

## 传感网中的四锚点节点定位实解个数分析\*

姬靖<sup>1,2</sup>, 刘桂雄<sup>2</sup>, 郁文生<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(广东工业大学 信息工程学院, 广东 广州 510006)

<sup>2</sup>(华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640)

<sup>3</sup>(上海高可信计算重点实验室(华东师范大学), 上海 200062)

通讯作者: 姬靖, E-mail: jijing@gdut.edu.cn

**摘要:** 针对物联网感知层调度问题, 研究和分析三维空间基于四锚点节点定位实解个数的分类问题. 利用不等式机器证明理论和研究成果以及不等式机器证明软件 DISCOVERER, 分析了四锚点定位在特定情形下的实解分类判别问题. 首先给出定位问题的数学描述, 将传统定位方法中存在的非线性方程组转化为不等式约束的多项式方程组; 然后, 利用不等式机器证明理论和工具初步探讨了方程组在部分参数固定情况下的解的分类, 给出了这种情况下的解的完全分布. 分析结果表明: 空间四锚点定位存在多解问题, 给出的多解分类判别条件对实际应用具有指导作用, 对提高节点布局和精确信息感知具有参考价值.

**关键词:** 传感网; 四锚点; 节点定位; 实解个数

**中图法分类号:** TP393

中文引用格式: 姬靖, 刘桂雄, 郁文生. 传感网中的四锚点节点定位实解个数分析. 软件学报, 2014, 25(11): 2627-2635. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4544.htm>

英文引用格式: Ji J, Liu GX, Yu WS. Analysis of real solutions number by four-anchor node localization for sensor networks. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014, 25(11): 2627-2635 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4544.htm>

### Analysis of Real Solutions Number by Four-Anchor Node Localization for Sensor Networks

Ji Jing<sup>1,2</sup>, LIU Gui-Xiong<sup>2</sup>, YU Wen-Sheng<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(School of Information Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

<sup>2</sup>(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

<sup>3</sup>(Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing (East China Normal University), Shanghai 200062, China)

Corresponding author: Ji Jing, E-mail: jijing@gdut.edu.cn

**Abstract:** This paper studies perception layer scheduling problem for Internet of Things. In particular, it conducts research and analysis to real solution classification of three-dimensional space four-anchor node localization problem. By employing inequality proving theory and the corresponding inequality proving analysis software DISCOVERER, the classification result of specific four-anchor localization is derived. The mathematical description of location problem is given at first and the nonlinear equations arising from traditional method are transformed into polynomial equations with inequality constraints. Inequality proving theory and tools are then used to explore the solution classification with some parameters fixed to give the complete distribution of solutions in this case. The solution classification criterion has important guiding role in practical applications and also can improve the performance of node layout and precise information perception.

**Key words:** sensor network; four-anchor; node localization; real solution number

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61370176, 61070048, 61021004); 国家高技术研究发展计划(863)(2011AA010101); 广东省高层次人才项目(粤教师函[2010]79); 广东省科技攻关项目(2009B010900045); 粤港关键领域重点项目(2012A090200005)

收稿时间: 2013-04-30; 修改时间: 2013-09-29; 定稿时间: 2013-12-05

作为一种新的信息获取和处理技术,物联网技术和无线传感器网络具有广泛的应用前景.物联网感知层行为受能量、网络资源、时间等各种约束的影响,引入调度方法是保障系统有序、可靠、快速运行具有重要意义.对于感知层网络调度来说,节点的位置信息精确估计和计算是确保精确调度的前提条件.传感器节点的位置信息具有非常重要的意义,定位技术也是 WSN(wireless sensor network)的关键支撑技术之一.如果位置信息估计错误,调度则会受到严重影响.国内外研究人员对定位技术进行了大量的研究,无线传感器网络定位根据定位机制分为两大类<sup>[1]</sup>:基于测距的定位和基于非测距的定位.基于测距的算法一般包含两个步骤:首先测量距离或角度信息,然后利用这些信息计算未知节点坐标.测距方法主要包括:基于时间的测量方法(如 TOA(time of arrival)和 TDOA(time difference of arrival))、基于信号角度的测量方法、基于信号接收强度的 RSSI(received signal strength indicator)方法等<sup>[1-3]</sup>.目前,RSSI 方法的研究较多.节点计算方法主要包括三边测量法、三角测量法、极大似然估计法、极小极大定位算法等.这类方法在获得较为精确定位结果的同时,产生了大量的计算和通信开销,对传感器节点的能量是极大的考验.另外,基于距离的定位模型存在误差累加问题.非测距的定位方法主要利用网络的连通性来估计节点的位置,其主要优点是成本低、能效低,无需借助其他硬件,但定位精度低是这类方法的主要缺点.目前,这类定位算法主要包括质心算法、凸规划法、SPA(self-positioning algorithm)算法、APIT(approximate point in triangle)算法、APS(ad-hoc positioning systems)算法、Amorphous 算法等<sup>[1-3]</sup>.

定位算法应当尽量降低计算复杂度和通信数据量,以节省能量,延长网络寿命.从用户角度来看,必须明确知道传感器节点的位置才可以为用户提供有用信息,实现对目标的定位和跟踪.传统的 GPS 接收器定位精度高,但价格昂贵<sup>[2]</sup>.锚点数量多虽然可以提高定位精度,但是消耗了宝贵的资源.因此,通过较少锚节点(anchor node)获得节点精确的位置信息是人们所希望的.锚点数量少有助于降低成本.基于锚点的定位方法通常至少需要 3 个锚点或 4 个锚点才可以实现定位.目前,关于节点定位技术的研究主要针对二维平面分布的传感器网络,考虑三维空间节点定位方法的研究和成果较少,近几年,三维无线传感器网络定位才成为研究的热点.在二维平面,要想得到一个节点的位置信息必须知道该节点与相邻 3 个锚节点之间的距离,也就是说,最少需要 3 个不重叠的锚节点.同样,在三维空间中,确定一个未知节点的位置至少需要 4 个锚节点.对于三维空间节点定位来说,会存在多解问题,因此有必要对三维空间节点定位实解个数问题进行分析和研究,得到其实解个数的分类判别条件,从而保证结果的正确性和精确性.

空间四锚点节点定位问题与计算机视觉中的经典问题 P4P(perspective-4-point)问题的共同点是都存在多解问题,需要对实解个数分类判别问题进行研究,得到分类判别条件.两者在已知信息上略有不同,在无线传感器网络中,锚点是信标节点,通过未知节点与锚点的相对信息测量来计算未知节点信息;PnP(perspective- $n$ -point)问题则利用空间特征点与像点的对应关系求解摄像机参数信息.对于 PnP 问题来说,当  $n=1,2$  时约束条件太少,存在无穷多个解,没有分析意义.当  $n>5$  时,如果特征点的分布为一般情况(即  $n$  个点不共面),那么 PnP 问题将存在唯一的解并可线性求解.当  $3 \leq n \leq 5$  时,PnP 问题具有多解,而且具有非线性特点,如没有其他信息可以利用,则不可线性求解.从目前的研究来看,P3P 问题<sup>[4]</sup>解的完整分类判别已经给出.对于 P4P 问题,早在 1989 年,Horaud 等人<sup>[5]</sup>就指出:当空间 4 点不在同一平面上时,P4P 问题可以转化为求解一个双二次一元四次方程的问题;当 4 个空间点在同一平面时,解是唯一的,而当 4 个空间点不共面时,则可能出现多个解.胡占义等人<sup>[6]</sup>则证明了 P4P 问题最多有 5 个解,并给出了达到该上界的实例.目前,P4P<sup>[6]</sup>和 P5P<sup>[7]</sup>问题由于参数太多,还没有相关研究给出其解的完整分类判别.

本文主要针对四锚点节点定位多解问题进行研究,考虑采用 4 点快速精确的定位方法.借助不等式机器证明理论和 DISCOVERER 软件包对四锚点定位实解个数分类判别问题进行了深入研究,并给出特定情形下解的完全分类判别条件.研究的目的是将新研究成果引入物联网感知层调度优化问题研究中,提高其实际应用价值.

本文首先介绍基于不等式机器证明理论多解问题分析相关理论和方法.然后给出四锚点定位问题的简化描述,并利用 DISCOVERER 软件包对特定情况下的四锚点定位问题进行分析.最后给出分析结果.

## 1 不等式机器证明理论应用

物联网感知层包含的节点数量巨大,是一个开放的复杂智能系统系统,目前,其应用遇到了严峻的挑战.人工智能(AI)与智能信息处理技术的迅速发展带来了新的机遇,其中,符号计算、逻辑推理与定理证明是人工智能技术中的一项重要研究内容,已在许多领域得到应用.其中,不等式机器证明(automated inequality proving,简称AIP)理论<sup>[8]</sup>一直是数学机械化、自动推理及智能信息系统领域的研究热点,近年来取得了长足的发展,已有专著出版.定理证明是指通过模仿人的推理和演绎过程,从最基本的公理出发证明定理的正确性,它是数学机械化研究的一个重要内容.吴文俊院士在 1977 年提出的初等几何定理机器判定方法(简称吴方法)是这一领域的重大突破,开创了数学机械化领域的研究.而“数学机械化纲领”的一个重要内容就是:将数学机械化方法用于解决相关高科技领域的关键基础理论问题.吴方法主要是针对等式型命题的判定,其成功极大地推动了机器证明代数方法的研究.对不等式机器证明的研究则进展缓慢,其主要原因是:不等式型定理的机器证明算法依赖于实代数和实几何的自动推理,计算复杂度会随着参数维数的增加而快速增加,所以一直是自动推理领域中的研究难点.但是在 1996 年,杨路等人建立的多项式完全判别系统(complete discrimination system for polynomials,简称CDS)<sup>[9,10]</sup>为实代数自动推理提供了有效的工具,使不等式机器证明的成果得以普遍接受并付诸实际应用.其后,杨路及其团队在 Maple 下编制了通用程序 BOTTEMA<sup>[8]</sup>和 DISCOVERER 软件包<sup>[8,11,12]</sup>,利用多项式的判别序列、吴方法和部分的柱形代数分解算法,给出了对一大类不等式型定理完备、能够自动发现不等式的实用算法.这些软件包具有很强的实用性,例如,通用程序 BOTTEMA 已成功验证了包含上百个公开问题的上千个代数与几何不等式,在普通计算机上,只需很短的时间就可以证明大量的基本几何不等式定理.

基于不等式机器证明理论 AIP 的方法已经在许多领域中得到了应用:在计算机视觉领域,高小山<sup>[4]</sup>利用机器证明理论与方法给出了计算机视觉中经典的 P3P 问题解的完全分类;在线性系统控制领域,关强等人<sup>[13]</sup>借助不等式型定理机器证明理论研究和解决线性系统同时镇定问题中著名的比利时巧克力问题和法国香槟问题取得了一系列的结果;杨克虎等人<sup>[14]</sup>利用不等式机器证明理论研究和解决了电力电子领域里特定消谐脉宽调制技术中开关角度非线性超越方程组的实解个数问题.基于此,我们利用 AIP 理论研究和分析物联网感知层调度中四锚点未知节点的定位问题中实解个数的分类判别.首先介绍不等式机器证明理论相关的基础知识和研究成果.

## 2 四锚点定位多解问题分析

### 2.1 零点分解方法

Wu-Ritt 零点分解方法是解代数方程组的一般方法.它可以用下面三角化的形式来表示多项式组的零点集:

$$\begin{cases} f_1(u, x_1) = 0 \\ f_2(u, x_1, x_2) = 0 \\ \dots \\ f_p(u, x_1, \dots, x_p) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u$  表示一个参数集合, $x$  表示有待确定的变元.例如,文献[2]对计算机视觉中的 P3P 问题考虑  $Zero(ES/I_0)$ ,然后利用 Wu-Ritt 零点分解方法对其进行分解,可以得到 10 个组成部分:

$$Zero(ES/I_0) = \bigcup_{i=1}^{10} C_i \quad (2)$$

其中, $C_i = Zero(TS_i/T_i), i=1, \dots, 9; C_{10} = Zero(TS_{10}/T_{10}) \cup Zero(TS_{11}/T_{11})$ .

在这 10 个组成部分中, $Zero(TS_1/T_1)$  是主要成分,它具有如下形式:

$$\begin{cases} f = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \\ g = b_0y - b_1 \end{cases} \quad (3)$$

所有其他组成部分可以认为是这种形式的蜕化情形.与主要成分相比,蜕化情形发生的概率要小很多,但仍

然十分重要.比如,当控制点 $\angle ACB$ 是直角时,该情况就会经常发生.有关零点分解方法解决 P3P 问题的具体过程可以参考文献[4],这里不再赘述,主要看如何利用不等式机器证明工具来讨论四锚点定位问题解的分类情况.

## 2.2 半代数系统理论和DISCOVERER软件包

利用不等式机器证明理论来分析四锚点定位问题,由于四锚点定位问题中参数过多,对方程系统直接进行三角化解获得特征列的方法不可行.我们只能固定其中的一些参数,在运算可行的情况下实现解的分类.这对实际应用具有一定的指导意义.此内容涉及半代数系统及相关理论,因此首先给出简要回顾:所谓半代数系统(semi-algebraic system),就是指由多项式方程组与多项式不等式组构成的系统,形式为

$$\begin{cases} p_1(u, x) = 0, \dots, p_r(u, x) = 0 \\ g_1(u, x) \geq 0, \dots, g_k(u, x) \geq 0 \\ g_{k+1}(u, x) > 0, \dots, g_l(u, x) > 0 \\ h_1(u, x) \neq 0, \dots, h_m(u, x) \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

这里, $u=(u_1, \dots, u_d)$ 表示参数为实数, $x=(x_1, \dots, x_n)$ 表示变元, $l \geq k \geq 0, m \geq 0$ .对于这种含参数的半代数系统,需要解决的问题是:参数满足什么条件时系统有实解?参数满足什么条件时系统有正维数解?实解的维数和参数满足什么条件时系统有指定数目(不计重数)的实解,等等.对这些问题的解答,就是原系统的实解分类.1977年,吴文俊提出的初等几何定理机器判定方法是这一领域的重大突破.1996年,杨路等人<sup>[9,10]</sup>建立的多项式完全判别系统为自动推理提供了有效的工具.杨路等人利用多项式的判别序列、吴方法及部分的柱形代数分解算法,给出了能够自动发现不等式的实用算法.这些算法对一大类不等式型定理是完备的,并在 Maple 下编制了通用程序包 DISCOVERER 和 BOTTEMA,具有很强的实用性.

下面对 DISCOVERER 程序包进行简单介绍.1996年,曾振炳在杨路等人提出的多项式判别系统的基础上开发了一个 Maple 软件包——INVENTOR,它能用于产生参数半代数系统存在实解的必要条件,但没有使用多项式判别式序列和判别系统.1997年,杨路、夏壁灿在 INVENTOR 的基础上开发了一个研究半代数系统实解的新软件包——DISCOVERER<sup>[8,11,12]</sup>,开始了半代数系统求解算法的研究.自2008年起,DISCOVERER 已集成到 Maple 工具箱中,成为求解半代数系统的主要工具之一,在自动求解参数半代数系统实解分类问题上具有优势. DISCOVERER 工具的主要功能包括:参数半代数系统的实解分类,常系数半代数系统的实解隔离,常系数半代数系统的实解计数,多项式的判别式序列、负根判别式序列、广义判别式序列,相对单纯分解算法,部分的柱形代数分解算法(PCAD)等<sup>[8]</sup>.

不等式的自动发现算法与程序包 DISCOVERER 是杨路、夏壁灿等人开发的一个 Maple 软件包,它实现了参数半代数系统实解分类(3种情况)、常系数半代数系统实根隔离等算法. DISCOVERER 主要包含 tofind 和 Tofind 两个程序,完成发现和证明不等式型定理的功能.通常,我们先调用 tofind 来发现一个“足够满意”的条件,然后,如果需要,则再调用 Tofind 来处理参数取值于边界的情况.对形如公式(4)的参数半代数系统, tofind 的调用方式如下:

$$\text{tofind}([p_1, \dots, p_r], [g_1, \dots, g_k][g_{k+1}, \dots, g_l], [h_1, \dots, h_m], [x_1, \dots, x_n], [u_1, \dots, u_d], \alpha) \quad (5)$$

其中, $\alpha$ 可以有以下3种输入:

- (1) 一个非负整数  $b$ , 求系统恰有  $b$  个互异实解的条件;
- (2) 一个范围  $b..c$  ( $b, c$  是非负实数且  $b < c$ ), 求系统的互异实解数目介于  $b$  和  $c$  之间的条件;
- (3) 一个范围  $b..w$  ( $b$  是一个非负整数,  $w$  是一个没有值的名称), 求系统的互异实解数目不少于  $b$  的条件.

对系统  $T$  和一些边界条件  $R_1=0, \dots, R_l=0$  (通常由调用 tofind 获得), Tofind 有类似的调用方式:

$$\text{Tofind}([p_1, \dots, p_r, R_1, \dots, R_l], [g_1, \dots, g_k][g_{k+1}, \dots, g_l], [h_1, \dots, h_m], [x_1, \dots, x_n], [u_1, \dots, u_d], \alpha),$$

其中,  $R_i$  可以是 tofind 得到的某个参数多项式,而  $\alpha$  同样可以有以上3种输入.

## 2.3 物联网感知调度中四锚点定位问题描述

首先,为了便于表示,我们对四锚点定位问题重新进行推导和简化,得到系统方程.如图1所示,4个锚点分别

为(A,B,C,D),未知为 O,距离未知量:

$$(X,Y,Z,W)=(|OA|,|OB|,|OC|,|OD|).$$

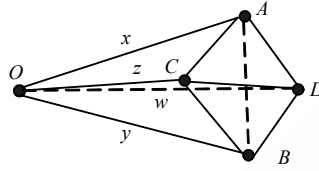


Fig.1 Illustration of four-anchor localization problem

图 1 四锚点定位问题示意图

利用余弦定理,我们可以得到定位问题的 6 个约束方程:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 - 2 \cos \alpha_{AOB} \cdot XY = |AB|^2 \\ X^2 + Z^2 - 2 \cos \alpha_{AOC} \cdot XZ = |AC|^2 \\ X^2 + W^2 - 2 \cos \alpha_{AOD} \cdot XW = |AD|^2 \\ Y^2 + Z^2 - 2 \cos \alpha_{BOC} \cdot YZ = |BC|^2 \\ Y^2 + W^2 - 2 \cos \alpha_{BOD} \cdot YW = |BD|^2 \\ Z^2 + W^2 - 2 \cos \alpha_{COD} \cdot ZW = |CD|^2 \end{cases} \quad (6)$$

令夹角的余弦值分别为

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \cos \alpha_{AOB}, r_2 = 2 \cos \alpha_{AOC}, r_3 = 2 \cos \alpha_{AOD}, \\ r_4 &= 2 \cos \alpha_{BOC}, r_5 = 2 \cos \alpha_{BOD}, r_6 = 2 \cos \alpha_{COD}. \end{aligned}$$

不失一般性,其他的边长都用  $W=|OD|$ 来表示,则

$$\begin{aligned} X &= xW, Y = yW, Z = zW, \\ |AB| &= \sqrt{v}W, |AC| = \sqrt{a} |AB|, |AD| = \sqrt{b} |AB|, \\ |BC| &= \sqrt{c} |AB|, |BD| = \sqrt{d} |AB|, |CD| = \sqrt{e} |AB|. \end{aligned}$$

将上述表示代入方程组,得到:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - r_1 \cdot xy = v \\ x^2 + z^2 - r_2 \cdot xz = av \\ x^2 + 1 - r_3 \cdot x = bv \\ y^2 + z^2 - r_4 \cdot yz = cv \\ y^2 + 1 - r_5 \cdot y = dv \\ z^2 + 1 - r_6 \cdot z = ev \end{cases} \quad (7)$$

将公式(7)中的第 1 个方程  $v=x^2+y^2-r_1 \cdot xy$  代入其他方程,得到:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - r_2 \cdot xz = a(x^2 + y^2 - r_1 \cdot xy) \\ x^2 + 1 - r_3 \cdot x = b(x^2 + y^2 - r_1 \cdot xy) \\ y^2 + z^2 - r_4 \cdot yz = c(x^2 + y^2 - r_1 \cdot xy) \\ y^2 + 1 - r_5 \cdot y = d(x^2 + y^2 - r_1 \cdot xy) \\ z^2 + 1 - r_6 \cdot z = e(x^2 + y^2 - r_1 \cdot xy) \end{cases} \quad (8)$$

化简得到:

$$\begin{cases} (1-a)x^2 - ay^2 + z^2 + ar_1xy - r_2xz = 0 \\ (1-b)x^2 - by^2 + br_1xy - r_3x + 1 = 0 \\ -cx^2 + (1-c)y^2 + z^2 + cr_1xy - r_4yz = 0 \\ -dx^2 + (1-d)y^2 + dr_1xy - r_5y + 1 = 0 \\ -ex^2 - ey^2 + z^2 + er_1xy - r_6z + 1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

这就是所要求解的四锚点定位问题系统方程组.化简后的方程组与原方程组具有相同的解,待求解的变量为  $x, y, z$ .与  $A, B, C, D$  四点位置有关的参数有 5 个,与顶角有关的参数有 6 个,这些参数将决定锚点与未知节点的配置物理意义.物理条件:  $-2 < r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 < 2$ , 6 条底边长度和控制长度都大于 0;底边三角形的两边之和大于第三边;顶角范围在  $[0, \pi]$  之间,且两顶角之和大于另外一个顶角;未知节点与任意的 3 个锚点不共面,4 个控制点不共面.

化简后的方程系统共有 11 个参数,未知变量有 3 个,因此,方程的个数多于变量的个数.得到的多项式方程组是超约束方程组,由于参数过多,因此它的特征列很难求得.因此,下面就特定的四锚点定位问题进行分析.方程组有 5 个方程,未知量只有 3 个,为超约束方程组,直接对该超越方程组进行零点分解几乎是不可能的,可以利用序列的计算方法给出判定条件.但是由于变量太多,计算量太大,使得分析没有可行性.因此,这里考虑固定部分参数,选择特定情况进行研究.这里先给出一个多解的几何形式的相关命题,实际上是几个特例:

**命题 1.** 给定空间不共面的 4 个锚点,给定如下条件:

- (a) 4 条射线中任意一条垂直于另外 3 个锚点所在的平面;
- (b)  $OD$  垂直于  $ABC$  所在的平面,垂足为  $E$ ;
- (c)  $E$  是三角形  $ABC$  中角  $A$  平分线上的点并且  $AB=AC$ ;
- (d)  $AB=AC=BC$ .

于是,有如下情形:

- 如果只有条件(a)满足,则定位问题至少有 2 个正解;
- 如果条件(a)、条件(b)都满足,则至少有 3 个正解;
- 如果条件(a)、条件(b)、条件(c)都满足,则至少有 4 个正解;
- 如果条件(a)、条件(b)、条件(c)、条件(d)都满足,则至少有 5 个正解.

事实上,当某些参数固定时,系统方程组中的部分等式是可以合并的,避免了非超越方程组的求解.从实际的运算来看,这些情况在 `tofind` 命令下的运算是可行的.我们在运算可行的情况下研究和分析了特殊情况下的一个四锚点定位问题,给出了解的分类条件.

#### 2.4 实解个数分析结果

虽然理论上空间四锚点定位实解个数的分类判别是完备的,但从目前的实际计算情况来看,要想用 `DISCOVERER` 工具箱对所有情况下四锚点定位实解个数给出完整的分类是非常困难的,因此,我们研究的是部分参数满足一定限制条件下的实解分类问题.这些部分参数限制下的几何分布情况在实际固定式锚点部署中经常遇到,所以条件在实际中容易满足,具有实际意义.比如,在室内采用固定部署策略下的锚点为了不占用空间,一般会均匀地分布在房间的墙角或角落里,此时,部分锚点之间的距离相等,部分锚点连线所构成的夹角也相等,方程中部分参数可以合并,数量变少,`DISCOVERER` 软件包能够对其进行处理,快速得到分类判别结果.同时,这些情况也往往是多解存在最多的情况,需要给出详细的分类判别条件.

下面看一个实解个数分类比较复杂的情况,并对该情况给出完整的实解个数分类.事实上,由于在上面的化简过程中消去了变量  $|OD|$ ,所以在讨论的过程中就忽略了由  $|OD|$  变化所产生的多解.所以,我们在实验示例中考虑到了这个问题.设  $|AB|=w, v=1$ ,底边四角形 6 个边长都相等,则参数  $a=b=c=d=e=1$ ,6 个参数  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$  满足  $r_1=r_3=r_4=r_6=r, r_2=r_5=s$ ,代入四锚点定位方程组,可以得到:

$$\begin{cases} -y^2 + z^2 + rxy - sxz = 0 \\ -y^2 + rxy - rx + 1 = 0 \\ -x^2 + z^2 + rxy - ryz = 0 \\ -x^2 + rxy - sy + 1 = 0 \\ -x^2 - y^2 + z^2 + rxy - rz + 1 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

于是,系统转化为:求  $r, s, w$  满足的条件,使得以下系统有实数解.

$$\begin{cases} h_1 = -y^2 + z^2 + rxy - sxz = 0 \\ h_2 = -y^2 + rxy - rx + 1 = 0 \\ h_3 = -x^2 + z^2 + rxy - ryz = 0 \\ h_4 = -x^2 + rxy - sy + 1 = 0 \\ h_5 = -x^2 - y^2 + z^2 + rxy - rz + 1 = 0 \\ x > 0, y > 0, z > 0, w > 0, -2 < r_1 < 2, -2 < s < 2 \\ x + y - w > 0, y + w - x > 0, w + x - y > 0 \\ x + z - w > 0, z + w - x > 0, w + x - z > 0 \\ y + z - w > 0, z + w - y > 0, w + y - z > 0 \\ w + w - x > 0, w + w - y > 0, w + w - z > 0 \end{cases} \quad (11)$$

利用 DISCOVERER, 首先键入:

```
tofind([h1,h2,h3,h4,h5],[],[x,y,z,w,2-r,z+r,2-s,2+s,x+y-w,y+w-x,w+x-y,
x+z-w,z+w-x,w+x-z,z+w-y,w+y-z,y+z-w],[],[x,y,z],[r,s,w],1).
```

DISCOVERER 运行 0.656 s 以后,程序运行的电脑配置为: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU/2.0G, Memory 2G, Maple 10,得到的输出结果为

FINAL RESULT:

The system has given number of real solution(s) IF AND ONLY IF

$$[R_1 < 0, 0 < R_2, R_3 < 0, 0 < R_4, 0 < R_5, 0 < R_6, (1)S_1]$$

OR

$$[R_1 < 0, R_2 < 0, R_3 < 0, 0 < R_4, 0 < R_5, 0 < R_6, (1)S_1]$$

OR

$$[R_1 < 0, R_2 < 0, 0 < R_4, 0 < R_5, 0 < R_6, (1)S_1]$$

Where

$$\begin{aligned} R_1 &= ws - w - 2, R_2 = -1 + 2ws - 2w, R_3 = -w + s, \\ R_4 &= w - 2 + s, R_5 = 2w - 1, R_6 = -2 + w. \end{aligned}$$

and

$$S_1 = r - s, S_2 = r + s$$

PROVIDEO THAT

$$\begin{aligned} s \neq 0, s + 1 \neq 0, s - 1 \neq 0, -w + s \neq 0, -2 + w \neq 0, \\ w + 2 \neq 0, w + s \neq 0, -2 + s^2 \neq 0, w - 2 + s \neq 0, -w - 2 + s \neq 0, \\ -2w + s - 1 \neq 0, 2w - 1 \neq 0, 2w + 1 \neq 0, 2w + s - 1 \neq 0, s^2 - 2s + 2 \neq 0, \\ ws - w - 2 \neq 0, ws + 2 - w \neq 0, -1 + 2ws - 2w \neq 0, 1 + 2ws - 2w \neq 0. \end{aligned}$$

在输出的结果中,

$$[R_1 < 0, R_2 < 0, R_3 < 0, 0 < R_4, 0 < R_5, 0 < R_6, (1)S_1]$$

表示参数点 $(r_0, s_0, w_0)$ 应该满足  $R_1 < 0, R_2 < 0, R_3 < 0, 0 < R_4, 0 < R_5, 0 < R_6$ , 而且  $r_0$  是  $S_1 = 0$  第 1 个最小的根, 即  $r_0 = s_0$ . 然后再键入:

```
tofind([h1,h2,h3,h4,h5],[],[x,y,z,w,2-r,z+r,2-s,2+s,x+y-w,y+w-x,w+x-y,
x+z-w,z+w-x,w+x-z,z+w-y,w+y-z,y+z-w],[],[x,y,z],[r,s,w],5).
```

DISCOVERER 运行 6.593s 后输出:

FINAL RESULT:

The system has given number of real solution(s) IF AND ONLY IF

$$[R_1 < 0, 0 < R_2, 0 < R_3, 0 < R_4, 0 < R_5, R_6 < 0, (1)S_1]$$

Where

$$R_1 = ws - w - 2, R_2 = -1 + 2ws - 2w, R_3 = -w + s,$$

$$R_4 = 2w - 1, R_5 = -2 + w + s, R_6 = -2 + w.$$

And

$$S_1 = r - s, S_2 = r + s$$

PROVIDED THAT

$$s \neq 0, s + 1 \neq 0, s - 1 \neq 0, -w + s \neq 0,$$

$$-2 + w \neq 0, w + 2 \neq 0, w + s \neq 0, -2 + s^2 \neq 0,$$

$$-2w + s - 1 \neq 0, 2w - 1 \neq 0, -2 + w + s \neq 0, -w - 2 + s \neq 0,$$

$$2w + 1 \neq 0, 2w + s - 1 \neq 0, s^2 - 2s + 2 \neq 0, ws - w - 2 \neq 0,$$

$$ws + 2 - w \neq 0, -1 + 2ws - 2w \neq 0, 1 + 2ws - 2w \neq 0.$$

与此相同,再分别键入 tofind 命令,分别获得实解个数分别为 2,3,4 和 6,...,n 情况下的分类判别条件,结果在这里不再一一列出.最终得到的系统实解分类如图 2 所示.从图 2 中可以看出,当参数(w,s)位于区域 I、区域 II 时,系统有 1 个解;当参数(w,s)位于区域 III 时,系统有 4 个解;当参数(w,s)位于区域 IV 时,系统有 5 个解;当参数(w,s)位于其他区域时,系统无解.此处,我们忽略了系统实解在边界上的分类情况.

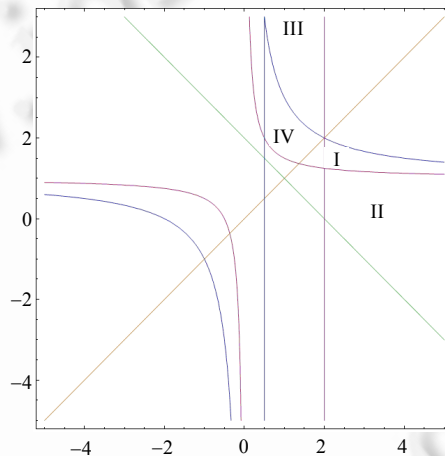


Fig.2 Real solutions distribution map of four-anchor localization problem for some specific situations

图 2 特定情况下四锚点定位问题实解分布图

至此,我们可以得到实解个数的分类判别条件,说明了四锚点定位中最多有 5 个实解存在的可能性.在参数较少的情况下,我们很快就可以在计算机上得到运算结果.进一步可以考虑计算参数更多的情况.但从实际的运算来看,要想用 DISCOVERER 工具箱对所有情况下四锚点定位问题给出一个完整的解的分类是非常困难的.

### 3 结束语

为了提高物联网感知层调度的快速性和精确性,本文针对三维空间传感器节点分布情况,研究和分析了基于四锚点节点定位实解个数分类问题.利用不等式机器证明理论和不等式机器证明软件 DISCOVERER,给出了特定情况下四锚点定位的实解分类判别条件.分析结果表明:空间四锚点定位存在多解问题.文中给出的分类判别条件对物联网实际应用具有参考价值,对提高节点布局和精确信息感知调度具有重要的指导意义.将不等式机器证明理论和技术引入物联网感知层调度问题的研究,将是一个重要的研究课题.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行表示感谢,向论文评审专家表示谢意.



## References:

- [1] Wang J, Ghosh RK, Das SK. A survey on sensor localization. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010,8(1):2–11. [doi: 10.1007/s11768-010-9187-7]
- [2] Mao GQ, Fidan B, Anderson BDO. Wireless sensor network localization techniques. *Computer Networks*, 2007,51(10):2529–2553. [doi: 10.1016/j.comnet.2006.11.018]
- [3] Peng Y, Wang D. A review: Wireless sensor networks localization. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2011,25(5): 389–399 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1187.2011.00389]
- [4] Gao XS, Hou XR, Tang JL, Cheng HF. Complete solution classification for the perspective-three-point problem. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003,25(8):930–943. [doi: 10.1109/TPAMI.2003.1217599]
- [5] Horaud R, Conio B, Lehoulloux O. An analytic solution for the perspective 4-point problem. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1989,47(1):33–44. [doi: 10.1016/0734-189X(89)90052-2]
- [6] Hu ZY, Wu FC. A note on the number of solutions of the non-coplanar P4P problem. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002,24(4):550–555. [doi: 10.1109/34.993561]
- [7] Wu FC, Hu FC. A study on the P5P problem. *Ruan Jian Xue/Journal of Software*, 2001,12(5):768–775 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/12/768.htm>
- [8] Yang L, Xia BC. *Inequality Proving and Automatic Discovery*. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese).
- [9] Yang L, Hou XR, Zeng ZB. A complete discrimination system for polynomials. *Science in China (Series E)*, 1996,39(6):628–646.
- [10] Yang L, Zhang JZ, Hou XR. *The Series in Nonlinear Science: Nonlinear Algebraic Equations and Theorem Proving*. Shanghai: Shanghai Education Press, 1996 (in Chinese).
- [11] Yang L, Hou XR, Xia BC. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems. *Science in China (Series F)*, 2001,44(1):33–49. [doi: 10.1007/BF02713938]
- [12] Xia BC. DISCOVERER: A tool for solving problems involving polynomial inequalities. In: *Proc. of the ATCM 2000*. Lacksburg: ATCM Inc., 2000. 472–481.
- [13] Guan Q, He GN, Wang L, Yu WS. Simultaneous stabilization of linear systems. *Control Theory & Applications*, 2011,28(1):1–12 (in Chinese with English abstract).
- [14] Yang KH, Yuan RY, Xiang Y, Yu WS. Real solutions number of the switching angles in the selective harmonic eliminated PWM. *Journal of China University of Mining & Technology*, 2011,40(5):766–773 (in Chinese with English abstract).

## 附中文参考文献:

- [3] 彭宇,王丹.无线传感器网络定位技术综述. *电子测量与仪器学报*, 2011,25(5):389–399. [doi: 10.3724/SP.J.1187.2011.00389]
- [7] 吴福朝,胡占义.关于 P5P 问题的研究. *软件学报*, 2001,12(5):768–775. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/12/768.htm>
- [8] 杨路,夏壁灿. *数学机械化丛书:不等式机器证明与自动发现*.北京:科学出版社,2008.
- [10] 杨路,张景中,侯晓荣. *非线性科学丛书:非线性代数方程组与定理机器证明*.上海:上海科技教育出版社,1996.
- [13] 关强,何冠男,王龙,郁文生.线性系统的同时镇定问题. *控制理论与应用*, 2011,28(1):1–12.
- [14] 杨克虎,袁如意,项勇,郁文生.特定消谐波宽调制开关角度的实解个数. *中国矿业大学学报*, 2011,40(5):766–773.



姬靖(1980—),男,山东滕州人,博士,讲师,主要研究领域为智能传感器网络,人工智能,嵌入式系统.

E-mail: jijing@gdut.edu.cn



郁文生(1964—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为符号计算和实代数,系统全局优化,数学机械化与推理自动化及其在信息领域的应用.

E-mail: wsyu@sei.ecnu.edu.cn



刘桂雄(1968—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为现代检测技术与网络化控制,智能传感理论与方法,智能化光机电一体化.

E-mail: megxliu@scut.edu.cn