软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2016,27(2):209−218 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004791]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

# 命题中介逻辑的可靠和完备 Gentzen 推导系统*

朱梧槚[1], 李　未[2], 眭跃飞[3], 罗　杰[2]

[1](南京航空航天大学 计算机系,江苏 南京 210016)

[2](软件开发环境国家重点实验室(北京航空航天大学),北京 100191)

[3](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室,北京 100190)

通讯作者: 眭跃飞, E-mail: yfsui@ict.ac.cn

**摘　要**: 中介逻辑是朱梧槚先生提出的一个 3-值逻辑.给出了一个命题中介逻辑,其中引入中介连接词~、反对连接词⊲以及蕴涵连接词→,并且定义否定连接词.给出了一个 Gentzen-型的推导系统,使得该系统关于中介逻辑的 3-值语义是可靠的和完备的.

**关键词**: 中介逻辑;矛盾关系;反对关系;可靠性;完备性

**中图法分类号**: TP301

中文引用格式: 朱梧槚,李未,眭跃飞,罗杰.命题中介逻辑的可靠和完备 Gentzen 推导系统.软件学报,2016,27(2):209−218. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4791.htm

英文引用格式: Zhu WJ, Li W, Sui YF, Luo J. Sound and complete gentzen deduction system for intermediate propositional logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2016,27(2):209−218 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4791.htm

## Sound and Complete Gentzen Deduction System for Intermediate Propositional Logic

ZHU Wu-Jia[1], LI Wei[2], SUI Yue-Fei[3], LUO Jie[2]

[1](Department of Computer Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

[2](State Key Laboratory of Software Development Environment (Beijing University of Aeronautics and Astronautics), Beijing 100191, China)

[3](Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract**: The intermediate logic is a three-valued logic proposed by Zhu Wu-Jia. A propositional intermediate logic is proposed in this paper where the intermediate unary connective ~ and the contrary connective ⊲ are introduced, and the negative connective ¬ is defined in terms of the unique binary connective →. A Gentzen-typed deduction system is given such that the system is sound and complete with the three-valued semantics of the propositional intermediate logic.

**Key words**: intermediate logic; contradictory; contrary; soundness; completeness

反对关系是两个命题之间的一个关系,其中,两个命题是反对的,如果一个命题的真蕴涵另一个的假(尽管一个命题的假可能不蕴涵另一个的真).反对的概念是普遍存在的,比如概念好人和概念坏人是反对关系.

传统的逻辑是基于矛盾关系的[1],其中两个命题是矛盾的,如果一个命题的真蕴涵另一个命题的假;反之亦然,即,一个命题的假蕴涵另一个命题的真.比如,命题逻辑有两个连接词¬和→,其中,¬是矛盾的否定.因此,排中律 $A\vee\neg A$ 在命题逻辑中是一个公理.我们称传统的命题逻辑为命题矛盾逻辑[2,3].

* 基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)(2005CB321901); 软件开发环境国家重点实验室开放课题(SKLSDE-2010KF-06)

Foundation item: National Program on Key Basic Research Project (973) (2005CB321901); Open Fund of the State Key Laboratory of Software Development Environment (SKLSDE-2010KF-06)

收稿时间: 2014-06-12; 修改时间: 2014-10-14; 采用时间: 2014-10-29

中介逻辑是朱梧槚先生提出的一个 3-值逻辑[4−6],其中,逻辑语言包含两个特别的一元连接词~,⊲以及一个二元连接词→,其中,~$A$ 和⊲$A$ 分别表示 $A$ 的中介命题和反对命题.朱梧槚[7]给出了相应的语义和推导规则,其中,~,⊲,→的真假值见表 1.

**Table 1**

**表 1**

| $A$ | $\sim A$ | $\lhd A$ | $A\to B$ | 1 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | −1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| −1 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 1 |

为了给出中介逻辑的一个可靠和完备的推导系统,有如下两个问题应该考虑:

(1) 语义是 3-值的.存在两种方法定义序贯$\Gamma\Rightarrow\Delta$的可满足性:

- 一个是按照通常的方法解释⇒,i.e.,一个赋值满足$\Gamma\Rightarrow\Delta$,如果$\Gamma$的真假值小于$\Delta$的,i.e.,⇒的真假值见表 2.

**Table 2**

**表 2**

| $\Gamma\Rightarrow\Delta$ | 1 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | −1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| −1 | 1 | 1 | 1 |

在这种情况下,⇒的语义不同于→的语义.

- 另一个是按下述方法解释⇒:一个赋值 $v$ 满足$\Gamma\Rightarrow\Delta$,如果$\Gamma$的真蕴涵$\Delta$的真.⇒的语义与→的语义在(1,1)点是相同的.

(2) 我们不能类似于关于¬的推导规则:

$$\frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\neg A\Rightarrow\Delta},\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\neg A,\Delta}.$$

给出下列关于~和⊲的推导规则:

$$\frac{\Gamma\Rightarrow A,\Delta}{\Gamma,\sim A\Rightarrow\Delta},\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim A,\Delta},$$
$$\frac{\Gamma\Rightarrow A,\Delta}{\Gamma,\lhd A\Rightarrow\Delta},\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\lhd A,\Delta}.$$

我们需要对~,⊲,→的任意两个给出一个推导规则,由此我们可以分解型为$\sim\sim A,\sim\lhd A,\lhd\sim A,\lhd\lhd A,\sim(A\to B)$和$\lhd(A\to B)$的公式到原子公式 $p$ 或者中介原子公式$\sim p$,反对原子公式$\lhd p$.

我们希望建立一个 Gentzen-型的推导系统,使得其在如下两点上不同于传统的 Gentzen-型的推导系统:

- 这个推导系统有推导规则来归约两个一元连接词为一元连接词;
- 这个推导系统有推导规则来归约一个一元连接词和一个二元连接词→为一元连接词.

这使得一个序贯$\Gamma\Rightarrow\Delta$可以归约为一个原子序贯$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$,其中,$\Gamma',\Delta'$是型为 $p,\sim p,\lhd p$ 的公式集合,并且$\Gamma'\Rightarrow\Delta'$是一个公理,如果$\Gamma'\cap\Delta'\neq\varnothing$.

本文将给出中介逻辑的一个可靠和完备的 Gentzen 推导系统,其中,逻辑语言包含一元连接词~,⊲和一个二元连接词→[4].否定连接词¬通过→定义,i.e.,$\neg A=A\to\sim A$.此外,$A\to B$ 等价于$\lhd\hat{=}\vee B$,并且$\neg A$ 等价于$\lhd A\vee\sim A$.形式地,

$$A\to B\equiv\lhd A\vee B,$$
$$\neg A=A\to\sim A=\lhd A\vee\sim A.$$

假设 $A$ 表示 $a$ 是一个好人,则⊲$A$ 表示 $a$ 是一个坏人,~$A$ 表示 $a$ 是一个不好并且不坏的人,并且¬$A$ 表示要么

$a$ 是一个不好并且不坏的人或者 $a$ 是一个坏人.在自然语言中,$a$ 是一个好人的反对断言是 $a$ 是一个坏人,并且 $a$ 是一个好人的中介断言是 $a$ 是一个不好并且不坏的人.

具体地,我们将给出一个 3-值命题中介逻辑,其中,

- 引入两个一元连接词⊲和~,其中,~$p$ 是 $p$ 的中介[8],并且⊲$p$ 是 $p$ 的反对.
- 引入一个二元连接词→,其语义与传统逻辑的→的语义不同.
- 定义 3-值语义[9],使得一个赋值 $v$ 是命题变元到{1,0,−1}的一个函数,并且使得 $p\vee{\sim}p\vee\lhd p$ 是永真的.
- 给出一个 Gentzen-型的推导系统[1,10],使得:
  - ➢ 可靠性定理成立,即,对任何公式集合$\Gamma$和$\Delta$,如果$\Gamma\vdash\Delta$,则$\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$;
  - ➢ 完备性定理成立,即,对任何公式集合$\Gamma$和$\Delta$,如果$\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$,则$\Gamma\vdash\Delta$.

本文第 1 节定义命题中介逻辑中的基本概念:逻辑语言、中介逻辑的语义和语法.第 2 节给出命题中介逻辑的推导系统,并证明该推导系统的可靠性定理.第 3 节证明命题中介逻辑的完备性定理.最后一节总结全文.我们使用的符号是标准的,主要参考文献为文献[1].

## 1 3-值的命题中介逻辑

命题中介逻辑的逻辑语言包含下列符号:

- 命题变元:$p_0,p_1,\ldots$;
- 一元逻辑连接词:~,⊲;
- 二元逻辑连接词:→.

公式定义为

$$A::=p|{\sim}A|\lhd A|A_1\to A_2.$$

设 $v$ 是命题变元到 3={1,0,−1}的一个函数,定义:

$$v(A)=\begin{cases}v(p), & \text{如果}A=p\\ f_{\sim}v(A_1), & \text{如果}A={\sim}A_1\\ f_{\lhd}v(A_1), & \text{如果}A=\lhd A_1\\ f_{\to}(v(A_1,v(A_2)), & \text{如果}A=A_1\to A_2\end{cases}.$$

其中, $f_{\sim},f_{\lhd}:3\to3, f_{\to}:3\times3\to3$ ,定义见表 3.

**Table 3**

**表 3**

| $A$ | $f_{\sim}$ | $f_{\lhd}$ | $f_{\to}$ | 1 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | −1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| −1 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 1 |

因此,我们有表 4.

**Table 4**

**表 4**

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |
| −1 | 1 |

注:下列等价是永真的:

$${\sim\sim}A\equiv A\vee\lhd A,$$

$${\sim}\lhd A\equiv{\sim}A,$$

$$\lhd\lhd A \equiv A,$$

并且对任何赋值 $v,v(\lhd\sim A)\neq 1$.因为$\vee$不是本文的逻辑语言中的符号,这些等价只是与我们的直觉相符.

类似地,我们有下列等价:

$$\sim(A\to B)\equiv(A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\lhd B),$$
$$\lhd(A\to B)\equiv A\wedge\lhd B.$$

任给两个公式集合$\Gamma,\Delta$,定义:

$$v(\Gamma)=\min\{v(A):A\in\Gamma\},$$
$$v(\Delta)=\max\{v(A):A\in\Delta\}.$$

给定一个序贯$\delta:=\Gamma\Rightarrow\Delta$,我们称 $v$ 满足$\delta$,记为 $v\vDash\delta$,如果 $v(\Gamma)=1$ 蕴涵 $v(\Delta)=1$.

一个序贯$\delta$是永真的,记为$\vDash\delta$,如果对任何赋值 $v,v\vDash\delta$.

一个序贯$\delta$是原子的,如果每个$\Gamma$和$\Delta$中的公式是原子的,或者原子的中介,或者原子的反对.

## 2 命题中介逻辑的 Gentzen 系统

传统的 Gentzen 推导规则是用来消除逻辑符号的(命题逻辑中的连接词、一阶逻辑中的连接词与量词、命题模态逻辑中的连接词和模态词),一个连接词有左、右两个规则,比如$\neg$的规则为左$\neg$-规则和右$\neg$-规则:

$$\frac{\Gamma\Rightarrow A,\Delta}{\Gamma,\neg A\Rightarrow\Delta}(\neg^L),\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\neg A,\Delta}(\neg^R).$$

这样的推导规则对于 3-值的一元连接词~和$\lhd$是不合适的,因为 $A$ 与$\neg A$ 是互补的,而 $A,\sim A$ 和 $A,\lhd A$ 均不是互补的.因此,我们不能使用下列形式的~-规则和$\lhd$-规则:

$$\frac{\Gamma\Rightarrow A,\Delta}{\Gamma,\sim A\Rightarrow\Delta}(\sim^L),\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim A,\Delta}(\sim^R);$$
$$\frac{\Gamma\Rightarrow A,\Delta}{\Gamma,\lhd A\Rightarrow\Delta}(\lhd^L),\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\lhd A,\Delta}(\lhd^R).$$

我们将给出一个推导规则的集合,使得每个规则是对应一个连接词序对.比如,为了给出一个$(\sim,\to)$的推导规则$(\sim\to^L)$,由$\to$-真假值表的定义,我们有:

$$\sim(A\to B)=(A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\lhd B).$$

注意,$\wedge,\vee$不在本文的逻辑语言中.

由传统的 Gentzen 推导规则,我们有下列推导:

$$\Gamma,\sim(A\to B)\Rightarrow\Delta,$$
$$\Gamma,(A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\lhd B)\Rightarrow\Delta,$$
$$\Gamma,(A\wedge\sim B)\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,(\sim A\wedge\sim B)\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,(\sim A\wedge\lhd B)\Rightarrow\Delta.$$

下一步推导有两种选择:

- 一种是

$$\Gamma,(A\wedge\sim B)\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,(\sim A\wedge\sim B)\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,(\sim A\wedge\lhd B)\Rightarrow\Delta,$$
$$\Gamma,A,\sim B\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,\sim A,\sim B\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,\sim A,\lhd B\Rightarrow\Delta.$$

- 另一种是

$$\Gamma,(A\wedge\sim B)\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,(\sim A\wedge\sim B)\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,(\sim A\wedge\lhd B)\Rightarrow\Delta,$$
$$\begin{cases}\Gamma,A\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\sim B\Rightarrow\Delta\end{cases},\ \begin{cases}\Gamma,\sim A\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\sim B\Rightarrow\Delta\end{cases},\ \begin{cases}\Gamma,\sim A\Rightarrow\Delta\\ \Gamma,\lhd B\Rightarrow\Delta\end{cases}.$$

由第 1 个选择,我们有下列推导规则:

$$\frac{\Gamma_1,A,\sim B\Rightarrow\Delta_1,\Gamma_2,\sim A,\sim B\Rightarrow\Delta_2,\Gamma_3,\sim A,\lhd B\Rightarrow\Delta_3}{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\sim(A\to B)\Rightarrow\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3}(\sim\to^L).$$

由第 2 个选择,我们有下列推导规则:

$$\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim A \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \sim A \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_1,$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim A \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \lhd B \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_2,$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim B \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \sim A \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_3,$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim B \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \lhd B \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_4,$$

$$\frac{\Gamma_1, \sim B \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim A \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \sim A \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_5,$$

$$\frac{\Gamma_1, \sim B \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim A \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \lhd B \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_6,$$

$$\frac{\Gamma_1, \sim B \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim B \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \sim A \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_7,$$

$$\frac{\Gamma_1, \sim B \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim B \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \lhd B \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim (A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L)_8.$$

类似地,对于$(\sim\to^R)$,我们有:

$$\Gamma \Rightarrow \sim (A \to B), \Delta,$$

$$\Gamma \Rightarrow (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge \lhd B), \Delta,$$

$$\begin{cases} \Gamma \Rightarrow A \wedge \sim B, \Delta \\ \Gamma \Rightarrow \sim A \wedge \sim B, \Delta, \\ \Gamma \Rightarrow \sim A \wedge \lhd B, \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta, \Gamma \Rightarrow \sim B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge \sim B, \Delta} \\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta, \Gamma \Rightarrow \sim B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim A \wedge \sim B, \Delta}, \\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta, \Gamma \Rightarrow \lhd B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim A \wedge \lhd B, \Delta} \end{cases}$$

以及下列推导规则:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta, \Gamma \Rightarrow \sim B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim (A \to B), \Delta}(\sim\to^R)_1,$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta, \Gamma \Rightarrow \sim B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim (A \to B), \Delta}(\sim\to^R)_2,$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta, \Gamma \Rightarrow \lhd B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim (A \to B), \Delta}(\sim\to^R)_3.$$

为简单起见,我们将用第 1 个选择.

命题中介逻辑的 Gentzen 推导系统包含下列公理和推导规则:

- 公理

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta,$$

$$\Gamma, \sim p \Rightarrow \sim p, \Delta,$$

$$\Gamma, \lhd p \Rightarrow \lhd p, \Delta,$$

$$\Gamma, p, \sim p \Rightarrow \Delta,$$

$$\Gamma, p, \lhd p \Rightarrow \Delta,$$

$$\Gamma, \sim p, \lhd p \Rightarrow \Delta,$$

$$\Gamma \Rightarrow p, \sim p, \lhd p, \Delta.$$

- 一元连接词的推导规则

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Gamma, \lhd A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim\sim A \Rightarrow \Delta}(\sim\sim^L),$$
$$\frac{\Gamma, \sim A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim\lhd A \Rightarrow \Delta}(\sim\lhd^L),$$
$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \lhd\lhd A \Rightarrow \Delta}(\lhd\lhd^L),$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim\sim A, \Delta}(\sim\sim^R)_1,$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \lhd A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim\sim A, \Delta}(\sim\sim^R)_2,$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim\lhd A, \Delta}(\sim\lhd^R),$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \lhd\lhd A, \Delta}(\lhd\lhd^R).$$

注:不存在以下类型的推导规则,因为$\lhd\sim A$ 是不可满足的:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \lhd\sim A \Rightarrow \Delta}(\lhd\sim^L), \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \lhd\sim A, \Delta}(\lhd\sim^R),$$
$$\frac{\Gamma, \sim A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \lhd\sim A \Rightarrow \Delta}(\lhd\sim^L), \frac{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \lhd\sim A, \Delta}(\lhd\sim^R),$$
$$\frac{\Gamma, \lhd A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \lhd\sim A \Rightarrow \Delta}(\lhd\sim^L), \frac{\Gamma \Rightarrow \lhd A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \lhd\sim A, \Delta}(\lhd\sim^R).$$

- 一个一元连接词和一个二元连接词的推导规则
  - 二元连接词→

$$\frac{\Gamma_1, \lhd A \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}(\to^L),$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \lhd A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}(\to^R)_1,$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}(\to^R)_2.$$

  - 一元连接词~和二元连接词→

$$\frac{\Gamma_1, A, \sim B \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2, \sim A, \sim B \Rightarrow \Delta_2, \Gamma_3, \sim A, \lhd B \Rightarrow \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \sim(A \to B) \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}(\sim\to^L),$$
$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1, \Gamma_2 \Rightarrow \sim B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \sim(A \to B), \Delta_1, \Delta_2}(\sim\to^R)_1,$$
$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \sim A, \Delta_1, \Gamma_2 \Rightarrow \sim B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \sim(A \to B), \Delta_1, \Delta_2}(\sim\to^R)_2,$$
$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \sim A, \Delta_1, \Gamma_2 \Rightarrow \lhd B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \sim(A \to B), \Delta_1, \Delta_2}(\sim\to^R)_3.$$

  - 一元连接词⊲和二元连接词→

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \lhd(A \to B) \Rightarrow \Delta}(\lhd\to^L)_1,$$

$$\frac{\Gamma,\lhd B\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\lhd(A\to B)\Rightarrow\Delta}(\lhd\to^{L})_2,$$

$$\frac{\Gamma_1\Rightarrow A,\Delta_1,\Gamma_2\Rightarrow\lhd B,\Delta_2}{\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow\lhd(A\to B),\Delta_1,\Delta_2}(\lhd\to^{R}).$$

注:推导规则$(\sim\to^{L})$与$(\sim\to^{R})$直观地来自下列分析:

由$\to$的真假值表,我们有:

$$\sim(A\to B)=(A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge\lhd B).$$

为了推导$\Gamma,\sim(A\to B)\Rightarrow\Delta$,我们需要推导:

$$\Gamma,A\wedge\sim B\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,\sim A\wedge\sim B\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,\sim A\wedge\lhd B\Rightarrow\Delta.$$

i.e.,

$$\Gamma,A,\sim B\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,\sim A,\sim B\Rightarrow\Delta,\ \Gamma,\sim A,\lhd B\Rightarrow\Delta.$$

对偶地,为了推导$\Gamma\Rightarrow\sim(A\to B),\Delta$,我们需要推导以下形式之一:

$$\Gamma\Rightarrow A\wedge\sim B,\Delta;$$
$$\Gamma\Rightarrow\sim A\wedge\sim B,\Delta;$$
$$\Gamma\Rightarrow\sim A\wedge\lhd B,\Delta.$$

i.e.,

$$\Gamma\Rightarrow A,\Delta,\Gamma\Rightarrow\sim B,\Delta;$$
$$\Gamma\Rightarrow\sim A,\Delta,\Gamma\Rightarrow\sim B,\Delta;$$
$$\Gamma\Rightarrow\sim A,\Delta,\Gamma\Rightarrow\lhd B,\Delta.$$

**定义 1**. 一个序贯$\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是可证的,记为$\Gamma\vdash\Delta$,如果存在一个序贯序列$\{\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\dots,\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n\}$,使得$\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n:=\Gamma\Rightarrow\Delta$,并且对每个 $1\leqslant i\leqslant n,\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i$ 是由前面的序贯和一个推导规则推导得出的.

**定理 1(可靠性定理)**. 如果$\Gamma\vdash\Delta$,则$\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$.

证明:我们证明每个公理是永真的,并且每个推导规则保持永真性.

为了验证公理的永真性,假设对任何赋值 $v,v\vDash\Gamma,\sim p$,则 $v\vDash\sim p$,并且 $v\vDash\sim p,\Delta$.其他公理也类似.

为了验证$(\sim\sim^{L})$保持永真性,假设对任何赋值 $v,v\vDash\Gamma,A$ 蕴涵 $v\vDash\Delta$;并且对任何赋值 $v,v\vDash\Gamma,\lhd A$ 蕴涵 $v\vDash\Delta$.注意:对任何赋值 $v,v\vDash\sim\sim A$ 当且仅当 $v\vDash A$ 或者 $v\vDash\lhd A$.因此,对任何赋值 $v$,如果 $v\vDash\Gamma,\sim\sim A$,那么:(1) 如果 $v\vDash A$,则由假设,$v\vDash\Delta$;(2) 如果 $v\vDash\lhd A$,则由假设,$v\vDash\Delta$.其他一元连接词的规则也类似.

为了验证$(\sim\to^{L})$保持永真性,假设对任何赋值 $v$:

- $v\vDash\Gamma_1,A,\sim B$ 蕴涵 $v\vDash\Delta_1$;
- $v\vDash\Gamma_2,\sim A,\sim B$ 蕴涵 $v\vDash\Delta_2$;
- $v\vDash\Gamma_3,\sim A,\lhd B$ 蕴涵 $v\vDash\Delta_3$.

对任何赋值 $v$,假设 $v\vDash\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\sim(A\to B)$,则

$$(v\vDash A\ \&\ v\vDash\sim B)\text{或者}(v\vDash\sim A\ \&\ v\vDash B)\text{或者}(v\vDash\sim A\ \&\ v\vDash\lhd B).$$

即 $v\vDash A,\sim B$ 或者 $v\vDash\sim A,B$,或者 $v\vDash\sim A,\lhd B$.因此,$v\vDash\Gamma_1,A,\sim B$,或者 $v\vDash\Gamma_2,\sim A,B$,或者 $v\vDash\Gamma_3,\sim A,\lhd B$;而由假设,$v\vDash\Delta_1$,或者 $v\vDash\Delta_2$,或者 $v\vDash\Delta_3$,因此,$v\vDash\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$.

类似地,验证规则$(\sim\to^{R})$.

为了验证$(\lhd\to^{R})$保持永真性,假设对任何赋值 $v,v\vDash\Gamma_1$ 蕴涵 $v\vDash A,\Delta_1$;并且 $v\vDash\Gamma_2$ 蕴涵 $v\vDash\lhd B,\Delta_2$.对任何赋值 $v$,假设 $v\vDash\Gamma_1,\Gamma_2$.如果 $v\vDash A$ 并且 $v\vDash\lhd B$,则 $v\vDash\lhd(A\to B)$,并且 $v\vDash\lhd(A\to B),\Delta_1,\Delta_2$;如果 $v\nvDash A$,则 $v\vDash\Delta_1,v\vDash\lhd(A\to B),\Delta_1,\Delta_2$;如果 $v\nvDash\lhd B$,则 $v\vDash\Delta_2,v\vDash\lhd(A\to B),\Delta_1,\Delta_2$.

其他推导规则也类似. □

## 3 命题中介逻辑的完备性定理

**定理 2**(完备性定理). 如果$\models\Gamma\Rightarrow A$,则$\Gamma\vdash A$.

证明:设$\delta:=\Gamma\Rightarrow A$.我们将定义一棵树 $T(\delta)$,称为$\delta$的推导树.由此,我们可以得到$\delta$的一个证明,或者证明$\delta$的非永真性.

$\delta$的推导树 $T(\delta)$在每个节点包含一个序贯,其构造如下:

步骤 0. $T_0(\delta)=\{\delta\}$.

步骤 $k(k>0)$. $T_k(\delta)$分情况定义如下:

- 情况 0: 如果$\Gamma\Rightarrow\Delta$是一个公理,该节点$\Gamma\Rightarrow\Delta$为树叶;
- 情况 1: $T_{k-1}(\delta)$的每个最顶端的序贯$\Gamma\Rightarrow\Delta$是一个公理,则停止;
- 情况 2: 不是情况 1.$T_k(\delta)$定义如下(设$\Gamma\Rightarrow\Delta$是目前最顶端的序贯):
  - 子情况$(\sim\sim^L)$:设$\sim\sim A_1,\ldots,\sim\sim A_n$ 是$\Gamma$中的所有公式,其最外层的逻辑符号为$\sim\sim$,并且在前面步骤中没有被$(\sim\sim^L)$用到,则对任何$\{1,\ldots,n\}$的任何划分$\{I_1,I_2\}$,将$\Gamma,A_i{:}i\in I_1,\triangleleft A_i{:}i\in I_2\Rightarrow\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\sim\sim^L)$归约已应用于$\sim\sim A_1,\ldots,\sim\sim A_n$.
  - 子情况$(\sim\sim^R)$:设$\sim\sim A_1,\ldots,\sim\sim A_n$ 是$\Delta$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\sim\sim$,并且在前面步骤中没有被$(\sim\sim^R)$用到,则将$\Gamma\Rightarrow A_1,\triangleleft A_1,\ldots,A_n,\triangleleft A_n,\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\sim\sim^R)$归约已应用于$\sim\sim A_1,\ldots,\sim\sim A_n$.
  - 子情况$(\sim,\triangleleft^L)$:设$\sim\triangleleft A_1,\ldots,\sim\triangleleft A_n$ 是$\Gamma$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\sim\triangleleft$,并且在前面步骤中没有被$(\sim\triangleleft^L)$用到,则将$\Gamma,\sim A_1,\ldots,\sim A_n\Rightarrow\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\sim\triangleleft^L)$归约已应用于$\sim\triangleleft A_1,\ldots,\sim\triangleleft A_n$.
  - 子情况$(\sim\triangleleft^R)$:设$\sim\triangleleft A_1,\ldots,\sim\triangleleft A_n$ 是$\Delta$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\sim\triangleleft$,并且在前面步骤中没有被$(\sim\triangleleft^R)$用到,则将$\Gamma\Rightarrow\sim A_1,\ldots,\sim A_n,\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\sim\triangleleft^R)$归约已应用于$\sim\triangleleft A_1,\ldots,\triangleleft A_n$.
  - 子情况$(\triangleleft\triangleleft^L)$:设$\triangleleft\triangleleft A_1,\ldots,\triangleleft\triangleleft A_n$ 是$\Gamma$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\triangleleft\triangleleft$,并且在前面步骤中没有被$(\triangleleft\triangleleft^L)$用到,则将$\Gamma,A_1,\ldots,A_n\Rightarrow\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\triangleleft\triangleleft^L)$归约已应用于$\triangleleft\triangleleft A_1,\ldots,\triangleleft\triangleleft A_n$.
  - 子情况$(\triangleleft\triangleleft^R)$:设$\triangleleft\triangleleft A_1,\ldots,\triangleleft\triangleleft A_n$ 是$\Delta$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\triangleleft\triangleleft$,并且在前面步骤中没有被$(\triangleleft\triangleleft^R)$用到,则将$\Gamma\Rightarrow A_1,\ldots,A_n,\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\triangleleft\triangleleft^R)$归约已应用于$\triangleleft\triangleleft A_1,\ldots,\triangleleft\triangleleft A_n$.
  - 子情况$(\rightarrow^L)$:设 $A_1\rightarrow B_1,\ldots,A_n\rightarrow B_n$ 是$\Gamma$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\rightarrow$,并且在前面步骤中没有被$(\rightarrow^L)$用到,则对任何$\{1,\ldots,n\}$的任何划分$\{I_1,I_2\}$,将$\Gamma,\triangleleft A_i{:}i\in I_1,B_i{:}i\in I_2\Rightarrow\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\rightarrow^L)$归约已应用于 $A_1\rightarrow B_1,\ldots,A_n\rightarrow B_n$.
  - 子情况$(\rightarrow^R)$:设 $A_1\rightarrow B_1,\ldots,A_n\rightarrow B_n$ 是$\Delta$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\rightarrow$,并且在前面步骤中没有被$(\rightarrow^R)$用到,则将$\Gamma\Rightarrow\triangleleft A_1,\sim B_1,\ldots,\triangleleft A_n,\sim B_n,\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\rightarrow^R)$)归约已应用于$A_1\rightarrow B_1,\ldots,A_n\rightarrow B_n$.
  - 子情况$(\sim\rightarrow^L)$:设$\sim(A_1\rightarrow B_1),\ldots,\sim(A_n\rightarrow B_n)$是$\Gamma$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\sim\rightarrow$,并且在前面步骤中没有被$(\sim\rightarrow^L)$用到,则对任何$\{1,\ldots,n\}$的任何划分$\{I_1,I_2,I_3\}$,将$\Gamma,A_i,\sim B_i{:}i\in I_1,\sim A_i,\sim B_i{:}i\in I_2,\sim A_i,\triangleleft B_i{:}i\in I_3\Rightarrow\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个$(\sim\rightarrow^L)$归约已应用于$\sim(A_1\rightarrow B_1),\ldots,\sim(A_n\rightarrow B_n)$.
  - 子情况$(\sim\rightarrow^R)$:设$\sim(A_1\rightarrow B_1),\ldots,\sim(A_n\rightarrow B_n)$是$\Delta$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\sim\rightarrow$,并且在前面步骤中没有被$(\sim\rightarrow^R)$用到,则将 $\Gamma\Rightarrow C_1^1,C_1^2,C_1^3,\ldots,C_n^1,C_n^2,C_n^3,\Delta$ 放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.其中,对于 $i\leqslant n$, $C_i^1\in\{A_i,\sim B_i\},C_i^2\in\{\sim A_i,\sim B_i\}$, 且 $C_i^3\in\{\sim A_i,\triangleleft B_i\}$. 我们称一个$(\sim\rightarrow^R)$归约已应用于

$\sim(A_1\to B_1),\ldots,\sim(A_n\to B_n)$.

- 子情况($\lhd\to^L$):设$\lhd(A_1\to B_1),\ldots,\lhd(A_n\to B_n)$是$\Gamma$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\lhd\to$,并且在前面步骤中没有被($\lhd\to^L$)用到,则将$\Gamma\Rightarrow A_1,\lhd B_1,\ldots,A_n,\lhd B_n,\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.我们称一个($\lhd\to^L$)归约已应用于$\lhd(A_1\to B_1),\ldots,\lhd(A_n\to B_n)$.
- 子情况($\lhd\to^R$):设$\lhd(A_1\to B_1),\ldots,\lhd(A_n\to B_n)$是$\Delta$中的所有公式,使得其最外层的逻辑符号为$\lhd\to$,并且在前面步骤中没有被($\lhd\to^R$)用到,则将$\Gamma\Rightarrow C_1,\ldots,C_n,\Delta$放在$\Gamma\Rightarrow\Delta$上.其中,$C_i\in\{A_i,\lhd B_i\}$.我们称一个($\lhd\to^R$)归约已应用于$\lhd(A_1\to B_1),\ldots,\lhd(A_n\to B_n)$.

这样,通过上面的归约过程得到的所有序贯集合,在出现的先后次序下构成$\delta$的归约树,记为 $T(\delta)$.$T(\delta)$中的一个序贯序列$\delta_0,\ldots,\delta_n$称为一个树枝,如果$\delta_0=\delta$,并且每个$\delta_{i+1}$是直接在$\delta_i$上.

给定一个序贯$\delta$,如果 $T(\delta)$的每个树枝的树叶,其上的序贯是一个公理,则很容易构造一个$\delta$的证明;否则,存在一个 $T(\delta)$的树枝$\sigma=\delta_1,\ldots,\delta_n$,使得没有规则可用于$\delta_n$,并且$\delta_n=\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n$不是一个公理.设:

$$\bigcup\Gamma=\{\phi:\phi\in\Gamma_i,\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i\in\sigma\},$$
$$\bigcup\Delta=\{\phi:\phi\in\Delta_i,\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i\in\sigma\}.$$

我们定义一个赋值,使得每个公式$\phi\in\bigcup\Gamma$为真,而每个公式$\phi\in\bigcup\Delta$不为真.

定义赋值 $v$,使得对任何命题变元 $p$:

- $v(p)=1$ 当且仅当 $p\in\bigcup\Gamma$;
- $v(p)=0$ 当且仅当$\sim p\in\bigcup\Gamma$;
- $v(p)=-1$ 当且仅当$\lhd p\in\bigcup\Gamma$.

对公式 $A$ 的结构作归纳,我们证明:(i) 如果 $A\in\bigcup\Gamma$, 则 $v\vDash A$;并且(ii) 如果 $A\in\bigcup\Delta$, 则 $v\nvDash A$.

- 情况 $A=\sim(A_1\to A_2)\in\bigcup\Gamma$.

设$\beta$是长度最小的$\delta$的截断,使得对某个$\Gamma'$和$\Delta'$,$\beta:=\Gamma',\sim(A_1\to A_2)\Rightarrow\Delta'$,则存在一个$\delta$的截断$\gamma$,使得$\beta$是$\gamma$的一个截断,并且$\gamma$是以下形式之一:

$$\Gamma',A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta';$$
$$\Gamma',\sim A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta';$$
$$\Gamma',\sim A_1,\lhd A_2\to\Delta'.$$

设$\gamma=\Gamma',\sim A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta'$,由归纳假设,$v\vDash\Gamma'$,$v\vDash\Gamma',\sim A_1,\sim A_2$并且 $v\nvDash\Delta'$.由可满足的定义,$v\vDash\Gamma',\sim(A_1\to A_2)$并且 $v\nvDash\Delta'$.

- 情况 $A=\sim(A_1\to A_2)\in\bigcup\Delta$.

设$\beta$是长度最小的$\sigma$的截断,使得对某个某个$\Gamma'$和$\Delta'$,$\beta:=\Gamma',\sim(A_1\to A_2)\Rightarrow\Delta'$,则存在$\sigma$的截断$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$,使得$\beta$是$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的一个截断,并且$\gamma_1:=\Gamma'\Rightarrow C_1,\Delta'$;$\gamma_2:=\Gamma'\Rightarrow C_2,\Delta'$和$\gamma_3:=\Gamma'\Rightarrow C_3,\Delta'$,其中,

$$C_1\in\{A_1,\sim A_2\},$$
$$C_2\in\{\sim A_1,\sim A_2\},$$
$$C_3\in\{\sim A_1,\lhd A_2\}.$$

由归纳假设,$v\vDash\Gamma'$并且 $v\nvDash C_1,\Delta'$;$v\nvDash C_2,\Delta'$;$v\nvDash C_3,\Delta'$.i.e.,$v\nvDash\sim(A_1\to A_2),\Delta'$.

类似地可证明其他情况. □

## 4 结束语

本文我们给出了一个命题中介逻辑和一个 Gentzen 推导系统,使得对于命题中介逻辑的 3-值语义,可靠性定理和完备性定理成立.

是否存在一个命题中介逻辑的 2-值的可靠和完备 Gentzen 推导系统,是一个值得考虑的问题.

**References**:

[1] Li W. Mathematical Logic: Foundations for Information Science. 2nd ed., Seizerland: Birkhäuser Basel, 2014.

[2] Fitting MC. Many-Valued modal logics I. Fundamenta Informaticae, 1991,15(3-4):235−254.

[3] Fitting MC. Many-Valued modal logics II. Fundamenta Informaticae, 1992,17(1-2):55−73.

[4] Zhu WJ, Xiao XA. Propositional deduction system for intermediate logic (I). Chinese Journal of Nature, 1985,8(4):315−316. (in Chinese).

[5] Zhu WJ, Xiao XA. Propositional deduction system for intermediate logic (II). Chinese Journal of Nature, 1985,8(5):394−395. (in Chinese).

[6] Zhu WJ, Xiao XA. Propositional deduction system for intermediate logic (III). Chinese Journal of Nature, 1985,8(6):473. (in Chinese).

[7] Zhu WJ, Xiao XA. Essential of Mathematical Foundation. Nanjing: Nanjing University Press, 1996 (in Chinese).

[8] Novák V. A formal theory of intermediate quantifiers. Fuzzy Sets and Systems, 2008,59:1229−1246. [doi: 10.1016/j.fss.2007.12.008]

[9] Urquhart A. Basic Many-Valued Logic. In: Gabbay D, Guenthner F, eds. Handbook of Philosophical Logic, Vol.2. 2nd ed., Dordrecht: Kluwer, 2001. 249−295.

[10] Avron A. Classical Gentzen-type methods in propositional many-valued logics. In: Fitting M, Orlowska E, eds. Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol.114. Heidelberg: Physica Verlag, 2003. 117−155. [doi: 10.1109/ISMVL.2001.924586]

**附中文参考文献**:

[4] 朱梧槚,肖奚安.中介逻辑的命题演算系统(I).自然杂志,1985,8(4):315−316.

[5] 朱梧槚,肖奚安.中介逻辑的命题演算系统(II).自然杂志,1985,8(5):394−395.

[6] 朱梧槚,肖奚安.中介逻辑的命题演算系统(III).自然杂志,1985,8(6):473.

[7] 朱梧槚,肖奚安.数学基础概论.南京:南京大学出版社,1996.


**朱梧槚**(1935－),男,江苏宜兴人,教授,博士生导师,主要研究领域为数学与计算机科学基础理论.

**眭跃飞**(1963－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为数理逻辑.

**李未**(1943－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 会士,主要研究领域为数理逻辑,知识发现,软件工程.

**罗杰**(1981－),男,博士,讲师,CCF 专业会员,主要研究领域为数理逻辑,知识发现,软件工程.