软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2017,28(7):1629−1639 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005110]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

Goguen 命题逻辑系统公理化扩张的Γ−*k* 真度理论及性质*

高晓莉, 惠小静, 朱乃调

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)
通讯作者: 高晓莉, E-mail: 951402445@qq.com

摘 要: 首先对 n 值 Goguen 命题逻辑进行公理化扩张 $\text{Goguen}_{\sim,\Delta}$, 记为 $\Pi_{\sim,\Delta}$. 利用公式的诱导函数给出公式在 k(k 任取~或 Δ)连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ−k 真度的定义;讨论了 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中Γ−k 真度的 MP 规则、HS 规则等相关性质;最后,在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中定义了两公式间的Γ−k 相似度与Γ−k 伪距离,得到了公式在 k 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ−k 相似度与 Γ − k 伪距离所具有的一些良好性质.
关键词: Goguen 命题逻辑系统;Γ−k 真度;Γ−k 相似度;Γ−k 伪距离
中图法分类号: TP301

中文引用格式: 高晓莉,惠小静,朱乃调.Goguen 命题逻辑系统公理化扩张的Γ−k 真度理论及性质.软件学报,2017,28(7): 1629−1639. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5110.htm
英文引用格式: Gao XL, Hui XJ, Zhu ND. Theory and property of Γ−k truth degree on axiomatic extension of Goguen propositional logic system. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2017,28(7):1629−1639 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/5110.htm

Theory and Property of Γ−*k* Truth Degree on Axiomatic Extension of Goguen Propositional Logic System

GAO Xiao-Li, HUI Xiao-Jing, ZHU Nai-Diao

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: Axiomatic extensions of n-valued Goguen propositional logic system denoted as $\Pi_{\sim,\Delta}$, is first studied in this paper. Using induced function, the definition of Γ−k truth degree of formula relative to local finite theory Γ under the k conjunction is given. The MP rule, HS rule, and some correlation properties are also discussed. Finally, the definition of Γ−k similarity degree and Γ−k pseudo-metric in $\Pi_{\sim,\Delta}$ between two formulas is presented, and some good properties about Γ−k similarity degree and Γ−k pseudo-metric relative to local finite theory Γ under the k conjunction are simultaneously obtained.
Key words: Goguen propositional logic system; Γ−k truth degree; Γ−k similarity degree; Γ−k pseudo-metric

关于命题逻辑结论程度化的思想被 Pavelka 在 20 世纪 70 年代提出以来[1],大量学者投入到了这一研究领域,并取得了丰富的成果[2−18].其中,文献[2−6]从逻辑概念程度化入手,给出了命题逻辑系统中公式的真度理论.文献[7−10]利用赋值集的随机化方法,在命题逻辑系统中给出了公式的随机真度概念,实现了计量逻辑学与概率逻辑学的融合.文献[11,12]对 Łukasiewic 命题逻辑系统和 $R_0Ł_{3n+1}$ 命题逻辑系统中公式相对于局部有限理论Γ的真度进行了研究,提出了公式的相对Γ-真度,把一般真度作为相对真度的特例,拓展了真度理论的应用范围.文献[13,14]通过视赋值集为通常乘积拓扑空间,利用其上的 Borel 概率测度在命题逻辑系统中引入了

* 基金项目: 国家自然科学基金(11471007); 陕西省自然科学基金(2014JM1020); 延安大学研究生创新基金资助项目(YCX201612)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (11471007); Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China (2014JM1020); Graduate Innovation Fund of Yan'an University (YCX201612)

收稿时间: 2016-01-27; 修改时间: 2016-04-27; 采用时间: 2016-05-13; jos 在线出版时间: 2016-10-11

CNKI 网络优先出版: 2016-10-12 16:26:59, http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20161012.1626.025.html

Borel 概率真度的概念,从而使计量逻辑学中命题的真度概念成为所研究工作的一个特例.

然而,在目前广泛受到大家关注的命题逻辑系统中,Gödel 命题逻辑系统和 Goguen 命题逻辑系统中的否定过强而使相关研究受到了阻碍.文献[15,16]引入了基本连接词对合否定～.文献[17]引入连接词Δ,并提出了基本逻辑系统 BL 的公理化扩张 BL_Δ 系统,同时与对合否定相结合建立了 $SBL_\sim$ 系统,在该系统中,Δ演绎定理和强完备性定理都成立,从而使得在 Gödel 命题逻辑系统和 Goguen 命题逻辑系统中的研究得以顺利展开.文献[18]便是在 $SBL_\sim$ 系统中以推理中命题的真值为基础,运用Δ转换词建立了推理中前提与结论的真值关系定理,实现了Δ模糊逻辑系统的计量化.

本文以 Goguen 命题逻辑系统为例,拟在 SBL 公理化扩张中展开计量化研究.首先在 n 值 Goguen 命题逻辑系统中添加了两类算子,即对合否定和连接词Δ,将其作为 $SBL_\sim$ 系统的公理化扩张,记为 $Goguen_{\sim,\Delta}$ 或 $\Pi_{\sim,\Delta}$.然后利用公式的诱导函数给出公式在 k(k 任取~或Δ)连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ–k 真度的定义;讨论了 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中Γ–k 真度的 MP 规则、HS 规则等相关性质;最后,在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中定义了两公式间的Γ–k 相似度与Γ–k 伪距离,得到了公式在 k 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ–k 相似度与Γ–k 伪距离所具有的一些良好性质.

1 预备知识

定义 1.1[18]. BL_Δ 的公理系统如下.

(BL)BL 的公理系统;

(A Δ1) $\Delta A\vee\neg\Delta A$;

(A Δ2) $\Delta(A\vee B)\to(\Delta A\vee\Delta B)$;

(A Δ3) $\Delta A\to A$;

(A Δ4) $\Delta A\to\Delta\Delta A$;

(A Δ5) $\Delta(A\to B)\to(\Delta A\to\Delta B)$.

BL_Δ 中的推理规则为 MP 规则和Δ规则,MP 规则为从 $A, A\to B$ 推得 B.Δ规则为 $A\to\Delta A$.

如果£是 BL 的公理化扩张,那么把$£_\Delta$记为£的扩张,其方式正如 BL 扩张为 BL_Δ 一样, BL_Δ 系统中下面的Δ演绎定理成立.

定理 1.1(**Δ演绎定理**)[18]. 令£是 BL_Δ 的公理化扩张,那么对任意理论Γ,公式 A 和 B,有 $\Gamma, A\vdash B$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\Delta A\to B$.

SBL 是 BL 在增加了公理 $\neg\neg A\vee\neg A$ 之后的公理化扩张. SBL_Δ 也为 SBL 的公理化扩张. $SBL_\sim$ 系统是在 SBL 系统中增加了对合否定连接词~后形成的逻辑系统.

定义 1.2[17]. 作为 SBL 的公理化扩张, $SBL_\sim$ 的公理系统如下.

(SBL)SBL 的公理系统;

(~1) $\sim\sim A\to A$;

(~2) $\neg A\to\sim A$;

(~3) $\Delta(A\to B)\to\Delta(\sim B\to\sim B)$.

在 $SBL_\sim$ 系统中,令 $\Delta A=\neg\sim A$,便可以建立 SBL_Δ 系统与 $SBL_\sim$ 系统之间的关系.即 $SBL_\sim$ 有如下的等价公理系统.

(SBL_Δ) SBL_Δ 的公理系统;

(~1) $\sim\sim A\to A$;

(~3) $\Delta(A\to B)\to\Delta(\sim B\to\sim B)$.

$SBL_\sim$ 中的推理规则也为 MP 规则和Δ规则.如果£是 SBL 的公理化扩张,那么把$£_\sim$记为£的扩张,其方式正如 SBL 扩张为 $SBL_\sim$ 一样,而且 $Gödel_\sim$和 $\Pi_\sim$ 是 $SBL_\sim$ 公理化扩张的两个基本类型.由于 $SBL_\sim$ 也是 BL_Δ 的公理化扩张,因此 $SBL_\sim$ 中的Δ演绎定理也成立.

定理 1.2(**强完备性定理**)[17]. 令£是 $SBL_\sim$ 的公理化扩张,那么对理论Γ和公式 A,下面条件等价.

(i) $\Gamma\vdash A$;

(ii) 对每个£代数和理论Γ的每个模型 e,均有 $e(A)=1$.

2 Γ−*k* 真度的定义及性质

定义 2.1. 设 $S=\{p_1,p_2,...\}$ 是可数集,~,Δ是 S 上的一元运算,∨,∧,→ 是 S 上的二元运算,$F(S)$ 是由 S 生成的 (~,Δ,∨,∧,→) 型自由代数,称 $F(S)$ 中的元为命题或合式公式,称 S 中的元为原子公式.

定义 2.2. Goguen 命题逻辑系统也称为乘积系统,记Π.设 $\Pi_{\sim,\Delta}=\left\{0,\frac{1}{n-1},...,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$, 在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中规定

$$\forall x,y\in\Pi_{\sim,\Delta}, \sim x=1-x,\ \Delta x=\begin{cases}1, x=1\\0, x<1\end{cases},\ x\vee y=\max\{x,y\},\ x\wedge y=\min\{x,y\},$$

$$x\to y=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{y}{x}\wedge 1, & x>0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\le y\\ \frac{y}{x}, & x>y\end{cases},$$

称 Goguen$_{\sim,\Delta}$ 是 n 值乘积命题逻辑系统的扩张,简记为 $\Pi_{\sim,\Delta}$.

注: $\Pi_{\sim,\Delta}$ 作为 n 值乘积系统的公理化扩张,是在 n 值乘积系统的基础上增加了对合否定和连接词Δ两类算子,由于乘积系统是 SBL 系统,因此 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 是 SBL$_\sim$ 的公理化扩张,满足 SBL$_\sim$ 的公理系统及定理 1.1 和定理 1.2.

定义 2.3. 设 $A=A(p_1,p_2,...,p_m)\in F(S)$,则 A 对应一个 n 值 m 元函数 $\overline{A}$.在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$ 中, $\overline{A}:\Pi_{\sim,\Delta}\to[0,1]$, 这里 $\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$ 是由运算符号 ~,Δ,∨,∧,→ 把 $x_1,x_2,...,x_m$ 连接而成,其方式恰如 $A=A(p_1,p_2,...,p_m)\in F(S)$ 由连接词 ~,Δ,∨,∧,→ 将原子公式 $p_1,p_2,...,p_m$ 连接而成那样,称 $\overline{A}$ 是公式 A 所诱导的函数.

定义 2.4. 在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$ 中,设 $\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$ 是 $F(S)$ 中命题公式 $A(p_1,p_2,...,p_m)$ 所诱导的函数.定义: $l\ge 0$, $\forall(x_1,...,x_m,...,x_{m+l})\in\Pi^{m+l}_{\sim,\Delta}$, $\overline{A}^l:\Pi^{m+l}_{\sim,\Delta}\to[0,1]$, $\overline{A}^l(x_1,...,x_m,...,x_{m+l})=\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$, 称 $\overline{A}^l$ 为函数 $\overline{A}$ 的直到第 l 元的扩张.

接下来我们在 Goguen$_{\sim,\Delta}$ 命题逻辑系统中,利用诱导函数给出公式在 k 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ−k 真度的定义,并讨论Γ−k 真度的相关性质.

设 $\Gamma\subseteq F(S), A\in F(S)$, 本文规定 $S_\Gamma=\{p\in S\mid\exists B\in\Gamma, p$ 是构成 B 的原子命题$\}$, $S_A=\{p\in S\mid p$ 在 A 中出现$\}$, 当 S_Γ 有限时,称Γ为 Goguen$_{\sim,\Delta}$ 命题逻辑系统的局部有限理论.

以下几点若在文中无特别说明,则均不发生变化.

(1) 在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$ 中讨论.

(2) k,λ,μ,η 任取Δ,~.

(3) 真值函数的上划线不包括 kA 前的 k.

(4) 基本语法、语义概念如定理、逻辑等价、重言式、矛盾式等均与经典命题逻辑一样.

定义 2.5. 在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$ 中,设 $\Gamma\subseteq F(S), S_\Gamma$ 有限, $A\in F(S), S=S_\Gamma\cup S_A=\{p_1,p_2,...,p_m\}$, 则

$$\tau_{n,\Gamma}(kA)=\begin{cases}1, & N(\Gamma)=\varnothing\\ \frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum\limits_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m), & N(\Gamma)\ne\varnothing\end{cases},$$

其中, $N(\Gamma)=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in\Pi^m_{\sim,\Delta}\mid\forall B\in\Gamma,\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)=1\}$, 称 $\tau_{n,\Gamma}(kA)$ 为公式 A 在 k 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ−k 真度,简称Γ−k 真度.

定理 2.1. 设 $\Gamma\subseteq F(S), A\in F(S), S_\Gamma$ 有限, $S=S_\Gamma\cup S_A=\{p_1,p_2,...,p_m\}, S^*=\{p_1,p_2,...,p_m,p_{m+1},...,p_{m+l}\}\subseteq S$, 则

$$\tau_{n,\Gamma}(kA)=\begin{cases}1, & N^*(\Gamma)=\varnothing\\ \frac{1}{|N^*(\Gamma)|}\sum\limits_{(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in N^*(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l}), & N^*(\Gamma)\ne\varnothing\end{cases},$$

其中, $N^*(\Gamma)=\{(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m+l}\mid\forall B\in\Gamma,\overline{B}^l(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})=1\}$.

证明: 因为 $N(\Gamma)=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m}\mid\forall B\in\Gamma,\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)=1\}$,

$N^*(\Gamma)=\{(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m+l}\mid\forall B\in\Gamma,\overline{B}^l(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})=1\}$,

由定义 2.4 可知, $\forall(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m+l},\overline{B}^l(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})=\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)$,

有 $|N^*(\Gamma)|=|N(\Gamma)|\times n^l$,

所以,当 $N^*(\Gamma)=\varnothing$ 时, $N(\Gamma)=\varnothing$, 则 $\tau_{n,\Gamma}(kA)=1$.

当 $N^*(\Gamma)\neq\varnothing$ 时, $N(\Gamma)\neq\varnothing$, 由于 $\overline{A}^l(x_1,...,x_m,...,x_{m+l})=\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$, 得到

$$\sum_{(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m+l}}k\overline{A}(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})=\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m}\times n^l}k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in\Pi_{\sim,\Delta}^{m}}k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\times n^l.$$

同时,

$$\frac{1}{|N^*(\Gamma)|}\sum_{(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in N^*(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_{m+l})=\frac{1}{|N(\Gamma)|\times n^l}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\times n^l$$
$$=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m).$$

从而有 $\tau_{n,\Gamma}(kA)=\dfrac{1}{|N^*(\Gamma)|}\sum_{(x_1,...,x_{m+1},...,x_{m+l})\in N^*(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,...,x_{m+1},...,x_{m+l})$.

为方便表述,将 $N^*(\Gamma)$, $\sum_{(x_1,...,x_m,x_{m+1}...,x_{m+l})\in N^*(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_{m+l})$ 仍记作 $N(\Gamma)$, $\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$. □

定理 2.2. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A\in F(S),S_\Gamma$ 有限,

(i) 若$\Gamma\vDash A$,则 $\tau_{n,\Gamma}(\Delta A)=1,\tau_{n,\Gamma}(\sim A)=0$;

(ii) 若$\Gamma\vDash\sim A$,则 $\tau_{n,\Gamma}(\Delta A)=0,\tau_{n,\Gamma}(\sim A)=1$.

证明: (i) 若$\Gamma\vDash A$,则 $\forall(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)$, 有 $\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=1$,

结合Δ连接词的运算性质可得, $\Delta\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=1,|N(\Gamma)|=\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\Delta\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$;

结合~连接词的运算性质可得, $\sim\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=0,\ \sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\sim\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=0$.

由定义 2.5 可得, $\tau_{n,\Gamma}(\Delta A)=1,\tau_{n,\Gamma}(\sim A)=0$.

(ii) 若$\Gamma\vDash\sim A$, $\forall(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma),\sim\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=1$,

结合~连接词的运算性质可得, $\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=0,|N(\Gamma)|=\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\sim\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$,

结合Δ连接词的运算性质可得, $\Delta\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=0,\ \sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\Delta\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)=0$,

由定义 2.5 可得, $\tau_{n,\Gamma}(\Delta A)=0,\tau_{n,\Gamma}(\sim A)=1$. □

定理 2.3. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A\in F(S),S_\Gamma$ 有限,若 $N(\Gamma)\neq\varnothing$, 则 $\tau_{n,\Gamma}(\sim kA)=1-\tau_{n,\Gamma}(kA)$.

证明: 因为 $N(\Gamma)=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in\Pi_{\sim,\Delta}\mid\forall B\in\Gamma,\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)=1\}$, 且 $N(\Gamma)\neq\varnothing$,

所以,

$$\tau_{n,\Gamma}(\sim kA)=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\sim k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)$$
$$=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}(1-k\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m))$$

$$=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}1-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)$$
$$=1-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)$$
$$=1-\tau_{n,\Gamma}(kA).$$ □

定理 2.4. 设 $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2\subseteq F(S),A\in F(S),S_{\Gamma_2}$ 有限,若 $\tau_{n,\Gamma_1}(kA)=1$, 则 $\tau_{n,\Gamma_2}(kA)=1$.

证明: 由于 $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$,则 $N(\Gamma_2)\subseteq N(\Gamma_1)$, 当 $N(\Gamma_2)=\varnothing$ 时, $\tau_{n,\Gamma_2}(kA)=1$,

当 $N(\Gamma_2)\neq\varnothing$ 时,可知 $N(\Gamma_1)\neq\varnothing$, 因为 $\tau_{n,\Gamma_1}(kA)=1$, 所以 $\frac{1}{|N(\Gamma_1)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma_1)}k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1$,

从而有 $|N(\Gamma_1)|=\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma_1)}k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)$.

即 $\forall(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma_1)$, 有 $k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1$; $\forall(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma_2)$, 有 $k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1$.

因此, $|N(\Gamma_2)|=\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma_2)}k\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)$, 即 $\tau_{n,\Gamma_2}(kA)=1$. □

引理 2.1. 设 $\forall a,b\in\Pi^m_{\sim,\Delta}$, 则(1) $1\to\mu b=\mu b$; (2) $\lambda a\to\mu b\geq\mu b$.

证明:

(1) 当 $\mu b=1$ 时, $1\to\mu b=1\to1=1=\mu b$;

当 $\mu b<1$ 时, $1\to\mu b=\frac{\mu b}{1}=\mu b$.

(2) 当 $\lambda a\geq\mu b$ 时, $\lambda a\to\mu b=\frac{\mu b}{\lambda a}\geq\mu b$;

当 $\lambda a<\mu b$ 时, $\lambda a\to\mu b=1\geq\mu b$. □

定理 2.5. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B\in F(S),S_\Gamma$ 有限,若 $\Gamma\vdash\lambda A$,则

(i) $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\mu B)$;

(ii) $\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)=1$.

证明: 设 A,B 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\dots,p_m$, 若 $\Gamma\vdash\lambda A$, $\forall(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)$, 有 $\lambda\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1$.

(i) 由引理 2.1(1)可知,

$$(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)=\lambda\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)\to\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1\to\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m)=\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m),$$
$$(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)=\lambda\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)\wedge\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1\wedge\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m)=\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m),$$

所以,

$$\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)$$
$$=\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m),$$

则有

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)$$
$$=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m).$$

由定义 2.5 可得, $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\mu B)$.

(ii) 由引理 2.1(2)可知,

$$(\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A})(x_1,x_2,\dots,x_m)=\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m)\to\lambda\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)\geq\lambda\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1.$$

类似于定理 2.5(i),得到 $\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A})(x_1,x_2,\dots,x_m)=1$.

再由定义 2.5 可知, $\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)=1$. □

引理 2.2. 设 $\forall a,b\in\Pi^{m}_{\sim,\Delta}$, 则 $\lambda a\vee\mu b=\lambda a+\mu b-(\lambda a\wedge\mu b)$.

证明: 首先令 $*_1=(\lambda a\vee\mu b)-\lambda a-\mu b+(\lambda a\wedge\mu b)$, 再分两种情况进行讨论.

1) 当 $\lambda a\geq\mu b$ 时, $*_1=\lambda a-\lambda a-\mu b+\mu b=0$;

2) 当 $\lambda a<\mu b$ 时, $*_1=\mu b-\lambda a-\mu b+\lambda a=0$. □

定理 2.6. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B\in F(S),S_\Gamma$ 有限,则 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\vee\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B)-\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B)$.

证明: 设 A,B 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,...,p_m,\forall(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)$, 由引理 2.2 可知,

$$\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\vee\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)=\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)+\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)-(\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\wedge\mu\overline{B}(x_1,x_2,..,x_m)),$$

其中,

$$\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\vee\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)=(\lambda\overline{A}\vee\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m),$$
$$\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\wedge\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)=(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m),$$

那么,

$$(\lambda\overline{A}\vee\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m)=\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)+\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)-(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m),$$

因此,

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\vee\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)+\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)-\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m).$$

同时,

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\vee\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m)=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)+\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\wedge\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m).$$

由定义 2.5 可得, $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\vee\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B)-\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B)$. □

引理 2.3. 设 $\forall a,b\in\Pi^{m}_{\sim,\Delta}$, 则 $\mu b\geq\lambda a+(\lambda a\to\mu b)-1$.

证明: 首先令 $*_2=\mu b-\lambda a-(\lambda a\to\mu b)+1$, 再分两种情况进行讨论.

1) 当 $\lambda a\leq\mu b$ 时, $*_2=\mu b-\lambda a\geq 0$;

2) 当 $\lambda a>\mu b$ 时, $*_2=\mu b-\lambda a-\dfrac{\mu b}{\lambda a}+1=\dfrac{\mu b(\lambda a-1)}{\lambda a}-\dfrac{\lambda a(\lambda a-1)}{\lambda a}=\dfrac{(\mu b-\lambda a)(\lambda a-1)}{\lambda a}\geq 0$.

综上,可得 $\mu b\geq\lambda a+(\lambda a\to\mu b)-1$. □

定理 2.7(Γ-*k* 真度的 MP 规则). 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B\in F(S),S_\Gamma$ 有限,若 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A)\geq\alpha,\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)\geq\beta$, 则 $\tau_{n,\Gamma}(\mu B)\geq\alpha+\beta-1$.

证明: 设 A,B 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,...,p_m,\forall(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)$, 由引理 2.3 可知,

$$\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)\geq\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)+(\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)\to\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m))-1,$$

因此,

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\mu\overline{B}(x_1,x_2,...,x_m)\geq\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}\lambda\overline{A}(x_1,x_2,...,x_m)+\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,...,x_m)-\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}1,$$

所以,

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}\mu\overline{B}(x_1,x_2,\dots,x_m)\geq\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}\lambda\overline{A}(x_1,x_2,\dots,x_m)+\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}1.$$

结合定义 2.5 可得, $\tau_{n,\Gamma}(\mu B)\geq\alpha+\beta-1$. □

推论 2.1. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B\in F(S),S_\Gamma$ 有限,若 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A)=1,\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)=1$, 则 $\tau_{n,\Gamma}(\mu B)=1$.

引理 2.4. 设 $\forall a,b,c\in\Pi^m_{\sim,\Delta}$, 则 $(\lambda a\to\eta c)\geq(\lambda a\to\mu b)+(\mu b\to\eta c)-1$.

证明: 首先令 $*_3=(\lambda a\to\eta c)-(\lambda a\to\mu b)-(\mu b\to\eta c)+1$, 再分以下几种情况进行讨论.

1) 当 $\lambda a\leq\eta c$ 时

1.1) 当 $\mu b\geq\eta c$ 时, $*_3=1-(\lambda a\to\mu b)-(\mu b\to\eta c)+1=1-(\lambda a\to\mu b)+1-\dfrac{\eta c}{\mu b}\geq 0$.

1.2) 当 $\mu b<\eta c$ 时

1.2.1) 当 $\lambda a\geq\mu b$ 时, $*_3=1-\dfrac{\mu b}{\lambda a}\geq 0$;

1.2.2) 当 $\lambda a<\mu b$ 时, $*_3=0$.

2) 当 $\lambda a>\eta c$ 时

2.1) 当 $\mu b<\eta c$ 时, $*_3=\dfrac{\eta c}{\lambda a}-\dfrac{\mu b}{\lambda a}-1+1=\dfrac{\eta c-\mu b}{\lambda a}\geq 0$.

2.2) 当 $\mu b\geq\eta c$ 时

2.2.1) 当 $\lambda a>\mu b$ 时, $*_3=\dfrac{\eta c}{\lambda a}-\dfrac{\mu b}{\lambda a}-\dfrac{\eta c}{\mu b}+1=\dfrac{\eta c-\mu b}{\lambda a}-\dfrac{\eta c-\mu b}{\mu b}=(\eta c-\mu b)\left(\dfrac{1}{\lambda a}-\dfrac{1}{\mu b}\right)\geq 0$;

2.2.2) 当 $\lambda a\leq\mu b$ 时, $*_3=\dfrac{\eta c}{\lambda a}-1-\dfrac{\eta c}{\mu b}+1=\dfrac{\eta c}{\lambda a}-\dfrac{\eta c}{\mu b}\geq 0$.

综上可得 $(\lambda a\to\eta c)\geq(\lambda a\to\mu b)+(\mu b\to\eta c)-1$. □

定理 2.8(**Γ–*k* 真度的 HS 规则**). 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B,C\in F(S),S_\Gamma$ 有限,若 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)\geq\alpha,\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\eta C)\geq\beta$, 则 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\eta C)\geq\alpha+\beta-1$.

证明: 设 A,B,C 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\dots,p_m,\forall(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)$, 由引理 2.4 可知,

$$(\lambda\overline{A}\to\eta\overline{C})(x_1,x_2,\dots,x_m)\geq(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)+(\mu\overline{B}\to\eta\overline{C})(x_1,x_2,\dots,x_m)-1,$$

因此,

$$\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\eta\overline{C})(x_1,x_2,\dots,x_m)\geq\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)+\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\mu\overline{B}\to\eta\overline{C})(x_1,x_2,\dots,x_m)-\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}1.$$

所以,

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\eta\overline{C})(x_1,x_2,\dots,x_m)\geq\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})(x_1,x_2,\dots,x_m)+\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}(\mu\overline{B}\to\eta\overline{C})(x_1,x_2,\dots,x_m)-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in N(\Gamma)}1.$$

结合定义 2.5 可得, $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\eta C)\geq\alpha+\beta-1$. □

推论 2.2. 设 $\Gamma\subseteq F(S), A,B,C\in F(S), S_\Gamma$ 有限,若 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)=1, \tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\eta C)=1$, 则 $\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\eta C)=1$.

下面将随机举出其中一个定理的例子来加以计算.

例 2.1:在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 二元四值中,设 $\Gamma=(\sim p_1\to\Delta p_2)\to p_2, A=(\sim p_1\vee\Delta p_2)\to p_2, B=(\sim p_1\to\sim p_2)\to p_1$, $C=(\Delta p_1\to\sim p_2)\to\sim p_1$, 试计算 $\tau_{4,\Gamma}((\Delta A\wedge\sim B)\to\sim C)=\tau_{4,\Gamma}((\Delta A\to\sim C)\vee(\sim B\to\sim C))$.

解:根据定义 2.5 来计算 $S_\Gamma=\{p_1,p_2\}, S_A=\{p_1,p_2\}, S_\Gamma\cup S_A=\{p_1,p_2\}$, 公式 A,B,C 所诱导的函数分别为

$$\overline{A}(x,y):\Pi^2_{\sim,\Delta}\to[0,1],\ \overline{A}(x,y)=(\sim x\vee\Delta y)\to y,$$

$$\overline{B}(x,y):\Pi^2_{\sim,\Delta}\to[0,1],\ \overline{B}(x,y)=(\sim x\to\sim y)\to x,$$

$$\overline{C}(x,y):\Pi^2_{\sim,\Delta}\to[0,1],\ \overline{C}(x,y)=(\Delta x\to\sim y)\to\sim x.$$

$\Gamma=(\sim p_1\to\Delta p_2)\to p_2$ 可以写成诱导函数的形式为 $\Gamma=(\sim x\to\Delta y)\to y$.

为了方便理解,特做出如下图表.

x	y	$\Gamma=(\sim x\to\Delta y)\to y$	$\overline{A}(x,y)=(\sim x\vee\Delta y)\to y$	$\overline{B}(x,y)=(\sim x\to\sim y)\to x$	$\overline{C}(x,y)=(\Delta x\to\sim y)\to\sim x$	$(\Delta A\wedge\sim B)\to\sim C$	$(\Delta A\to\sim C)\vee(\sim B\to\sim C)$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1	1	1
0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1
$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1
$\frac{2}{3}$	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0	1	1
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

从表中可以看出, $|N(\Gamma)|$ 为所有使 $\Gamma=(\sim x\to\Delta y)\to y$ 的值为 1 元素的个数,即 $|N(\Gamma)|=13$.

$$\tau_{4,\Gamma}((\Delta A\wedge\sim B)\to\sim C)=\frac{1}{13}\sum_{(x,y)\in N(\Gamma)}13\times 1,$$

$$\tau_{4,\Gamma}((\Delta A\to\sim C)\vee(\sim B\to\sim C))=\frac{1}{13}\sum_{(x,y)\in N(\Gamma)}13\times 1,$$

因此, $\tau_{4,\Gamma}((\Delta A\wedge\sim B)\to\sim C)=\tau_{4,\Gamma}((\Delta A\to\sim C)\vee(\sim B\to\sim C))$.

3 Γ–k 相似度、Γ–k 伪距离的定义及性质

定义 3.1. 设 $\Gamma\subseteq F(S), A\in F(S), S_\Gamma$ 有限,则有

$$\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\tau_{n,\Gamma}((\lambda A\to\mu B)\wedge(\mu B\to\lambda A)),$$

称 $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)$ 为公式 A,B 在 λ,μ 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ–k 相似度,简称Γ–k 相似度.

定理 3.1. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A\in F(S),S_\Gamma$ 有限,则 $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)-1$.

证明: 设 A,B 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,...,p_m$, 由定理 2.6 和定义 3.1 可知,

$$\begin{aligned}\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)&=\tau_{n,\Gamma}((\lambda A\to\mu B)\wedge(\mu B\to\lambda A))\\&=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)-\tau_{n,\Gamma}((\lambda A\to\mu B)\vee(\mu B\to\lambda A))\\&=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)-1.\end{aligned}$$

□

定理 3.2. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A\in F(S),S_\Gamma$ 有限,则

(i) $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\xi_{n,\Gamma}(\mu B,\lambda A)$;

(ii) $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A\vee\mu B,\lambda A)=\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)$;

(iii) $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B,\lambda A)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)$.

证明: 设 A,B 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,...,p_m,\forall(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)$,

(i) $\forall a,b\in\Pi^m_{\sim,\Delta}$, 显然有 $(\lambda a\to\mu b)\wedge(\mu b\to\lambda a)=(\mu b\to\lambda a)\wedge(\lambda a\to\mu b)$.

所以有, $(\lambda A\to\mu B)\wedge(\mu B\to\lambda A)=(\mu B\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\mu B)$.

从而有, $((\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})\wedge(\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A}))(x_1,x_2,...,x_m)=((\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A})\wedge(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B}))(x_1,x_2,...,x_m)$,

则

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}((\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})\wedge(\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A}))(x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}((\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A})\wedge(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B}))(x_1,x_2,...,x_m).$$

同时,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}((\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B})\wedge(\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A}))(x_1,x_2,...,x_m)\\&=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in N(\Gamma)}((\mu\overline{B}\to\lambda\overline{A})\wedge(\lambda\overline{A}\to\mu\overline{B}))(x_1,x_2,...,x_m).\end{aligned}$$

由定义 2.5 可得, $\tau((\lambda A\to\mu B)\wedge(\mu B\to\lambda A))=\tau((\mu B\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\mu B))$.

因此 $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\xi_{n,\Gamma}(\mu B,\lambda A)$.

(ii)
$$\begin{aligned}\xi_{n,\Gamma}(\lambda A\vee\mu B,\lambda A)&=\tau_{n,\Gamma}(((\lambda A\vee\mu B)\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to(\lambda A\vee\mu B)))\\&=\tau_{n,\Gamma}(((\lambda A\to\lambda A)\wedge(\mu B\to\lambda A))\wedge((\lambda A\to\lambda A)\vee(\lambda A\to\mu B)))\\&=\tau_{n,\Gamma}((\mu B\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\lambda A))\\&=\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A).\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\xi_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B,\lambda A)&=\tau_{n,\Gamma}(((\lambda A\wedge\mu B)\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to(\lambda A\wedge\mu B)))\\&=\tau_{n,\Gamma}(((\lambda A\to\lambda A)\vee(\mu B\to\lambda A))\wedge((\lambda A\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\mu B)))\\&=\tau_{n,\Gamma}((\lambda A\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\mu B))\\&=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B).\end{aligned}$$

□

定理 3.3. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B,C\in F(S),S_\Gamma$ 有限,则 $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\eta C)\geq\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)+\xi_{n,\Gamma}(\mu B,\eta C)-1$.

证明: 设 A,B,C 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,...,p_m$, 由定理 2.8 和定理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)+\xi_{n,\Gamma}(\mu B,\eta C)-1&=(\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)-1)+(\tau_{n,\Gamma}(\eta C\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\eta C)-1)-1\\&\leq\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\eta C)+\tau_{n,\Gamma}(\eta C\to\lambda A)-1\\&=\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\eta C).\end{aligned}$$

定义 3.2. 设 $\Gamma\subseteq F(S),A,B\in F(S),S_\Gamma$ 有限,规定 $\rho_{n,\Gamma}:F(S)\times F(S)\to[0,1]$, 则

$$\rho_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=1-\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B),$$

称 $\rho_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)$ 为公式 A,B 在 λ,μ 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ–k 伪距离,简称Γ–k 伪距离, $(F(S),\rho_{n,\Gamma})$ 称为Γ–k 逻辑度量空间.

定理 3.4. 设$\Gamma\subseteq F(S), A,B,C\in F(S), S_\Gamma$有限,则

$$\rho_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=1-\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+1-\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A).$$

证明: 由定理 3.1 可知,$\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)-1$,
则有

$$1-\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=1-(\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)-1),$$

可得

$$\rho_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=1-\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)+1-\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A).$$ □

定理 3.5. 设$\Gamma\subseteq F(S), A,B\in F(S), S_\Gamma$有限,以下各结论成立.

(i) $\rho_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\rho_{n,\Gamma}(\mu B,\lambda A)$;

(ii) $\rho_{n,\Gamma}(\lambda A\vee\mu B,\lambda A)=1-\tau_{n,\Gamma}(\mu B\to\lambda A)$;

(iii) $\rho_{n,\Gamma}(\lambda A\wedge\mu B,\lambda A)=1-\tau_{n,\Gamma}(\lambda A\to\mu B)$.

证明: 在此只证明(i),其他同理可证,设 A,B 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\ldots,p_m$, 由定理 3.2(i)可知,因为, $\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=\xi_{n,\Gamma}(\mu B,\lambda A)$, 所以, $\rho_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=1-\xi_{n,\Gamma}(\lambda A,\mu B)=1-\xi_{n,\Gamma}(\mu B,\lambda A)=\rho_{n,\Gamma}(\mu B,\lambda A)$. □

4 总 结

本文对 n 值 Goguen 命题逻辑进行了公理化扩张 Goguen$_{\sim,\Delta}$ ($\Pi_{\sim,\Delta}$),并利用公式的诱导函数给出公式在 k(k 任取~或Δ)连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ–k 真度的定义;讨论了 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中Γ–k 真度的 MP 规则、HS 规则等相关性质;定义了 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中两公式间的Γ–k 相似度与Γ–k 伪距离,得到了公式在 k 连接词下相对于局部有限理论Γ的Γ–k 相似度与Γ–k 伪距离所具有的一些良好性质.关于Γ–k 真度、Γ–k 相似度与Γ–k 伪距离所具有的更多良好性质,以及关于Γ–k 真度的近似推理理论等,我们将在另文中加以讨论.

References:

[1] Pavelka J. On fuzzy logic I: Many-Valued rules of inference; II: Enriched lattice and semantics of propositional calculi; III: Semantical completeness of some many-valued propositional calculi. Zeitschrf Math Logik und Grundlagender Math, 1979,25:45–52; 119–134; 447–464. [doi: 10.1002/malq.19790250304] [doi: 10.1002/malq.19790250706] [doi: 10.1002/malq.19790252510]

[2] Wang GJ. Quantitative logic (I). Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006,23(2):191–215 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2006.02.001]

[3] Pei DW. Fuzzy Logic Theory and Its Application Based on *t*-Norm. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese).

[4] Wang GJ, Liu BC. The theory of relative Γ-tautology degree of formulas in four propositional logics. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007,24(4):598–610 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2007.04.004]

[5] Hui XJ. Truth degree decreasing theorem of generalized effective inference in fuzzy logic system. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013,27(4):36–41 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1001-7402.2013.04.007]

[6] Zhou JR, Wu HB. An equivalent definition and some properties of truth degrees in Łukasiewicz propositions logic system. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2013,30(4):580–590 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2013.04.011]

[7] Hui XJ, Wang GJ. Randomization of classical inference patterns and its application. Science in China (Series E), 2007, 37(6):801–812 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1007/s11432-007-0067-9]

[8] Hui XJ, Wang GJ. Randomization of classical inference patterns and its application (II). Fuzzy Systems and Mathematics, 2008,22(3):21–26 (in Chinese with English abstract).

[9] Hui XJ. Randomization of 3-valued propositional logic system. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2009,32(1):19–27 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:0254-3079.2009.01.003]

[10] Wang GJ, Hui XJ. Generalization of fundamental theorem of probability logic. Acta Electronica Sinica, 2007,35(7):1333–1340 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2007.07.021]

[11] Wu HB. The theory of Γ-truth degrees of formulas and limit theorem in Łukasiewicz propositional logic. Science in China: Information Science, 2014,44(12):1542–1559 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1360/N112013-00171]

[12] Wu HB, Zhou JR. The Γ-truth degree of formulas in propositional logic system $R_0Ł_{3n+1}$with properties. Chinese Journal of

Computers, 2015,38(8):1672–1679 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01672]
[13] Zhou HJ. Theory of Borel probability truth degrees of propositions in Łukasiewicz propositional logics and a limit throrem. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2012,23(9):2235–2247 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4179.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04179]
[14] She YH, He XL. Borel probabilistic rough truth degree of formulas in rough logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(5):970–983 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4441.htm [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004441]
[15] Francesc E, Lluís G, Petr H, Mirko N. Residuated fuzzy logics with an involutive negation. Archive for Mathematical Logic, 2000, 39(2):103–124. [doi: 10.1007/s001530050006]
[16] Flaminio T, Marchioni E. *T*-Norm based logics with an independent an involutive negation. Fuzzy Sets & Systems, 2006,157(24): 3125–3144. [doi: 10.1016/j.fss.2006.06.016]
[17] Cintula P, Klement E P, Mesiar R, Navara M. Fuzzy logics with an additional involutive negation. Fuzzy Sets & Systems, 2010, 161(3):390–411. [doi: 10.1016/j.fss.2009.09.003]
[18] Hui XJ. Quantified axiomatic extension systems of $SBL_\sim$ based on truth value. Science in China: Information Science, 2014, 44(7):900–911 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1360/N112013-00166]

附中文参考文献:

[2] 王国俊.计量逻辑学(I).工程数学学报,2006,23(2):191–215. [doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2006.02.001]
[3] 裴道武.基于三角模的模糊逻辑理论及其应用.北京:科学出版社,2013.
[4] 王国俊,刘保翠.四种命题逻辑中公式的相对Γ-重言度理论.工程数学学报,2007,24(4):598–610. [doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2007.04.004]
[5] 惠小静.模糊逻辑系统中广义有效推理的真度递减定理.模糊系统与数学,2013,27(4):36–41. [doi: 10.3969/j.issn.1001-7402.2013.04.007]
[6] 周建仁,吴洪博.Łukasiewicz 命题逻辑系统中真度的等价定义及相关性质.工程数学学报,2013,30(4):580–590. [doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2013.04.011]
[7] 惠小静,王国俊.经典推理模式的随机化研究及其应用.中国科学:E 辑,2007,37(6):801–812. [doi: 10.1007/s11432-007-0067-9]
[8] 惠小静,王国俊.经典推理模式的随机化研究及其应用(II).模糊系统与数学,2008,22(3):21–26.
[9] 惠小静.三值 R_0 命题逻辑系统的随机化.应用数学学报,2009,32(1):19–27. [doi: 10.3321/j.issn:0254-3079.2009.01.003]
[10] 王国俊,惠小静.概率逻辑学基本定理的推广.电子学报,2007,35(7):1333–1340. [doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2007.07.021]
[11] 吴洪博.Łukasiewicz 命题逻辑中公式的Γ-真度理论和极限定理.中国科学:信息科学,2014,44(12):1542–1559. [doi: 10.1360/N112013-00171]
[12] 吴洪博,周建仁.命题逻辑系统 $R_0Ł_{3n+1}$ 中公式的Γ-真度及性质.计算机学报,2015,38(8):1672–1679. [doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01672]
[13] 周红军.Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 Borel 概率真度理论和极限定理.软件学报,2012,23(9):2235–2247. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4179.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04179]
[14] 折延宏,贺晓丽.粗糙逻辑中公式的 Borel 型概率粗糙真度.软件学报,2014,25(5):970–983. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4441.htm [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004441]
[18] 惠小静.基于真值的 $SBL_\sim$ 公理化扩张系统的计量化.中国科学:信息科学,2014,44(7):900–911. [doi: 10.1360/N112013-00166]


高晓莉(1992－),女,陕西延安人,硕士,主要研究领域为数理逻辑,不确定性推理.


朱乃调(1990－),女,硕士,主要研究领域为数理逻辑,不确定性推理.


惠小静(1973－),女,博士,教授,CCF 专业会员,主要研究领域为不确定性推理.