

# 基于软集的无标记信息代数模型与算法<sup>\*</sup>

许格妮<sup>1,2</sup>, 李永明<sup>1</sup>, 管雪冲<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

<sup>2</sup>(西安财经学院 统计学院, 陕西 西安 710100)

<sup>3</sup>(江苏师范大学 数学与统计学院, 江苏 徐州 221116)

通讯作者: 李永明, E-mail: liyongm@snnu.edu.cn

**摘要:** 在给定的一个初始论域  $U$  和参数集  $E$  上的全体软集中引入扩展运算与转移运算, 研究了它们的性质. 在此基础上引入商软集的概念, 并在全体商软集中引入联合运算与聚焦运算, 得到其构成一个无标记的信息代数, 并且若参数集  $E$  有限, 这个信息代数还是一个无标记的紧信息代数. 最后, 给出运用无标记信息代数的模型解决软集中不确定问题的决策算法与实例, 并与 Cagman 等人提出的 uni-int 决策算法做了比较说明.

**关键词:** 软集; 扩展; 转移; 商软集; 无标记信息代数; 紧信息代数

**中图法分类号:** TP181

中文引用格式: 许格妮, 李永明, 管雪冲. 基于软集的无标记信息代数模型与算法. 软件学报, 2015, 26(5): 1037-1047. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4686.htm>

英文引用格式: Xu GN, Li YM, Guan XC. Domain-Free information algebraic model and algorithm based on soft set. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(5): 1037-1047 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4686.htm>

## Domain-Free Information Algebraic Model and Algorithm Based on Soft Set

XU Ge-Ni<sup>1,2</sup>, LI Yong-Ming<sup>1</sup>, GUAN Xue-Chong<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

<sup>2</sup>(College of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

<sup>3</sup>(School of Mathematics and Statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China)

**Abstract:** Firstly, the operations of extension and transition in soft set over the universe  $U$  and the parameter  $E$  are proposed and some related properties are derived. Secondly, it is proved that the quotient soft set with the operations of combination and focusing is a domain-free information algebra. Moreover, the algebra is also compact if the set of all possible parameters is finite. Finally, an algorithm of decision making in term of the model of domain-free information algebra is presented and a corresponding example is provided to show that this model can be successfully applied to many problems. A comparison between the proposed algorithm and Cagman's uni-int decision making is illustrated in the end.

**Key words:** soft set; extension; transition; quotient soft set; domain-free information algebra; compact information algebra

软集理论是俄罗斯科学院的 Molodtsov 教授为了建立更一般的描述和处理不确定性的理论框架在 1999 年提出来的<sup>[1]</sup>. 根据 Molodtsov 教授的定义, 软集是由参数集及其到论域的幂集上的一个集值映射构成的二元组. 简言之, 软集就是给定论域的参数化的子集族, 或者说论域上由某些参数组织起来的一些子集构成的整体. 软集中每个参数对应的子集称为近似集, 所有近似集自然地构成了论域知识的一种粒化结构. 软集理论中对近似集不做任何限定, 近似集可以是空集, 而且不同参数对应的近似集的交集可能非空. 这使得软集概念涵盖的范围非常广泛, 且具有灵活多变、适于应用的特点. 因此, 软集理论得到快速的发展, 比如软集及其扩展结构的研究<sup>[2-7]</sup>.

\* 基金项目: 国家自然科学基金(11271237, 61228305, 11201278); 陕西省自然科学基金(2014JQ9372)

收稿时间: 2013-11-28; 修改时间: 2014-04-09; 定稿时间: 2014-07-01

软集与代数结构的研究<sup>[8-11]</sup>.而软集在不确定决策方面的研究,是软集理论最为活跃的研究方向之一.Maji 教授等人在文献[12]中首次将软集理论应用于决策问题,他们定义了决策对象的选择值,以描述对象的优劣程度,并基于选择值的大小得到最优决策对象或方案.由于使用软集描述各个对象关于决策属性的满足情况,而选择值也是通过软集计算得到的,所以这种决策问题完全在软集的形式框架内进行.Cagman 教授称这种基于软集的决策为软决策方法.此后,软决策研究吸引了国内外众多学者的注意,也得到快速的发展.Roy 和 Maji 教授在文献[13]中首先研究了模糊软集在软决策中的应用;文献[14]中又给出了一种通过模糊选择值排序的决策方法;在文献[15]中提出了一种基于模糊软集的可变决策方法,为解决这类软决策问题提供了一种新思路.文献[16]中进一步发展了可变决策的思想,并用其解决了基于区间值模糊软集的不确定决策问题.Cagman 和 Enginoglu 教授在文献[17]中给出了基于软集矩阵表示的一种不确定决策方法.随后,他们又在文献[18]中给出了基于 Molodtsov 软集的 uni-int 决策方法.该方法从两个给定的软集出发,先进行与积运算,再对与积软集使用 uni-int 算子求出 uni-int 决策集,uni-int 决策集是对原始方案集的一种约简,从而提高了决策效率.然而,以上这些决策都是通过软集中的一些运算或借助某些工具直接对软集进行处理,从而得到较好的方案.但我们要对一组包含若干个软集的对象进行信息提取时,如果我们能事先对这若干个软集进行分类,将那些含有“相同”信息量的软集看做一个类,然后把每一个类当做一个对象去进行处理,这样显然会比上述决策直接对软集进行处理简化很多,从而提高软集理论用于决策问题的效率.由此,我们提出了借助无标记信息代数模型的算法来解决软集中的决策问题.

信息代数是一种与局部计算和推理密切相关的、用于描述信息处理方式的一种特殊的代数结构模型.它由从事信任理论函数的 Prakash Shenoy 教授首次提出,并命名为 Valuation-Based Systems(VBS).之后,Kohlas 教授对其进行了明确、完整的表达<sup>[19]</sup>.在一个信息代数系统中,系统通过对变量的赋值来表达知识和信息,通过联合运算表示对信息进行合成,通过投影运算得到在指定变量集上的相关信息,从而完成信息的提取.它是非确定情形下知识表示和推理的重要工具.为了便于计算机对信息的处理,用“有限”的信息近似表示“无限”信息,Kohlas 教授进一步提出了紧信息代数的概念.最近的研究表明,信息代数的实例已经覆盖了从人工智能中包括约束系统、贝叶斯网、信任函数系统到关系代数、命题逻辑等多个研究领域<sup>[20-24]</sup>.

本文在软集中引入了扩展运算与转移运算,研究了它们的性质.基于这些基础,在全体商软集中引入联合运算与聚焦运算,得到该代数系统是一个无标记的信息代数,并且若参数集  $E$  有限,我们还找到了软集中一个紧信息代数的例子.因此,我们可借助无标记信息代数的模型解决软集中的一些决策问题.该决策方案是对原始方案的一种约简,从而得到最优决策方案,提高决策效率.最后,文中给出了用无标记信息代数模型解决软集中决策问题的算法,举出实例予以说明,并与 Cagman 等人提出的 uni-int 决策算法加以比较.理论推导与实例分析表明,该算法是可行和有效的.

## 1 基本概念

本节给出软集的基本知识以及信息代数的相关概念.

**定义 1<sup>[1]</sup>** 二元组  $(F,A)$  称为初始论域  $U$  上的一个软集,其中  $E$  是一个参数集合,  $A \subseteq E$ .  $\mathcal{P}(U)$  表示  $U$  的幂集,  $F:A \rightarrow \mathcal{P}(U)$  是一个集值映射.对于参数集  $E$ ,论域  $U$  上的软集的全体记为  $\mathcal{F}^E(U)$ .

也就是说,软集可以看做是给定论域的参数化的子集族.特别地,若  $\forall e \in A$  有  $F(e) = \emptyset$ ,则称  $(F,A)$  为(关于参数集  $A$  的)相对空软集,记为  $(\emptyset,A)$ ;若  $\forall e \in A$  有  $F(e) = U$ ,则称  $(F,A)$  为(关于参数集  $A$  的)相对全软集,记为  $(U,A)$ .

例 1:考虑一个面试问题.假设有 6 位应聘者竞选某公司的某一职位,那么 6 位应聘者构成了我们关注范围内的全体对象,即,论域  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ .而通常,面试者的 5 个特性被十分关注,这些特性构成  $U$  相应的参数空间  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ,其中,  $e_i (i=1,2,3,4,5)$  分别表示“有工作经验”、“计算机专业”、“高学历”、“年轻”、“健康”.取参数集  $A = E$ ,令  $F(e_1) = \{u_1, u_3, u_5, u_6\}$ ,  $F(e_2) = \{u_2, u_3, u_6\}$ ,  $F(e_3) = U$ ,  $F(e_4) = \{u_1, u_2, u_6\}$ ,  $F(e_5) = \{u_1, u_4, u_5, u_6\}$ ,由此可得论域  $U$  上的一个软集:

$$(F,A) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_2, \{u_2, u_3, u_6\}), (e_3, U), (e_4, \{u_1, u_2, u_6\}), (e_5, \{u_1, u_4, u_5, u_6\})\}.$$

该软集较全面地反映了面试者的相关信息.

对于参数集  $E$ ,论域  $U$  上的一个软集  $(F,A)$  也可以表示为一张表,在表中,第 1 行列出给出论域中所有对象,第 1 列给出所有的参数.对于  $u \in U$ ,如果  $u \in F(e)$ ,则在表中相应位置记为 1;否则记为 0.例 1 中,软集  $(F,A)$  见表 1.

Table 1 Soft set  $(F,A)$

表 1 软集  $(F,A)$

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
$e_1$	1	0	1	0	1	1
$e_2$	0	1	1	0	0	1
$e_3$	1	1	1	1	1	1
$e_4$	1	1	0	0	0	1
$e_5$	1	0	0	1	1	1

由表 1 容易看出, $u_6$  所对应的列全为 1,即, $u_6$  具备属性最多;其次是  $u_1$ ;再是  $u_2, u_3$  和  $u_5$ ;最后是  $u_4$ .

定义 2<sup>[6]</sup>. 设  $(F,A), (G,B) \in \mathcal{P}^E(U)$ ,若  $A \subseteq B$ ,且对任意的  $\forall e \in A$  有  $F(e) = G(e)$ ,则称  $(F,A)$  是  $(G,B)$  的软子集,记为  $(F,A) \subseteq (G,B)$ .

注 1:以下为了方便,如果  $(F,A) \subseteq (G,B)$ ,则记  $(F,A)$  为  $(G,B)^{\downarrow A}$  或者  $(G^{\downarrow A}, A)$ .

定义 3<sup>[6]</sup>. 设  $(F,A), (G,B) \in \mathcal{P}^E(U)$ ,定义  $(F,A)$  与  $(G,B)$  的扩展交为  $(F,A) \cap_e (G,B) = (H,C)$ ,其中,  $C = A \cup B$ ,且  $\forall e \in C$ ,若  $e \in A - B$ ,则  $H(e) = F(e)$ ;若  $e \in B - A$ ,则  $H(e) = G(e)$ ;若  $e \in A \cap B$ ,则  $H(e) = F(e) \cap G(e)$ .

定义 4<sup>[7]</sup>. 设  $(F,A), (G,B) \in \mathcal{P}^E(U)$ ,如果  $\forall e \in A \cup B$ ,当  $e \in A - B$  时有  $F(e) = U$ ,当  $e \in B - A$  时有  $G(e) = U$ ,当  $e \in A \cap B$  时有  $F(e) = G(e)$ ,则称  $(F,A)$  与  $(G,B)$  是软等价的,记作  $(F,A) \sim_s (G,B)$ .

命题 1<sup>[7]</sup>. 软等价关系  $\sim_s$  是  $\mathcal{P}^E(U)$  上的一个等价关系,且  $\cap_e$  关于  $\sim_s$  是  $\mathcal{P}^E(U)$  上的一个同余关系.

以下用赋值  $\varphi, \psi$  等表示知识或信息.这里所说的信息是一种广义意义上的信息,如某地区得某种病的人的比例、明天下雨的概率、着色问题中相邻区域不能着相同颜色等,用  $\Phi, \Psi$  等表示由信息构成的集合.

定义 5<sup>[19]</sup>. 假设  $(\Psi, D)$  是一个具有如下两种运算的二元组,其中,  $(D, \vee, \wedge)$  是一个格.

(1) 联合运算:  $\Psi \times \Psi \rightarrow \Psi; (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ .

(2) 聚焦运算:  $\Psi \times D \rightarrow \Psi; (\psi, x) \mapsto \psi^{\rightarrow x}$ .

如果系统  $(\Psi, D)$  满足如下公理,则称其为一个无标记的信息代数:

(1) 半群律:  $\Psi$  关于联合运算满足交换律与结合律.存在元素  $e$  满足对任意的  $\psi \in \Psi$ ,有  $e \otimes \psi = \psi$ .这里,称  $e$  为单位元.

(2) 传递律:若  $\psi \in \Psi, x, y \in D$ ,则  $(\psi^{\rightarrow x})^{\rightarrow y} = \psi^{\rightarrow x \vee y}$ .

(3) 联合律:若  $\varphi, \psi \in \Psi, x \in D$ ,则  $(\varphi^{\rightarrow x} \otimes \psi)^{\rightarrow x} = \varphi^{\rightarrow x} \otimes \psi^{\rightarrow x}$ .

(4) 支撑律:若  $\psi \in \Psi$ ,则存在  $x \in D$ ,使得  $\psi^{\rightarrow x} = \psi$ .

(5) 幂等律:若  $\psi \in \Psi, x \in D$ ,则  $\psi \otimes \psi^{\rightarrow x} = \psi$ .

例 2:大写字母  $X, Y, \dots$  表示变量,符号  $\Omega_X$  表示由变量  $X$  的取值构成的有限集合,称为  $X$  的框架.用小写字母  $r$  来表示一个有限变量集.对于一个非空有限变量集  $r$ ,符号  $\Omega_r$  表示集合  $r$  中的所有变量的框架的笛卡尔积,即

$$\Omega_r = \prod_{x \in r} \Omega_x.$$

若  $x \in \Omega_r$  且  $t \subseteq r$ ,用  $x^{\downarrow t}$  表示  $x$  在子域  $t$  上的投影.那么对于任一轮廓  $x \in \Omega_r$ ,可分解为  $x = (x^{\downarrow t}, x^{\downarrow r-t})$ .对于任意的  $C \subseteq \Omega_r$  和  $t \subseteq r, C^{\downarrow t}$  表示  $C$  到  $t$  的投影,即  $C^{\downarrow t} = \{x^{\downarrow t} : x \in C\}$ .令  $\Psi = P(\Omega_r)$ ,其中,  $P(\Omega_r)$  表示  $\Omega_r$  的幂集,取  $D = P(r)$ .在  $(\Psi, D)$  上定义联合运算与聚焦运算如下:

(1) 任取  $C_1, C_2 \in \Psi$ ,定义  $C_1 \otimes C_2 = C_1 \cap C_2$ ,即,  $C_1$  与  $C_2$  的联合是两个集合的交;

(2) 任取  $x \in r, C \in \Psi$ ,定义  $C^{\rightarrow x} = C^{\downarrow x} \times \Omega_{r-x}$ .

易验证,  $(\Psi, D)$  在上述两种运算下构成一个无标记信息代数.

在无标记信息代数中定义关系:  $\varphi \leq \psi$  当且仅当  $\varphi \otimes \psi = \psi$ ,则由文献[19]可知,  $\leq$  是  $(\Psi, D)$  上的一个偏序关系.

## 2 软集中的扩展与转移

本节为了下文讨论方便,在软集中引入扩展与转移的概念,并对它们的性质进行了研究.

对于论域  $U$ ,参数集  $E$  上的一个软集  $(F,A)$ ,如果我们把它的任一子集  $(G,B)$  都视为只关注  $A$  中较小的参数集  $B$  部分的信息,那么有时候为了讨论方便,将  $(F,A)$  扩展到与之有“相等”信息的一个较大的参数集上也是有必要的,由此我们引入下面的概念:

**定义 6.** 设  $(F,A) \in \mathcal{P}^E(U), A \subseteq C$ , 定义  $(F,A)^{\uparrow C} = (H,C)$ , 其中,  $\forall e \in C$ , 若  $e \in A$ , 则  $H(e) = F(e)$ ; 若  $e \in C - A$ , 则  $H(e) = U$ . 称  $(H,C)$  为  $(F,A)$  在  $C$  上的扩展, 简记  $(F,A)^{\uparrow C} = (F^{\uparrow C}, C)$ .

例 3: 在例 1 中, 取  $C = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}, (G,B) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_3, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_3, u_6\})\}$ , 则

$$(G,B)^{\uparrow C} = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_3, U), (e_4, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_3, u_6\})\},$$

$$(G,B)^{\uparrow E} = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_2, U), (e_3, U), (e_4, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_3, u_6\})\}.$$

注 2: 显然, 若  $A \subseteq C$ , 则  $(F,A)^{\uparrow C} \sim_s (F,A)$ .

**命题 2.**  $\forall (F,A), (G,B) \in \mathcal{P}^E(U)$ , 有:

- (1) 若  $A \subseteq B \subseteq C$ , 则  $((F,A)^{\uparrow B})^{\uparrow C} = (F,A)^{\uparrow C}$ ;
- (2)  $\forall C \subseteq E$ , 有  $((F,A)^{\uparrow A \cup C})^{\downarrow C} = ((F,A)^{\downarrow A \cap C})^{\uparrow C}$ ;
- (3) 若  $A \cup B \subseteq C$ , 则  $((F,A) \cap_{\delta} (G,B))^{\uparrow C} = (F,A)^{\uparrow C} \cap_{\delta} (G,B)^{\uparrow C}$ ;
- (4) 若  $C \subseteq A \cap B$ , 则  $((F,A) \cap_{\delta} (G,B))^{\downarrow C} = (F,A)^{\downarrow C} \cap_{\delta} (G,B)^{\downarrow C}$ .

证明:

- (2)  $\forall e \in C$ ,
  - 当  $e \in A \cap C$  时,  $(F^{\uparrow A \cup C})^{\downarrow C}(e) = F^{\uparrow A \cup C}(e) = F(e), (F^{\downarrow A \cap C})^{\uparrow C}(e) = F^{\downarrow A \cap C}(e) = F(e)$ ;
  - 当  $e \in C - A$  时,  $(F^{\uparrow A \cup C})^{\downarrow C}(e) = U = (F^{\downarrow A \cap C})^{\uparrow C}(e)$ , 因此,  $((F,A)^{\uparrow A \cup C})^{\downarrow C} = ((F,A)^{\downarrow A \cap C})^{\uparrow C}$ .
- (3) 令  $(H_1, C) = ((F,A) \cap_{\delta} (G,B))^{\uparrow C}, (H_2, C) = (F,A)^{\uparrow C} \cap_{\delta} (G,B)^{\uparrow C}$ , 则  $\forall e \in C$ ,
  - 当  $\forall e \in A - B$  时,  $H_1(e) = F^{\uparrow C}(e) = F(e), H_2(e) = F(e) \cap G^{\uparrow C}(e) = F(e) \cap U = F(e)$ ;
  - 当  $e \in B - A$  时,  $H_1(e) = G(e), H_2(e) = G(e) \cap U = G(e)$ ;
  - 当  $e \in A \cap B$  时,  $H_1(e) = F(e) \cap G(e), H_2(e) = F^{\uparrow C}(e) \cap G^{\uparrow C}(e) = F(e) \cap G(e)$ ;
  - 当  $e \in C - A \cup B$  时,  $H_1(e) = U, H_2(e) = U \cap U = U$ .

因此,  $((F,A) \cap_{\delta} (G,B))^{\uparrow C} = (F,A)^{\uparrow C} \cap_{\delta} (G,B)^{\uparrow C}$ .

同理可证(4). □

**命题 3.**  $\forall (F,A), (G,B) \in \mathcal{P}^E(U)$ , 且  $(F,A) \sim_s (G,B)$ , 有:

- (1) 若  $C \subseteq A \cap B$ , 则  $(F,A)^{\downarrow C} = (G,B)^{\downarrow C}$ ; 若  $A \cup B \subseteq C$ , 则  $(F,A)^{\uparrow C} = (G,B)^{\uparrow C}$ ;
- (2)  $\forall C \subseteq E, (F,A) \sim_s (G,B)$  当且仅当  $(F,A)^{\uparrow A \cup C} \sim_s (G,B)^{\uparrow B \cup C}$ ;
- (3)  $(F,A) \sim_s (G,B)$  当且仅当  $(F,A)^{\uparrow A \cup B} = (G,B)^{\uparrow A \cup B}$ ;
- (4)  $\forall B, C \subseteq E$ , 则  $((F,A)^{\uparrow A \cup B})^{\downarrow B \cap C} \sim_s (F,A)^{\downarrow A \cap B \cap C}$ .

证明:(1)、(2)易证, 下证(3)、(4).

- (3) 若  $(F,A) \sim_s (G,B)$ , 则由(2)可知  $(F,A)^{\uparrow A \cup B} \sim_s (G,B)^{\uparrow A \cup B}$ , 再由(1)得  $(F,A)^{\uparrow A \cup B} = (G,B)^{\uparrow A \cup B}$ ; 反之, 因为  $(F,A)^{\uparrow A \cup B} = (G,B)^{\uparrow A \cup B}$ , 从而由  $(F,A) \sim_s (F,A)^{\uparrow A \cup B}$  与  $(G,B) \sim_s (G,B)^{\uparrow A \cup B}$  可得  $(F,A) \sim_s (G,B)$ .
- (4) 令  $(H_1, B \cap C) = ((F,A)^{\uparrow A \cup B})^{\downarrow B \cap C}, (H_2, A \cap B \cap C) = (F,A)^{\downarrow A \cap B \cap C}$ , 则  $\forall e \in B \cap C$ :
  - 当  $e \in A \cap B \cap C$  时,  $H_1(e) = F^{\uparrow A \cup B}(e) = F(e), H_2(e) = F^{\downarrow A \cap B \cap C}(e) = F(e)$ , 从而  $H_1(e) = H_2(e)$ ;
  - 当  $e \in B \cap C - A \cap B \cap C$  时, 因为  $e \notin A$ , 因此  $H_1(e) = U$ .

综上, 由软等价的定义可知,  $((F,A)^{\uparrow A \cup B})^{\downarrow B \cap C} \sim_s (F,A)^{\downarrow A \cap B \cap C}$ . □

有时候我们还关注软集  $(F,A)$  在任一参数集  $C$  中的信息, 由此引入如下概念:

**定义 7.** 设  $(F,A) \in \mathcal{P}^E(U), \forall C \subseteq E$ , 定义  $(F,A)^{\rightarrow C} = ((F,A)^{\uparrow A \cup C})^{\downarrow C}$ , 则称  $(F,A)^{\rightarrow C}$  为  $(F,A)$  在  $C$  上的转移.

例 4:在例 3 中,取参数集  $D_1=\{e_1,e_3\},D_2=\{e_2,e_5\}$ ,则

$$\begin{aligned}(G, B)^{\rightarrow D_1} &= \{(e_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_3, U)\}, \\ (G, B)^{\rightarrow D_2} &= \{(e_2, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_3, u_6\})\}, \\ (G, B)^{\rightarrow E} &= \{(e_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_2, U), (e_3, U), (e_4, U), (e_5, \{u_1, u_2, u_3, u_6\})\}.\end{aligned}$$

推论 1.  $\forall (F, A), (G, B) \in \mathcal{P}^E(U)$ :

- (1)  $((F, A) \cap_{\mathcal{E}} (G, B))^{\rightarrow C} = (F, A)^{\rightarrow C} \cap_{\mathcal{E}} (G, B)^{\rightarrow C}$ ;
- (2) 若  $(F, A) \sim_s (G, B)$ , 则  $(F, A)^{\rightarrow C} = (G, B)^{\rightarrow C}$ .

在以下行文中,我们用  $[(F, A)]$  表示  $(F, A)$  关于关系  $\sim_s$  所在的软等价类之集,即,

$$[(F, A)] = \{(G, B) \in \mathcal{P}^E(U) : (G, B) \sim_s (F, A)\}.$$

令  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s = \{[(F, A)] : (F, A) \in \mathcal{P}^E(U)\}$ , 称其为初始论域为  $U$ 、参数集为  $E$  上(关于关系  $\sim_s$ )的商软集的集合.

### 3 商软集与无标记信息代数、紧信息代数

本节在  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s$  中引入联合运算  $\otimes$  与聚焦运算  $\Rightarrow$ , 则在其上得到一个无标记信息代数模型. 由此, 我们可借助该模型对软集中的信息进行处理. 进一步来说, 若参数集  $E$  有限, 命题 6 还给出一个紧信息代数的例子.

命题 4. 在  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s$  中,  $\forall (F, A), (G, B) \in \mathcal{P}^E(U)$  和  $C \subseteq E$ , 定义联合运算  $\otimes$  与聚焦运算  $\Rightarrow$  如下:

$$[(F, A)] \otimes [(G, B)] = [(F, A) \cap_{\mathcal{E}} (G, B)] \tag{1}$$

$$[(F, A)]^{\Rightarrow C} = [(F, A)^{\rightarrow C}] \tag{2}$$

则  $(\mathcal{P}^E(U)/\sim_s, \otimes, \Rightarrow)$  是一个无标记的信息代数.

证明: 由命题 1 及推论 1 可知, 这两个定义是合理的.

(1) 半群律

由  $\cap_{\mathcal{E}}$  的交换律与结合律易得,  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s$  关于联合运算满足交换律与结合律;

又  $\forall [(F, A)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s, [(U, E)] \otimes [(F, A)] = [(U, E) \cap_{\mathcal{E}} (F, A)] = [(F, A)]$ , 则  $[(U, E)]$  是  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s$  中的单位元.

(2) 传递律

若  $\forall [(F, A)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s, B, C \in \mathcal{P}(E)$ , 由命题 2、命题 3 可得:

$$\begin{aligned}((F, A)^{\rightarrow B})^{\rightarrow C} &= (((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B)^{\uparrow B \cup C} \downarrow C) = (((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B \cap C)^{\uparrow C} \\ (F, A)^{\rightarrow B \cap C} &= ((F, A)^{\downarrow A \cap B \cap C})^{\uparrow B \cap C}.\end{aligned}$$

下证  $((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B \cap C)^{\uparrow C} \sim_s ((F, A)^{\downarrow A \cap B \cap C})^{\uparrow B \cap C}$ .

由于  $((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B \cap C) \sim_s (F, A)^{\downarrow A \cap (B \cap C)}$ ,

而  $((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B \cap C)^{\uparrow C} \sim_s ((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B \cap C)^{\uparrow C}, (F, A)^{\downarrow A \cap (B \cap C)} \sim_s ((F, A)^{\downarrow A \cap (B \cap C)})^{\uparrow B \cap C}$ ,

因此,  $((F, A)^{\uparrow A \cup B} \downarrow B \cap C)^{\uparrow C} \sim_s ((F, A)^{\downarrow A \cap (B \cap C)})^{\uparrow B \cap C}$ , 即,  $((F, A)^{\rightarrow B})^{\rightarrow C} \sim_s (F, A)^{\rightarrow B \cap C}, [((F, A)^{\rightarrow B})^{\rightarrow C}] = [(F, A)^{\rightarrow B \cap C}]$ .

因此,  $[((F, A)^{\Rightarrow B})^{\Rightarrow C}] = [(F, A)^{\Rightarrow B \cap C}]$ .

(3) 联合律

$\forall [(F, A)], [(G, B)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s, C \in \mathcal{P}(E)$ , 由推论 1 有:

$$\begin{aligned}([(F, A)]^{\Rightarrow C} \otimes [(G, B)])^{\Rightarrow C} &= [(F, A)^{\rightarrow C} \cap_{\mathcal{E}} (G, B)]^{\Rightarrow C} \\ &= [(F, A)^{\rightarrow C} \cap_{\mathcal{E}} (G, B)^{\rightarrow C}] \\ &= [(F, A)^{\rightarrow C}] \otimes [(G, B)^{\rightarrow C}] \\ &= [(F, A)]^{\Rightarrow C} \otimes [(G, B)]^{\Rightarrow C}.\end{aligned}$$

(4) 支撑律

若  $\forall [(F, A)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s$ , 则,

$$[(F, A)]^{\Rightarrow E} = [(F, A)^{\rightarrow E}] = [((F, A)^{\downarrow (A \cap E)})^{\uparrow E}] = [(F, A)^{\uparrow E}] = [(F, A)].$$

(5) 幂等律

若  $\forall [(F,A)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s, B \in \mathcal{P}(E)$ , 则  $[(F,A)] \otimes [(F,A)]^{\rightarrow B} = [(F,A)] \cap [(F,A)^{\rightarrow B}] = [(F,A) \cap_e (F,A)^{\rightarrow B}]$ . 令  $(H, A \cup B) = (F, A) \cap_e (F, A)^{\rightarrow B} = (F, A) \cap_e (F, A)^{\uparrow(A \cup B) \downarrow B}$ , 则  $\forall e \in A \cup B$ :

- 当  $e \in A - B$  时,  $H(e) = F(e)$ ;
- 当  $e \in B - A$  时,  $H(e) = F^{\uparrow(A \cup B)}(e) = U$ ;
- 当  $e \in A \cap B$  时,  $H(e) = F(e) \cap (F^{\uparrow(A \cup B)})^{\downarrow B}(e) = F(e) \cap F(e) = F(e)$ .

因此,  $(H, A \cup B) \sim_s (F, A)$ , 从而  $[(F,A)] \otimes [(F,A)]^{\rightarrow B} = [(H, A \cup B)] = [(F,A)]$ .

综上所述,  $(\mathcal{P}^E(U)/\sim_s, \otimes, \Rightarrow)$  是一个无标记的信息代数. □

更进一步来说, 如果参数集  $E$  是一个有限集, 则在  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s$  上还可以构造一个紧信息代数的例子.

**定义 8<sup>[1]</sup>**. 一个系统  $(\Psi, \Psi_f, D)$ , 其中,  $(\Psi, D)$  是无标记信息代数, 格  $D$  有最大元,  $\Psi_f \subseteq \Psi$  关于联合运算封闭且  $e \in \Psi_f$  并且满足以下条件, 则称  $(\Psi, \Psi_f, D)$  是一个无标记的紧信息代数:

- (1) 收敛性: 如果  $X \subseteq \Psi_f$  是定向集, 则  $\vee X$  存在;
- (2) 稠密性: 如果  $\varphi \in \Psi$ , 则  $\varphi = \vee \{ \psi \in \Psi_f; \psi \leq \varphi \}$ ;
- (3) 紧性: 如果  $X \subseteq \Psi_f$  是定向集,  $\varphi \in \Psi_f$  且满足  $\varphi \leq \vee X$ , 则存在  $\psi \in X$  使得  $\varphi \leq \psi$ .

**命题 5.** 在  $\mathcal{P}^E(U)/\sim_s$  中, 定义序  $\leq$  是由联合运算诱导的序, 则  $[(F,A)] \leq [(G,B)]$  当且仅当:

$$\forall e \in A \cup B, G^{\uparrow(A \cup B)}(e) \subseteq F^{\uparrow(A \cup B)}(e).$$

证明:

$$\begin{aligned} [(F,A)] \leq [(G,B)] &\Leftrightarrow [(F,A)] \otimes [(G,B)] = [(G,B)] \\ &\Leftrightarrow (F^{\uparrow(A \cup B)}, A \cup B) \cap_e (G^{\uparrow(A \cup B)}, A \cup B) = (G^{\uparrow(A \cup B)}, A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \forall e \in A \cup B, F^{\uparrow(A \cup B)}(e) \cap G^{\uparrow(A \cup B)}(e) = G^{\uparrow(A \cup B)}(e) \\ &\Leftrightarrow \forall e \in A \cup B, G^{\uparrow(A \cup B)}(e) \subseteq F^{\uparrow(A \cup B)}(e). \end{aligned}$$

证毕. □

**推论 2.**  $[(F,A)] \leq [(G,B)]$  当且仅当  $\forall e \in E, G^{\uparrow E}(e) \subseteq F^{\uparrow E}(e)$ .

**引理 1.** 如果  $\Gamma = \{[(F_i, A_i)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s; i \in I\}$ , 则  $\vee \Gamma = [(F, A)]$ , 其中,  $A = \bigcup_{i \in I} A_i, \forall e \in A, F(e) = \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow A}(e)$ .

证明:  $\forall e \in A, F(e) = \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow A}(e) \subseteq F_i^{\uparrow A}(e)$ , 所以  $\forall i \in I$ , 有  $[(F_i, A_i)] \leq [(F, A)]$ ; 另一方面, 若存在  $[(B, B)] \in \mathcal{P}^E(U)/\sim_s$ , 使得  $\forall i \in I$ , 有  $[(F_i, A_i)] \leq [(B, B)]$ , 则  $\forall e \in E$ , 有  $G^{\uparrow E}(e) \subseteq F_i^{\uparrow E}(e)$ , 从而  $G^{\uparrow E}(e) \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow E}(e)$ :

- 当  $\forall e \in A$  时,  $\bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow E}(e) = \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow A}(e) = F(e) = F^{\uparrow E}(e)$ ;
- 当  $e \in E - A$  时,  $\bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow E}(e) = \bigcap_{i \in I} U = U = F^{\uparrow E}(e)$ .

因此,  $G^{\uparrow E}(e) \subseteq F^{\uparrow E}(e)$ , 即,  $[(F, A)] \leq [(B, B)]$ .

综上有  $\vee \Gamma = [(F, A)]$ . □

**命题 6.** 令  $\Psi_f = \{[(F, A)]; [(F, A)] \in \mathcal{P}^E(U), E \text{ 有限}\}$ ,  $\Psi_f = \{[(F, A)] \in \Psi_f; \forall e \in E, U - F^{\uparrow E}(e) \text{ 有限}\}$ , 则  $(\Psi_f, \Psi_f, \mathcal{P}(E))$  是一个无标记的紧信息代数.

证明: 由命题 4 可知:  $(\Psi_f, \mathcal{P}(E))$  是一个无标记的信息代数, 格  $\mathcal{P}(E)$  有最大元  $E$ ; 由  $\Psi_f$  的定义易得  $\Psi_f$  关于联合运算封闭且  $[(U, E)] \in \Psi_f$ ; 又由上引理可知收敛性成立, 下证稠密性与紧性.

(1) 稠密性

设  $[(F, A)] \in \Psi_f$ , 取  $\forall e \in E$ , 存在一组  $U - F^{\uparrow E}(e)$  的有限子集族  $B_i, i \in I(e)$ , 使得  $U - F^{\uparrow E}(e) = \bigcup_{i \in I(e)} B_i$ . 定义  $[(F_i, E)]$  如

下:  $\forall a \in E$ ,

$$F_i(a) = \begin{cases} U - B_i, & a = e \\ U, & a \neq e \end{cases}$$

则 $[(F_i, E)] \in \mathcal{Y}_f$  令  $\Gamma = \bigcup_{e \in E} \{(F_i, E) : i \in I(e)\}$ , 则  $\Gamma \subseteq \mathcal{Y}_f$  此外,  $\forall s \in E$ :

$$\bigcap_{[(F_i, E)] \in \Gamma} F_i(s) = \left( \bigcap_{i \in I(s)} F_i(s) \right) \cap \left( \bigcap_{i \notin I(s)} F_i(s) \right) = \left( \bigcap_{i \in I(s)} F_i(s) \right) \cap U = \bigcap_{i \in I(s)} (U - B_i) = U - \bigcup_{i \in I(s)} B_i = F^{\uparrow E}(s).$$

所以,由上引理有 $\vee \Gamma = [F^{\uparrow E}, E] = [(F, A)]$ , 从而,  $[(F, A)] = \vee \Gamma \leq \vee \{(G, B) \in \mathcal{Y}_f : [(G, B)] \leq [(F, A)]\} \leq [(F, A)]$ , 因此,  $[(F, A)] = \vee \{(G, B) \in \mathcal{Y}_f : [(G, B)] \leq [(F, A)]\}$ .

(2) 紧性

设  $X \subseteq \mathcal{Y}_f$  是定向集,  $[(G, B)] \in \mathcal{Y}_f$  且满足  $[(G, B)] \leq \vee X$ , 令  $X = \{(F_i, A_i) \in \mathcal{Y}_f : i \in I\}$ , 则  $\vee X = [(F, E)]$ , 其中,

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \forall e \in A, F(e) = \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow A}(e).$$

$$F(e) = \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow A}(e) = \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow E}(e) \subseteq G^{\uparrow E}(e), \text{ 从而 } U - G^{\uparrow E}(e) \subseteq U - \bigcap_{i \in I} F_i^{\uparrow E}(e) = \bigcup_{i \in I} (U - F_i^{\uparrow E}(e)),$$

则  $\forall x \in U - G^{\uparrow E}(e)$ , 存在一个  $i(x) \in I$ , 使得  $x \in U - F_{i(x)}^{\uparrow E}(e)$ .

由  $U - G^{\uparrow E}(e)$  的有限性, 得到一个有限子集  $\{U - F_{i(x)}^{\uparrow E}(e) : x \in U - G^{\uparrow E}(e)\}$ , 或者有限子集:

$$\{(F_{i(x)}, A_{i(x)}) : x \in U - G^{\uparrow E}(e)\} \subseteq X.$$

由  $X$  为定向集可知: 存在一个  $i(e) \in I$ , 使得当  $\forall x \in U - G^{\uparrow E}(e)$  时, 有  $[(F_{i(x)}, A_{i(x)})] \leq [(F_{i(e)}, A_{i(e)})]$ .

从而  $\forall a \in E$ , 有  $F_{i(e)}^{\uparrow E}(a) \subseteq F_{i(x)}^{\uparrow E}(a)$ , 即,  $U - F_{i(x)}^{\uparrow E}(a) \subseteq U - F_{i(e)}^{\uparrow E}(a)$ .

因此,  $x \in U - F_{i(e)}^{\uparrow E}(a)$ , 即,  $x \in U - F_{i(e)}(a)$ . 从而,  $U - G^{\uparrow E}(e) \subseteq U - F_{i(e)}(e)$ , 则  $F_{i(e)}(e) \subseteq G^{\uparrow E}(e)$ ,  $[(F_{i(e)}, A_{i(e)})] \leq [(F, A)]$ .

又由  $E$  为有限子集知  $\{(F_{i(e)}, A_{i(e)}) : e \in E\} \subseteq X$  有限, 再由  $X$  为定向集知: 存在一个  $k \in I$ , 使得  $[(F_{i(e)}, A_{i(e)})] \leq [(F_k, A_k)]$ , 因此,  $[(G, B)] \leq [(F_k, A_k)]$ . 证毕.  $\square$

#### 4 基于软集的无标记信息代数的算法与实例

假设有一组对象之集和与之相关的一个属性之集的信息, 我们要在已知的信息中提取出尽可能满足要求的最佳信息. 对于这样的问题, 我们可以借助命题 4 的结论给出一个最佳方案. 算法如下:

Step 1. 信息的划分. 将所有信息  $(F_1, A_1), (F_2, A_2), \dots, (F_n, A_n)$  依据软等价关系分类:

$$[(F_{i_1}, A_{i_1})], [(F_{i_2}, A_{i_2})], \dots, [(F_{i_k}, A_{i_k})],$$

其中,  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .

Step 2. 信息的联合. 将 Step 1 划分后的所有等价类依据公式(1)进行联合运算得  $[(F, A)]$ , 即,

$$[(F, A)] = [(F_{i_1}, A_{i_1})] \otimes [(F_{i_2}, A_{i_2})] \otimes \dots \otimes [(F_{i_k}, A_{i_k})].$$

Step 3. 信息的提取. 依据公式(2)对 Step 2 联合后的信息进行聚焦运算, 提取出局部(所关注的参数集  $C$ )信息, 即, 计算  $[(F, A)]^{\supseteq C}$ .

注 3:

- (1) 如果  $(F_1, A_1) \otimes (F_2, A_2) = (F, \emptyset)$ , 则称  $(F_1, A_1)$  与  $(F_2, A_2)$  是不相容的. 事实上, 在两个不相容的软集中, 讨论决策问题是毫无疑问的, 所以一般假设: 在执行 Step 2 以后,  $(F, A) \neq (F, \emptyset)$ .
- (2) 如果我们只关注对所获取的所有信息的融合而不需要提取其局部信息, 那么对 Step 3, 我们可认为所关注的参数集为  $A$ , 即,  $[(F, A)]^{\supseteq A} = [(F, A)]$ .

下面我们来给出一个例子用以说明上述算法.

例 5: 假设某公司应聘某一职位, 请来自不同领域的 7 位专家作为评委. 现收到 48 份简历, 评委们通过先看简历缩小前来应聘人员的个数. 现在想给出一个在融合 7 位评委意见的基础上, 优先考虑具备条件“有工作经验”、“计算机专业”、“高学历”的应聘者. 那么我们可以通过命题 4 给出一个较好的方案.

假设候选人之集即论域集  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{48}\}$ , 相应的参数集为  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ , 其中,  $e_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  分别表示“有工作经验”、“计算机专业”、“接受过专门培训”、“年轻”、“高学历”、“婚姻状况”和“健康”.

首先,由于每位评委看法不同,给出每位应聘者的意见不尽相同,7位评委对30位应聘者的个人评价信息分别表示如下:

$$\begin{aligned}
 (F_1, A_1) &= \{(e_1, \{u_4, u_7, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{31}, u_{32}, u_{36}, u_{39}, u_{41}, u_{43}\}), \\
 &\quad (e_2, \{u_1, u_3, u_{13}, u_{18}, u_{19}, u_{21}, u_{22}, u_{24}, u_{28}, u_{32}, u_{36}, u_{42}, u_{44}, u_{46}\}), \\
 &\quad (e_4, \{u_2, u_3, u_{13}, u_{15}, u_{18}, u_{23}, u_{25}, u_{28}, u_{30}, u_{33}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{43}\}), \\
 &\quad (e_7, \{u_1, u_5, u_{12}, u_{13}, u_{17}, u_{20}, u_{24}, u_{28}, u_{29}, u_{34}, u_{36}, u_{41}, u_{45}, u_{47}\})\}, \\
 (F_2, A_2) &= \{(e_1, \{u_3, u_4, u_5, u_8, u_{14}, u_{21}, u_{22}, u_{26}, u_{27}, u_{34}, u_{35}, u_{37}, u_{40}, u_{42}, u_{46}\}), \\
 &\quad (e_2, \{u_1, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{21}, u_{29}, u_{30}, u_{32}, u_{36}, u_{42}, u_{43}, u_{45}\}), \\
 &\quad (e_5, \{u_2, u_4, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}, u_{17}, u_{21}, u_{23}, u_{28}, u_{36}, u_{42}, u_{44}\})\}, \\
 (F_3, A_3) &= \{(e_1, \{u_3, u_4, u_5, u_8, u_{14}, u_{21}, u_{22}, u_{26}, u_{27}, u_{34}, u_{35}, u_{37}, u_{40}, u_{42}, u_{46}\}), \\
 &\quad (e_2, \{u_1, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{21}, u_{29}, u_{30}, u_{32}, u_{36}, u_{42}, u_{43}, u_{45}\}), (e_3, U), \\
 &\quad (e_5, \{u_2, u_4, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}, u_{17}, u_{21}, u_{23}, u_{28}, u_{36}, u_{42}, u_{44}\})\}, \\
 (F_4, A_4) &= \{(e_1, \{u_4, u_7, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{31}, u_{32}, u_{36}, u_{39}, u_{41}, u_{43}\}), \\
 &\quad (e_2, \{u_1, u_3, u_{13}, u_{18}, u_{19}, u_{21}, u_{22}, u_{24}, u_{28}, u_{32}, u_{36}, u_{42}, u_{44}, u_{46}\}), \\
 &\quad (e_4, \{u_2, u_3, u_{13}, u_{15}, u_{18}, u_{23}, u_{25}, u_{28}, u_{30}, u_{33}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{43}\}), (e_6, U), \\
 &\quad (e_7, \{u_1, u_5, u_{12}, u_{13}, u_{17}, u_{20}, u_{24}, u_{28}, u_{29}, u_{34}, u_{36}, u_{41}, u_{45}, u_{47}\})\}, \\
 (F_5, A_5) &= \{(e_2, \{u_1, u_2, u_{10}, u_{13}, u_{14}, u_{20}, u_{21}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{33}, u_{36}, u_{42}, u_{44}, u_{45}\}), (e_3, U), \\
 &\quad (e_4, \{u_2, u_5, u_{10}, u_{13}, u_{19}, u_{21}, u_{26}, u_{29}, u_{31}, u_{36}, u_{37}, u_{39}, u_{42}, u_{45}\}), \\
 &\quad (e_5, \{u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{30}, u_{31}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{46}, u_{47}\}), \\
 &\quad (e_7, \{u_2, u_5, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{17}, u_{21}, u_{28}, u_{30}, u_{32}, u_{36}, u_{40}, u_{42}, u_{46}\})\}, \\
 (F_6, A_6) &= \{(e_2, \{u_1, u_2, u_{10}, u_{13}, u_{14}, u_{20}, u_{21}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{33}, u_{36}, u_{42}, u_{44}, u_{45}\}), \\
 &\quad (e_4, \{u_2, u_5, u_{10}, u_{13}, u_{19}, u_{21}, u_{26}, u_{29}, u_{31}, u_{36}, u_{37}, u_{39}, u_{42}, u_{45}\}), \\
 &\quad (e_5, \{u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{30}, u_{31}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{46}, u_{47}\}), (e_6, U), \\
 &\quad (e_7, \{u_2, u_5, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{17}, u_{21}, u_{28}, u_{30}, u_{32}, u_{36}, u_{40}, u_{42}, u_{46}\})\}, \\
 (F_7, A_7) &= \{(e_1, \{u_4, u_7, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{31}, u_{32}, u_{36}, u_{39}, u_{41}, u_{43}\}), \\
 &\quad (e_2, \{u_1, u_3, u_{13}, u_{18}, u_{19}, u_{21}, u_{22}, u_{24}, u_{28}, u_{32}, u_{36}, u_{42}, u_{44}, u_{46}\}), (e_3, U), \\
 &\quad (e_4, \{u_2, u_3, u_{13}, u_{15}, u_{18}, u_{23}, u_{25}, u_{28}, u_{30}, u_{33}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{43}\}), (e_6, U), \\
 &\quad (e_7, \{u_1, u_5, u_{12}, u_{13}, u_{17}, u_{20}, u_{24}, u_{28}, u_{29}, u_{34}, u_{36}, u_{41}, u_{45}, u_{47}\})\}.
 \end{aligned}$$

那么,融合几位评委各自的意见,应用上述算法如下:

Step 1. 信息的划分.根据7位专家给出的信息,依据定义3,将其分类如下:

$$[(F_1, A_1)] = [(F_1, A_1), (F_4, A_4), (F_7, A_7)], [(F_2, A_2)] = [(F_2, A_2), (F_3, A_3)], [(F_5, A_5)] = [(F_5, A_5), (F_6, A_6)].$$

Step 2. 信息的联合.将 Step 1 中的3个等价类进行联合运算得:

$$\bigotimes_{i=1}^{i=7} [(F_i, A_i)] = \bigotimes_{i=1,2,5} [(F_i, A_i)] = \left[ \bigcap_{i=1,2,5} (F_i, A_i) \right] = [(F, A)].$$

其中,  $(F, A) = \{(e_1, \{u_4, u_{21}\}), (e_2, \{u_1, u_{13}, u_{21}, u_{36}, u_{42}\}), (e_4, \{u_2, u_{36}, u_{42}\}), (e_5, \{u_4, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{36}, u_{42}\}), (e_7, \{u_5, u_{13}, u_{28}, u_{36}\})\}$ .

Step 3. 信息的提取.在 Step 2 的基础上,提取出具备优先考虑条件的候选人:

$$[(F, A)]^{\Rightarrow \{e_1, e_2, e_5\}} = [\{(e_1, \{u_4, u_{21}\}), (e_2, \{u_1, u_{13}, u_{21}, u_{36}, u_{42}\}), (e_5, \{u_4, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{36}, u_{42}\})\}].$$

令  $(F', A') = \{(e_1, \{u_4, u_{21}\}), (e_2, \{u_1, u_{13}, u_{21}, u_{36}, u_{42}\}), (e_5, \{u_4, u_{13}, u_{21}, u_{28}, u_{36}, u_{42}\})\}$ , 则  $(F', A')$  见表 2.



**Table 2** Soft set  $(F', A')$

表 2 软集  $(F', A')$

	$u_1$	$u_4$	$u_{13}$	$u_{21}$	$u_{28}$	$u_{36}$	$u_{42}$
$e_1$	0	1	0	1	0	0	0
$e_2$	1	0	1	1	0	1	1
$e_5$	0	1	1	1	1	1	1

由表 2 可知,  $u_{21}$  是最佳考虑人选, 其次是  $u_4, u_{13}, u_{36}, u_{42}$ , 然后是  $u_1$  和  $u_{28}$ .

下面我们将文献[18]中的例 4 用该算法求解, 从而加以比较说明.

例 6: 在例 5 中, 我们选取两位专家作为评委, 即, 例 5 中的评委 1 与评委 2 (此时, 同文献[18]中的例 4). 在融合这两位专家意见的基础上, 给出一个最佳方案:

Step 1. 信息的划分. 根据两位专家给出的信息, 依据定义 3, 将其分类如下:

$$[(F_1, A_1)] = [(F_1, A_1)], [(F_2, A_2)] = [(F_2, A_2)].$$

Step 2. 信息的联合. 将 Step 1 中的两个等价类进行联合运算, 得到:

$$[(F_1, A_1)] \otimes [(F_2, A_2)] = [(F_1, A_1) \cap_e (F_2, A_2)] = [(F, A)],$$

其中,

$$\begin{aligned} (F, A) = & \{(e_1, \{u_4, u_{21}\}), (e_2, \{u_1, u_{13}, u_{21}, u_{36}, u_{42}\}), \\ & (e_4, \{u_2, u_3, u_{13}, u_{15}, u_{18}, u_{23}, u_{25}, u_{28}, u_{30}, u_{33}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{43}\}), \\ & (e_5, \{u_2, u_4, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}, u_{17}, u_{21}, u_{23}, u_{28}, u_{36}, u_{42}, u_{44}\}), \\ & (e_7, \{u_1, u_5, u_{12}, u_{13}, u_{17}, u_{20}, u_{24}, u_{28}, u_{29}, u_{34}, u_{36}, u_{41}, u_{45}, u_{47}\})\}. \end{aligned}$$

Step 3. 信息的提取. 由注 3(2)可知,  $[(F, A)]^{\Rightarrow A} = [(F, A)]$ , 我们将  $(F, A)$  中满足 3 个及以上属性的面试人员相应的软子集  $(F'', A'')$  列出, 见表 3.

**Table 3** Soft set  $(F'', A'')$

表 3 软集  $(F'', A'')$

	$u_{13}$	$u_{21}$	$u_{28}$	$u_{36}$	$u_{42}$
$e_1$	0	1	0	0	0
$e_2$	1	1	0	1	1
$e_4$	1	0	1	1	1
$e_5$	1	1	1	1	1
$e_7$	1	0	1	1	0

由表 3 可知,  $u_{13}$  与  $u_{36}$  是最佳考虑人选, 其次是  $u_{21}, u_{28}, u_{42}$ .

由上述结果可知, 该算法结果显然优于文献[18]中的算法. 比如对于  $u_{28}$  和  $u_{36}$ ,  $u_{36}$  比  $u_{28}$  应优先考虑. 事实上, 我们对两位专家最初的信息分析可得: 当不考虑属性  $e_1$  与  $e_2$  时, 融合两位专家的意见,  $u_{28}$  和  $u_{36}$  都具有 3 个属性, 可认为其能力是对等的. 而对于属性  $e_1$  与  $e_2$ , 一位专家认为  $u_{36}$  具有属性  $e_1$ , 两位专家认为  $u_{36}$  具有属性  $e_2$ , 但是对于  $u_{28}$ , 都只有一位专家认为其具有属性  $e_1$  与  $e_2$ , 因此,  $u_{36}$  比  $u_{28}$  较为优秀, 应该优先考虑, 但文献[18]中的算法并未体现出这一点.

下面的例子表明: 当文献[18]中的算法在失效的情形下, 本文中的算法依然是行之有效的.

例 7: 假设某公司应聘某一职位, 现收到 7 份简历, 请来自不同领域的 2 位专家作为评委. 参数集同例 5, 论域集  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_7\}$ . 由于每位评委看法不同, 两位评委考虑的参数集不尽相同, 其意见分别如下:

$$\begin{aligned} (F_1, A_1) = & \{(e_2, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_1, u_3\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_5\})\}, \\ (F_2, A_2) = & \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_1, u_3, u_4\}), (e_5, \{u_2, u_3, u_4, u_5\})\}. \end{aligned}$$

现在给出一个尽可能使两位专家满意的较好的方案.

如果运用文献[18]中的算法, 我们令  $S = (F_1, A_1), T = (F_2, A_2)$ , 则计算得出:

$$uni-int(S \wedge T) = uni_x int_y (S \wedge T) \cup uni_y int_x (S \wedge T) = \emptyset.$$

这使得无法做出最优决策. 此时, 文献[18]中的算法失效. 而我们运用本文中的算法, 求解如下:

Step 1. 信息的划分. 根据 2 位专家给出的信息, 依据定义 3, 将其分类如下:

$$[(F_1, A_1)] = [\{(e_2, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_1, u_3\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_5\})\}],$$

$$[(F_2, A_2)] = [\{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_1, u_3, u_4\}), (e_5, \{u_2, u_3, u_4, u_5\})\}].$$

Step 2. 信息的联合. 将 Step 1 中的两个等价类进行联合运算得:

$$[(F_1, A_1)] \otimes [(F_2, A_2)] = [(F_1, A_1) \cap_e (F_2, A_2)] = [(F, A)].$$

其中,  $(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_1, u_3\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_5, \{u_2, u_3, u_4, u_5\})\}$ .

Step 3. 信息的提取.  $[(F, A)]^{\neg A} = [(F, A)]$ , 其中,  $(F, A)$  见表 4.

Table 4 Soft set  $(F, A)$

表 4 软集  $(F, A)$

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$
$e_1$	1	1	0	0	0	0	0
$e_2$	0	1	1	1	1	0	0
$e_3$	1	0	1	0	0	0	0
$e_4$	1	1	0	0	1	0	0
$e_5$	0	1	1	1	1	0	0

由表 4 可知,  $u_2$  是最佳考虑人选, 其次是  $u_1, u_2, u_3$ , 再是  $u_4$ , 最后考虑  $u_6$  和  $u_7$ .

## 5 结束语

软集在不确定决策方面的研究, 是目前软集在应用研究中最活跃的方向之一. 本文通过在软集中引入转移运算与扩展运算, 讨论了软集理论与无标记信息代数之间的联系, 从而将无标记信息代数的模型用于处理软集理论中的决策问题. 最后给出对应算法, 并举出实例予以说明.

本文提出的无标记信息代数模型的算法与以往算法比较, 优点在于:

- 首先是将所有信息分类, 然后对分类后的信息进行融合或提取, 这使得我们在处理信息时, 计算量得到很大的降低, 也正好使我们在前面提出的想法得以实现;
- 其次, 在对分类后的信息进行联合后, 所对应的参数集不会为空(除去被联合软集不相容的情形, 见注 3(1)), 这使得该算法是可行和有效的, 避免了文献[18]中算法失效的情形(例 7);
- 最后, 局部计算是信息代数应用的核心之一, 因此, 利用聚焦运算可使得在所有信息中提取出所关注的部分, 从而获得局部(我们所关注的)信息. 因此, 我们可以借助无标记信息代数的模型解决软集中的一些决策问题, 从而得到最优决策方案, 提高决策效率.

另外, 在实际生活中, 我们有时候对某一事物是否具备某种属性是不完全确定的, 也就是说, 对某一事物的描述是一个模糊软集. 那么在这种情形下, 本文中的算法是否还有效呢? 如果不是, 又如何做一修改与完善呢? 这个问题我们将另文加以讨论.

## References:

- [1] Molodtsov D. Soft set theory-first results. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4):19-31. [doi: 10.1016/S0898-1221(99)00056-5]
- [2] Ahmad B, Kharal A. On fuzzy soft sets. In: Proc. of the Advances in Fuzzy Systems. 2009. 1-6. [doi: 10.1155/2009/586507]
- [3] Maji PK, Biswas R, Roy AR. Intuitionistic fuzzy soft sets. Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3):677-691.
- [4] Majumdar P, Samanta SK. Generalised fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(4):1425-1432. [doi: 10.1016/j.camwa.2009.12.006]
- [5] Cagman N, Citak F, Enginoglu S. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 2010, 1(1):21-35.
- [6] Ali MI, Feng F, Liu XY, Min WK, Shabir M. On some new operations in soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(9):1547-1553. [doi: 10.1016/j.camwa.2008.11.009]
- [7] Qin KY, Hong ZY. On soft equality. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 234:1347-1355. [doi: 10.1016/j.cam.2010.02.028]

- [8] Sezgin A, Atagun AO. Soft groups and normalistic soft groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011,62:685–698. [doi: 10.1016/j.camwa.2011.05.050]
- [9] Acar U, Koyuncu F, Tanay B. Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010,59(11):3458–3463. [doi: 10.1016/j.camwa.2010.03.034]
- [10] Jun YB. Soft BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008,56(5):1408–1413. [doi: 10.1016/j.camwa.2008.02.035]
- [11] Feng F. The fusion study on uncertain theory based on soft set [Ph.D. Thesis]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2011 (in Chinese with English abstract).
- [12] Maji PK, Roy AR, Biswas R. An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 2002,44(8):1077–1083. [doi: 10.1016/S0898-1221(02)00216-X]
- [13] Roy AR, Maji PK. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007,203(2):412–418. [doi: 10.1016/j.cam.2006.04.008]
- [14] Kong Z, Gao L, Wang L. Comment on “A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009,223(2):540–542. [doi: 10.1016/j.cam.2008.01.011]
- [15] Feng F, Jun YB, Liu XY, Li LF. An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010,234:10–20. [doi: 10.1016/j.cam.2009.11.055]
- [16] Feng F, Li YM, Leoreanu-Fotea V. Application of level soft sets in decision making based on interval-valued fuzzy soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010,60(6):1756–1767. [doi: 10.1016/j.camwa.2010.07.006]
- [17] Cagman N, Enginoglu S. Soft matrix theory and its decision making. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010,59(10):3308–3314. [doi: 10.1016/j.camwa.2010.03.015]
- [18] Cagman N, Enginoglu S. Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 2010,207(2):848–855. [doi: 10.1016/j.ejor.2010.05.004]
- [19] Kohlas J. *Information Algebras: Generic Structures for Inference*. Springer-Verlag, 2003. [doi: 10.1007/978-1-4471-0009-6]
- [20] Kohlas J. *Lecture notes on the algebraic theory of information*. 2010. <http://diuf.unifr.ch/drupal/tns/sites/diuf.unifr.ch.drupaltns/files/file/kohlas/main.pdf>
- [21] Pouly M. A generic architecture for local computation [MS. Thesis]. Fribourg: Department of Informatics, University of Fribourg, 2004.
- [22] Pouly M. A generic framework for local computation [Ph.D. Thesis]. Fribourg: Department of Informatics, University of Fribourg, 2008.
- [23] Guan XC, Li YM, Feng F. A new order relation on fuzzy soft sets and its application. *Soft Computing*, 2013,17(1):63–70. [doi: 10.1007/s00500-012-0903-8]
- [24] Guan XC. The study of some questions about valuation algebra [Ph.D. Thesis]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2011 (in Chinese with English abstract).

#### 附中文参考文献:

- [11] 冯峰. 基于软集的不确定理论融合研究[博士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2012.
- [24] 管雪冲. 赋值代数中若干问题的研究[博士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2011.



许格妮(1978—),女,陕西乾县人,博士生,讲师,主要研究领域为信息代数,不确定推理.



管雪冲(1976—),男,博士,讲师,主要研究领域为计算智能,域理论.



李永明(1966—),男,博士,教授,CCF 高级会员,主要研究领域为计算智能,模糊系统分析,量子逻辑,量子分析.