cases}\mu(0), & x\leqslant 1/2-x_0\\ x, & 1/2-x_0<x<x_0\end{cases}, x\in[0,x_0).$$

当 $x\leqslant 1/2-x_0$ 时,由 μ 的保序性可知, $\mu(x)\leqslant\mu(1/2-x_0)=\mu(0)\leqslant\mu(x)$, 所以, $\mu(x)=\mu(0)$. 当 $x\geqslant 1/4$ 时,显然有 $\mu(x)=x$, 因为 $x_0=\min\{x\in[0,1]\mid\mu(x)=1\}$. 设 $1/2-x_0<x<1/4$, 则有:

$$1/4\geqslant\mu(x)=\mu(x_0\to x)=x_0\to\mu(x)=(1/2-x_0)\vee\mu(x).$$

从而有 $1/2-x_0\leqslant\mu(x)<x_0$. 若 $\mu(x)=1/2-x_0$, 则 $\mu(x)=\mu(\mu(x))=\mu(1/2-x_0)=\mu(\mu(0))=\mu(0)$. 于是 $\mu(1/2-x)=\mu(x\to 0)=\mu(x)\to\mu(0)=1$, 与 x_0 的定义矛盾.结合论断 1,我们证明了 $\mu(0)<\mu(x)<x_0$, 所以 $\mu(x)=x$.

综上,对于情形 2,我们证明了

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant x_0\\ x, & 1/2-x_0<x<x_0\\ 1/2-x_0, & x\leqslant 1/2-x_0\end{cases}, x\in[0,1].$$

令 $a=1/2-x_0$, 则 $a\in[0,1/4)$, 由式(4)可知 $\mu=\neg_a\neg_a$. □

由式(1)中的同构映射,不难将定理 2 中的结论推广到 NMG-链 $[0,1]_\alpha$ 中,其中, $\alpha\in(0,1)$.

推论 1. μ是 $[0,1]_\alpha$ 中的同态核当且仅当 $\mu=\neg_a\neg_a$, 其中, $a\in[0,\alpha/2)\cup\{1\}$.

下面研究一般 NMG-链中的同态核.

定理 3. 设 M 是 NMG-链,μ是 M 上的核算子,则 M 是μ-Glivenko 的当且仅当存在 $a\in M^-\cup\{1\}$ 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$.

证明: $(\Rightarrow)$

情形 1:若 $\mu(0)=1$, 则 $\mu=\neg_1\neg_1$.

事实上,由 $\mu(0)=1$ 和μ的保序性可知,对任一 $x\geqslant 0$ 有 $\mu(x)=1$, 从而有 $\mu=\neg_1\neg_1$.

情形 2:若 $\mu(0)<1$, 则 $\mu(0)\in M^-$ 且 $\mu=\neg_{\mu(0)}\neg_{\mu(0)}$.

假设 $\mu(0)<1$, 则 $\mu(\neg\mu(0))=\mu(\mu(0)\to 0)=\mu(0)\to\mu(0)=1$ 且 $\mu(0)=1\to\mu(0)=\mu(\neg\mu(0))\to\mu(0)=\neg\mu(0)\to\mu(0)$, 从而有 $\mu(0)<\neg\mu(0)$, 故 $\mu(0)\in M^-$.

接下来分 3 步完成对 $\mu=\neg_{\mu(0)}\neg_{\mu(0)}$ 的证明.

论断 1: $\neg\mu(0)=\min\{x\mid\mu(x)=1\}$.

注意, $\mu(\neg\mu(0))=1$. 对任一 $x\geqslant\neg\mu(0)$, 由μ的保序性可知 $\mu(x)=1$, 故 $x\in\{x\mid\mu(x)=1\}$. 反设存在 $y\in M$ 使得 $y<\neg\mu(0)$ 且 $\mu(y)=1$, 需考虑以下两种情况.

(i) 若 $y\in M^-$, 即 $y<\neg y$, 则 $\mu(0)=\mu(y)\to\mu(0)=y\to\mu(0)=\neg y\vee\mu(0)$, 从而有 $\neg y\leqslant\mu(0)<y$, 与假设矛盾.

(ii) 若 $y\geqslant\neg y$, 由假设 $y<\neg\mu(0)$ 及式(3), $\neg y>\mu(0)$, 故 $y\geqslant\neg y>\mu(0)$. 从而有

$$1=\mu(y)=\mu(y\vee\mu(0))=\mu(\neg y\to\mu(0))=\neg y\to\mu(\mu(0))=\neg y\to\mu(0).$$

故 $\neg y\leqslant\mu(0)$, 与假设矛盾.

由上面(i)和(ii)证得论断 1.

论断 2:对任意的 $x\in M$, 若 $\mu(0)<x<\neg\mu(0)$, 则 $\mu(x)=x$.

(i) 若 $x\geqslant\neg x$, 假设 $\neg x\leqslant x<\mu(x)$, 则 $x>\neg\mu(x)$, $\mu(x)\to x=\neg\mu(x)\vee x=x$, $\mu(x)=\mu(\mu(x)\to x)=1$ 即 $\mu(x)=1$. 而 $x<\neg\mu(0)$, 这与论断 1 矛盾.故假设不成立,从而,当 $x\geqslant\neg x$ 时, $\mu(x)=x$.

(ii) 若 $x\in M^-$, 则由式(3), $\neg x\in M^+$, 故 $\mu(\neg x)=\neg x$. 假设 $x<\mu(x)$, 则 $1=\mu(\mu(x)\to x)=\mu(\neg\mu(x)\vee x)$.

• 若 $\neg\mu(x)\geqslant x$, 则 $1=\mu(\neg\mu(x))=\mu(\mu(x)\to 0)=\mu(x)\to\mu(0)$, 故 $\mu(x)\leqslant\mu(0)$, 从而 $\mu(x)=\mu(0)$. 由此可得:

$$\neg x=\mu(\neg x)=\mu(x\to 0)=\mu(x)\to\mu(0)=1.$$

但由 $\mu(0)<x$ 可得 $\neg x\leqslant\neg\mu(0)$, 与论断 1 矛盾,故假设不成立.

• 若 $\neg\mu(x)<x$, 则 $\mu(x)=1$. 但 $x<\neg\mu(0)$, 这与论断 1 矛盾,故假设不成立.从而,对任一 $x\in M^-$, $\mu(x)=x$. 由上面(i)与(ii),论断 2 得证.

论断 3:对任一 $x\leqslant\mu(0)$, 有 $\mu(x)=\mu(0)$.

由μ的保序性和幂等性可知:

$$\mu(x)\leqslant\mu(\mu(0))=\mu(0)\leqslant\mu(x).$$

故 $\mu(x)=\mu(0)$.

综上,对于情形 2 我们证明了:

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant\neg\mu(0)\\ x, & \mu(0)<x<\neg\mu(0),x\in M.\\ \mu(0), & x\leqslant\mu(0)\end{cases}$$

令 $a=\mu(0)$, 则 $a\in M^-$ 且 $\mu=\neg_a\neg_a$.

($\Leftarrow$) 对任一 $x\in M$, 任一 $a\in M^-\cup\{1\}$, 易验证 $\neg_a\neg_a(\neg_a\neg_a x\to x)=1$. 故 M 是 a-Glivenko 的. □

为给出任一 NMG-代数中核算子μ成为同态核的充要条件,我们需要如下 3 个引理.

引理 1. 设 M 是 NMG-链 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的次直积,μ是 M 上的核算子.若 M 是μ-Glivenko 的, $x=(x_i)_{i\in I}\in M$, $y=(y_i)_{i\in I}\in M$, 则对任意的 $i\in I$, 当 $x_i=y_i$ 时,有 $(\mu(x))_i=(\mu(y))_i$.

证明:设 $x=(x_i)_{i\in I}, y=(y_i)_{i\in I}\in M$, 且存在 $i\in I$ 使得 $x_i=y_i$.因为μ为核算子,故有 $x\leqslant\mu(x)$, $y\leqslant\mu(y)$. 特别地, 有 $x_i\leqslant(\mu(x))_i$, $y_i\leqslant\mu((y))_i$. 假设 $(\mu(x))_i\neq(\mu(y))_i$, 不妨设 $(\mu(x))_i<(\mu(y))_i$. 由核算子的定义及命题 1(ii), $\mu(y)\to\mu(x)=y\to\mu(x)$, 进而 $(\mu(y))_i\to(\mu(x))_i=y_i\to(\mu(x))_i$. 因为 $(\mu(x))_i<(\mu(y))_i$,故必有 $y_i>(\mu(x))_i$. 从而有 $(\mu(y))_i\geqslant y_i>(\mu(x))_i\geqslant x_i$, 这与 $x_i=y_i$ 矛盾. □

引理 2. 设 M 是 NMG-链 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的次直积.

(i) 令μ是 M 上的核算子,对任意 $i\in I$, 定义映射 $\mu_i:M_i\to M_i$ 如下:

$$\mu_i(x_i)=(\mu(x))_i,\ x\in M \tag{5}$$

其中, $\pi_i(x)=x_i$, π_i 是从 $\prod_{i\in I}M_i$ 到 M_i 的第 i 个投射,则对任意 $i\in I$, μ_i 是 M_i 上的核算子;若 M 是μ-Glivenko 的,则

M_i 是 μ_i-Glivenko 的, $i\in I$.

(ii) 令 μ_i 分别是 NMG-链 M_i 上的核算子, $i\in I$, 定义 $\mu:M\to M$ 为

$$\mu(x)=(\mu_i(x_i))_{i\in I},x=(x_i)_{i\in I}\in M \tag{6}$$

则μ是 M 上的核算子.当 μ_i 都是同态核时($i\in I$),μ也是同态核.

证明:(i) 由引理 1, μ_i 是定义好的, $i\in I$. 首先设μ是 M 上的核算子, $x,y\in M$, $\pi_i(x)=x_i$, $\pi_i(y)=y_i$, $i\in I$, 则有

$$\begin{aligned}\mu_i(x_i)\to\mu_i(y_i)&=(\mu(x))_i\to(\mu(y))_i\\&=(\mu(x)\to\mu(y))_i\\&=(x\to\mu(y))_i\\&=x_i\to(\mu(y))_i\\&=x_i\to\mu_i(y_i).\end{aligned}$$

故由命题 2,对任意的 $i\in I$, μ_i 是 M_i 上的核算子.

当μ是同态核时,由定理 1(iii)可知μ保持蕴涵运算$\to$,所以, μ_i 也保持 M_i 中的蕴涵运算$\to_i$,因而是 M_i 中的同态核.

(ii) 点式验证即可. □

引理 3.

(i) 设 M 是 NMG-链, $x\in M$, 则有

$$x^2=x\otimes x=x \text{ 当且仅当 } x\in\{0\}\cup M^+.$$

(ii) 设 M 是 NMG-代数, $x=(x_i)_{i\in I}\in M$, 则有

$$x^2=x \text{ 当且仅当对任一 } i\in I,\ x_i^2=x_i.$$

证明:(i) 假设 $0<x\leqslant\neg x$, 则 $x^2\leqslant x\otimes\neg x=0$, 所以,当 $x^2=x$ 时必有 $x\in\{0\}\cup M^+$. 反过来,假设 $x^2\neq x$, 则由定义 1(ii)可知,必有 $x^2=0$, 从而 $x\leqslant\neg x$, 与题设矛盾.

(ii) 由次直积表示定理即得. □

定理 4. 设 M 是 NMG-代数,μ是 M 上的核算子,则 M 是μ-Glivenko 的当且仅当存在 $a\in M$ 满足 $(\neg a)^2=\neg a$, $\neg\neg a=a$ 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$.

证明:

($\Leftarrow$) 设 M 是 NMG-链 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的次直积.取 $a=(a_i)_{i\in I}\in M$ 且满足 $(\neg a)^2=\neg a$, $\neg\neg a=a$, 则对任一 $i\in I$, $(\neg a_i)^2=\neg a_i$, $\neg\neg a_i=a_i$, 从而由引理 3(i)可知, $a_i\in M_i^-\cup\{1_i\}$. 由定理 3 可知,对任一 $i\in I$, M_i 是 a_i-Glivenko 的.任取 $x=(x_i)_{i\in I},y=(y_i)_{i\in I}\in M$, 令 $\mu=\neg_a\neg_a$, 则有

$$\begin{aligned}\mu(x\to y)&=\neg_a\neg_a(x\to y)\\&=(\neg_{a_i}\neg_{a_i}(x_i\to y_i))_{i\in I}\\&=(x_i\to\neg_{a_i}\neg_{a_i}y_i)_{i\in I}\\&=(x_i)_{i\in I}\to(\neg_{a_i}\neg_{a_i}y_i)_{i\in I}\\&=x\to\neg_a\neg_a y\\&=x\to\mu(y).\end{aligned}$$

由定理 1(iii)可知, M 是μ-Glivenko 的.

($\Rightarrow$) 设μ是 NMG-代数上的核算子,且 M 是μ-Glivenko 的.由引理 2 可知,对任意 $i\in I$,M_i 是 μ_i-Glivenko 的,其中, μ_i 由(式(5))定义.由定理 3 可知,对任一 $i\in I$, 存在 $a_i\in M_i^-\cup\{1_i\}$, 使得 $\mu_i=\neg_{a_i}\neg_{a_i}$. 设 $a=(a_i)_{i\in I}$, 则由式(3)及引理 3(ii)可知, $\neg\neg a=a$, $(\neg a)^2=\neg a$. 任取 $x=(x_i)_{i\in I}\in M$, 由引理 2(ii)及式(6)可得,

$$\begin{aligned}\mu(x)&=((\mu(x))_i)_{i\in I}=(\mu_i(x_i))_{i\in I}\\&=(\neg_{a_i}\neg_{a_i}x_i)_{i\in I}\\&=\neg_a\neg_a x.\end{aligned}$$

所以 $\mu=\neg_a\neg_a$. □

推论 2[11]. 设 M 是 R_0-代数,μ是 M 上的核算子,则 M 是μ-Glivenko 的当且仅当存在 $a\in M$ 满足 $(\neg a)^2=\neg a$,使得 $\mu=\neg_a\neg_a$.

例 1:

(i) 设 $M=[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 是标准 NMG-代数,则由定理 2 可知,对任一 $a\in[0,1/4)\cup\{1\}$, $\mu=\neg_a\neg_a$ 是从 M 到 NMG-代数 $\mathrm{Reg}_\mu(M)=[a,1/2-a)\cup\{1\}$ 的满同态.

(ii) 设 $M_3=\{0,1/4,1\}$,则 M_3 按照 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 中的运算也构成 NMG-链.设

$$M=\{(0,0),(0,1/4),(1/4,0),(1/4,1/4),(1/4,1),(1,1/4),(1,1)\},$$

则 M 按照点式序也构成(对合)NMG-代数,其格结构如图 1 所示,且是 M_3 与 M_3 的次直积,则由定理 4 可知,映射 $\mu:M\to M$ 是同态核当且仅当存在 $a\in\{(0,0),(1,1)\}$ 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$.

(iii) 设 $M_5=\{0,1/8,3/8,1/4,1\}$,则 M_5 按照 $[0,1]_{\mathrm{NMG}}$ 中的运算也构成 NMG-链.设

$$M=\{(0,0),(0,1/8),(1/8,0),(1/8,1/8),(1/4,1/4),(3/8,3/8),(3/8,1),(1,3/8),(1,1)\},$$

则 M 按照点式序也构成 NMG-代数,其格结构如图 2 所示,且是 M_5 与 M_5 的次直积,则由定理 4 可知,映射 $\mu:M\to M$ 是同态核当且仅当存在 $a\in\{(0,0),(0,1/8),(1/8,0),(1/8,1/8),(1,1)\}$ 使得 $\mu=\neg_a\neg_a$.

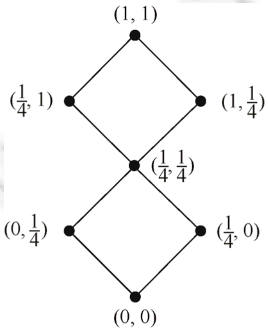


Fig.1
图 1

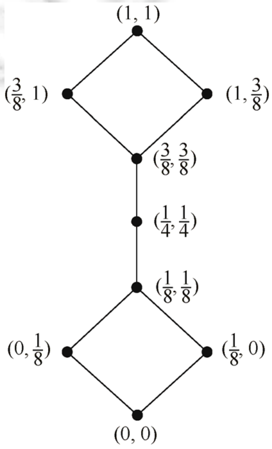


Fig.2
图 2

3 结束语

核算子首先由 Rosenthal 在 Quantale 中提出[15],之后由 Galatos 等人推广到剩余格中[9].另一方面,涉及形式演算和双重否定的 Glivenko 定理是直觉命题逻辑中的一个重要定理,在研究逻辑代数上的态理论时也发挥着重要作用.目前,在带有核算子的逻辑代数中得到了 Glivenko 定理的最广泛的代数形式.本文进一步研究了 NMG-代数的核基 Glivenko 性质,给出了同态核的结构刻画.

其他逻辑代数,如 MTL-代数、BL-代数、MV-代数以及 Heyting 代数中同态核的结构还不够清楚,将是今后有待研究的课题.

另外,目前对核算子的研究都是在逻辑代数中展开的,如何利用模态化方法从逻辑角度研究核算子也是有待研究的课题,具体为,如何在某给定的命题逻辑系统中通过形式化地添加一个模态词,用以表示相应语义代数中的核算子,并证明其完备性,将是一个富有挑战性的课题.

References:

[1] Adam EW. A Primer of Probability Logic. Stanford: CSLI Publications, 1998. 1–180.

[2] Mundici D. Advanced Łukasiewicz Calculus and MV-Algebras. New York: Springer-Verlag, 2011. 119–130. [doi: 10.1007/978-94-007-0840-2_10]

[3] Ciungu LC. Non-Commutative Multiple-Valued Logic Algebras. New York: Springer-Verlag, 2014. 155–190. [doi: 10.1007/978-3-319-01589-7_6]

[4] Zhou HJ. Probabilistically Quantitative Logic. Beijing: Science Press, 2015. 1–107, 230–349 (in Chinese).

[5] Zhou HJ, Zhao B. Generalized Bosbach and Riečan states based on relative negations in residuated lattices. Fuzzy Sets and Systems, 2012,187:33–57. [doi: 10.1016/j.fss.2011.09.002]

[6] Ciungu LC, Georgescu G, Muresan C. Generalized Bosbach states: Part I, II. Archive for Mathematical Logic, 2013,52(3/4): 335–376; 52(7/8):707–732.

[7] Cignoli R, Torrens A. Free algebras in varieties of Glivenko MTI-algebras satisfying the equation $2(x^2)=(2x)^2$. Studia Logica, 2006,83:157–181. [doi: 10.1007/s11225-006-8302-8]

[8] Rump W. A general Glivenko theorem. Algebra Universalis, 2009,61:455–473. [doi: 10.1007/s00012-009-0018-y]

[9] Galatos N, Jipsen P, Kowalski T, Ono H. Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics. Tokyo: Elsevier, 2007. 173–183, 345–375.

[10] Zhao B, Zhou HJ. Generalized Bosbach and Riečan states on nucleus-based Glivenko residuated lattices. Archive for Mathematical Logic, 2013,52(7/8):689–706. [doi: 10.1007/s00153-013-0338-7]

[11] Zhou HJ, Zhao B. Characterizations of endomorphic nuclei on R_0-algebras (nilpotent minimum algebras). Journal of Mnltiple-Valued Logic and Soft Computing, 2014,22(1/2):123–132.

[12] Pei DW. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL. Fuzzy Sets and Systems, 2003,138:187–195. [doi: 10.1016/S0165-0114(02)00382-2]

[13] Wang SM, Wang B S, Pei DW. A fuzzy logic for an ordinal sum *t*-norm. Fuzzy Sets and Systems, 2005,149(2):297–307. [doi: 10.1016/j.fss.2004.01.005]

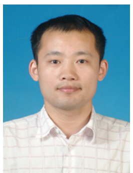
[14] Zhou HJ, Wang GJ. Satisfiability and compactness of NMG-logic system. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2009,20(3): 515–523 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3381.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03381]

[15] Rosenthal K. Quantales and Their Applications. New York: Longman Scientific & Technical, 1990. 29–34.

附中文参考文献:

[4] 周红军.概率计量逻辑及其应用.北京:科学出版社,2015.1–107,230–349.

[14] 周红军,王国俊.逻辑系统 NMG 的满足性和紧致性.软件学报,2009,20(3):515–523. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3381.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03381]



周红军(1980－),男,山东莘县人,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为非经典数理逻辑,不确定性推理.

兰淑敏(1991－),女,硕士,主要研究领域为不确定性推理.

马琴(1991－),女,硕士,主要研究领域为不确定性推理.