软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2014,25(5):970−983 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004441]
©中国科学院软件研究所版权所有.
E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

粗糙逻辑中公式的 Borel 型概率粗糙真度*

折延宏, 贺晓丽

(西安石油大学 理学院,陕西 西安 710065)

通讯作者: 折延宏, E-mail: yanhongshe@gmail.com, http://www.xsyu.edu.cn

摘 要: 以一种特殊的粗糙逻辑为研究对象,视全体赋值之集为通常乘积拓扑空间,通过利用赋值集上的 Borel 概率测度,提出了能融合粗糙逻辑与计量逻辑为一体的公式的 Borel 型概率粗糙真度理论,给出了公式概率粗糙真度的公理化定义,建立起了相应的概率真度表示定理.公式的概率粗糙真度理论可被看作粗糙逻辑中已有工作的计量化,也可看作计量逻辑学中真度理论的粗糙化.基于这一核心概念,进一步给出了粗糙逻辑中已有概念的程度化表示形式,如公式的粗糙度、精确度、公式之间的粗糙相似度等,并建立起了基于粗糙相似度的 3 种近似推理模式.该结果实现了粗糙逻辑与计量逻辑的和谐统一,为进一步基于粗糙真值的程度化推理搭建了一个可能的框架.

关键词: 粗糙逻辑;概率粗糙真度;粗糙相似度;近似推理

中图法分类号: TP181

中文引用格式: 折延宏,贺晓丽.粗糙逻辑中公式的 Borel 型概率粗糙真度.软件学报,2014,25(5):970−983. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4441.htm

英文引用格式: She YH, He XL. Borel probabilistic rough truth degree of formulae in rough logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(5):970−983 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4441.htm

Borel Probabilistic Rough Truth Degree of Formulae in Rough Logic

SHE Yan-Hong, HE Xiao-Li

(College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)

Corresponding author: SHE Yan-Hong, E-mail: yanhongshe@gmail.com, http://www.xsyu.edu.cn

Abstract: This paper introduces the notion of the Borel probabilistic rough truth degree of a formula in a special kind of rough logic, by employing Borel probability measures on the valuation set endowed with the usual product topology. It facilitates a special form of rough logic with integration to quantitative logic. The axiomatic definition of probabilistic rough truth degree is given and its representation theorem is also presented. The proposed notion of Borel probabilistic rough truth degree can be regarded as the quantitative analysis of rough logic, as well as the advancing research of the existing notion of truth degree from rough set perspective. Based upon the fundamental notion of rough truth degree, some graded versions of the existing notions, including the roughness degree, accuracy degree and the rough similarity degree, are also presented. Subsequently, three different kinds of approximate reasoning models are established. The obtained results achieve a combination of rough logic and quantitative logic and provide a possible framework for rough truth based approximate reasoning.

Key words: rough logic; probabilistic rough truth degree; rough similarity degree; approximate reasoning

粗糙集理论是由波兰数学 Pawlak[1,2]于 20 世纪 80 年代提出来的用于数据分析的理论.由于它能够分析处理不精确、不协调和不完备信息,因此作为一种具有极大潜力和有效的知识获取工具受到了人工智能工作者的广泛关注.目前,粗糙集理论已被成功应用于机器学习及知识发现、数据挖掘、决策支持与分析、模式识别等计算机领域[3−5].

* 基金项目: 国家自然科学基金(1103133); 西安石油大学青年科技创新基金(2012QN011)
收稿时间: 2012-10-20; 修改时间: 2013-01-25; 定稿时间: 2013-06-09

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

粗糙逻辑是粗糙集理论中的一个重要研究分支,其目的在于实现基于数据库(或信息系统)的逻辑推理.有关粗糙逻辑的最早文献可追溯至文献[6],在该文献中,首次提出了粗糙逻辑,并赋予逻辑公式 5 个粗糙真值,即真、假、粗糙真、粗糙假、粗糙不相容.经过近 30 年的发展,粗糙逻辑的研究已日趋成熟与完善.目前为止,许多学者从不同角度建立起了以粗糙集为代数语义的逻辑系统,并研究了相应的逻辑推理方式.其中,典型的代表工作有:波兰学者 Rauszer 所建立的多粒度粗糙逻辑[7],爱尔兰学者 Düntsch 以正则双 Stone 代数为代数语义建立起的一种粗糙逻辑[8],印度学者 Banerjee 与 Chakraborty 基于粗糙集与模态逻辑之间的联系提出的预粗糙逻辑与粗糙逻辑[9,10].我国学者在此方面也做出了突出的贡献,如,Lin 等人提出了一阶粗糙逻辑[11],代建华提出了一种基于粗糙 Stone 代数的串演算系统[12],张小红构建了一种能够融合粗糙集与 Lukasiewicz 命题逻辑为一体的粗糙逻辑推演系统[13],等等.有关这方面的参考文献,可参见文献[14–17].值得注意的是,与已有命题逻辑不同,在粗糙逻辑中,人们更关心的是一种较弱形式的语义真值,即粗糙真,因为这能体现粗糙近似的思想特点.自然地,若能将粗糙真值与近年来兴起的命题逻辑中的不确定性推理[18–29]结合起来,建立一种既能反映粗糙近似思想又能体现程度化的近似推理模式,则更能体现人类的认知思维特点与信息处理模式.基于命题真值的程度化推理在已有文献中有大量论述,文献[18]在 1984 年通过把概率的思想引入到二值命题逻辑中定义了逻辑公式的概率概念,以此建立了概率逻辑学.文献[19]利用势为 2 的均匀概率测度空间的无穷可数乘积,在二值命题逻辑中引入了公式的真度概念,随后引发了一系列相关的研究(参见文献[20–26]).文献[27,28]对这方面的研究成果作了整理和总结,如今已形成了较为完善和成熟的计量逻辑学理论.我们已知在计量逻辑学理论中,公式真度是其核心概念,基于此,才可建立后续的命题之间的相似度及相应近似推理方式.相对于命题逻辑,在粗糙逻辑中,人们更关注一种较弱形式的逻辑真值-粗糙真,自然地,要在粗糙逻辑框架下展开基于粗糙近似思想的近似推理,一种程度化粗糙真值的建立尤为重要.该工作可实现已有计量化工作与粗糙集的融合与统一,从而更能体现人类认识思维与逻辑推理的特点.本文正是基于此考虑,在一类特殊的粗糙逻辑中通过利用其赋值全体上的 Borel 概率测度论,提出了能够反映命题粗糙为真程度的粗糙真度理论,研究了粗糙真度的详细性质,给出了粗糙真度的公理化定义并给出相应的表示定理.基于粗糙真度概念,进一步提出了命题的粗糙度与精确度概念,最后,定义了命题之间的粗糙相似度概念,为在粗糙逻辑中展开体现粗糙近似思想的近似推理模式搭建了可能的框架.

本文第 1 节简要回顾有关粗糙逻辑的相关知识,基于此,通过视粗糙逻辑的赋值集为通常乘积拓扑空间,利用其上的 Borel 概率测度理论,提出公式的 Borel 概率型粗糙真度理论,在研究其详细性质之后,给出公式粗糙真度的公理化定义,并建立相应的表示定理.第 2 节基于 Borel 概率型粗糙真度理论,分别提出公式的粗糙度和精确度,这些均可看作是粗糙逻辑中相关概念的程度化推广.第 3 节提出公式之间的粗糙相似度,并基于粗糙相似度建立起能够反映粗糙近似思想的近似推理模式.第 4 节是总结,并对相关后续工作进行展望.

1 粗糙逻辑中公式的概率粗糙真度理论

本节中拟提出的公式的概率粗糙真度以及后续内容中介绍的精确度、粗糙度及公式之间的粗糙相似度,是在粗糙逻辑框架下的不确定性度量,或者说是 Pawlak 粗糙集中不确定性度量(参见文献[1,2,29–35])的“逻辑版本”.

1.1 粗糙逻辑

本文所关注的粗糙逻辑是由印度学者 Banerjee 于 1996 年基于粗糙集与模态逻辑之间的联系而提出.在文献[9,10]中称为预粗糙逻辑(pre-rough logic,简称 PRL).在 PRL 中,原子公式之集为 S,3 个原始的逻辑连接词为$\neg$, $\wedge$以及 L.PRL 中的全体公式之集记为 $F(S)$,它是由 S 生成的$(\neg,\wedge,L)$型自由代数.在粗糙逻辑 PRL 中,3 个额外的逻辑连接词$\vee$,M 以及$\rightarrow$可按如下方式定义:

$$\forall A,B\in F(S), A\vee B=\neg(\neg A\wedge\neg B), MA=\neg L\neg A, A\rightarrow B=(\neg LA\vee LB)\wedge(\neg MA\vee MB).$$

定义 1[9,10]. 粗糙逻辑 PRL 中的公理集由如下形式的公式组成:

(i) $A\rightarrow A$;

(ii) $\neg\neg A\to A$;

(iii) $A\to\neg\neg A$;

(iv) $A\wedge B\to A$;

(v) $A\wedge B\to A\wedge A$;

(vi) $A\wedge(B\vee C)\to(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$;

(vii) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\to A\wedge(B\vee C)$;

(viii) $LA\to A$;

(ix) $L(A\wedge B)\to LA\wedge LB$;

(x) $LA\wedge LB\to L(A\wedge B)$;

(xi) $LA\to LLA$;

(xii) $MLA\to LA$;

(xiii) $L(A\vee B)\to LA\vee LB$.

推理规则如下:

(i) MP rule: $\{A,A\to B\}\vdash B$;

(ii) HS rule: $\{A\to B,B\to C\}\vdash A\to C$;

(iii) $\{A\}\vdash B\to A$;

(iv) $\{A\to B\}\vdash\neg B\to\neg A$;

(v) $\{A\to B,A\to C\}\vdash A\to B\wedge C$;

(vi) $\{A\to B,B\to A,C\to D,D\to C\}\vdash(A\to C)\to(B\to D)$;

(vii) $\{A\to B\}\vdash LA\to LB$;

(viii) $\{A\}\vdash LA$;

(ix) $\{LA\to LB,MA\to MB\}\vdash A\to B$.

粗糙逻辑 PRL 所对应的代数结构为预粗糙代数,其定义如下:

定义 2[9,10]. 称满足如下条件的代数结构$(P,\leqslant,\wedge,\vee,\neg,L,\to,0,1)$为一预粗糙代数,若$\forall a,b\in P$:

(i) $(P,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$是一有最小元 0 以及最大元 1 的有界分配格;

(ii) $\neg\neg a=a$;

(iii) $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$;

(iv) $La\leqslant a$;

(v) $L(a\wedge b)=La\wedge Lb$;

(vi) $LLa=La$;

(vii) $L1=1$;

(viii) $MLa=La$;

(ix) $\neg La\vee La=1$;

(x) $L(a\vee b)=La\vee Lb$;

(xi) 若 $La\leqslant Lb$ 且 $Ma\leqslant Mb$,则 $a\leqslant b$;

(xii) $a\to b=(\neg La\vee Lb)\wedge(\neg Ma\vee Mb)$;

这里,$Ma=\neg L\neg a$.

例 1[9,10]:令 $R_3=\left(\left\{0,\frac{1}{2},1\right\},\leqslant,\wedge,\vee,\neg,L,\to,0,1\right)$,这里,$\leqslant$是通常的实数序,即 $0\leqslant\frac{1}{2}\leqslant 1$,$\wedge,\vee$分别为取小、取大运算.此外,

$$\neg 0=1,\ \neg\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \neg 1=0,\ L0=L\frac{1}{2}=0,\ L1=1 \tag{1}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

由 $Ma=\neg L\neg a$ 可知:

$$M0=0,\ M\frac{1}{2}=M1=1 \tag{2}$$

则容易验证 R_3 是一个预粗糙代数,且不难看出是一个最小的非平凡预粗糙代数.

在粗糙逻辑 PRL 中,定理、$\Gamma\vdash A$、赋值、重言式、$\Gamma\vDash A$、逻辑等价(用 $A\sim B$ 表示,即$\vdash(A\to B)\wedge(B\to A)$)等均可按通常方式给出,在此省略.

粗糙逻辑 PRL 中语义与语法是和谐的,即有如下完备性定理:

定理 1[9,10]. $\forall A\in F(S),\Gamma\vdash A$ 当且仅当$\forall v\in\Omega,\forall B\in\Gamma,v(B)=1$ 蕴涵 $v(A)=1$.这里,Ω表示形如 $v:F(S)\to R_3$ 的赋值之集.

1.2 公式的概率粗糙真度

设 $X_m=\left(\left\{0,\frac{1}{2},1\right\},\tau_m\right)$ 是离散拓扑空间 $(m=1,2,...)$,$\Omega=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^{\omega}=\prod_{m=1}^{+\infty}X_m$ 是乘积拓扑意义下的拓扑空间,即Ω上的拓扑τ是以子集族$\{A_1\times\ldots\times A_m\times X_{m+1}\times X_{m+2}\times\ldots|A_i\in\tau_i,i=1,2,\ldots,m,m=1,2,\ldots\}$为基所生成的,称$(\Omega,\tau)$为赋值空间.设 $B(X_k)$和 $B(\Omega)$分别表示空间 X_k 和Ω中的 Borel 集之集,即由相应空间中拓扑闭集所生成的σ代数,赋值空间(Ω,τ)上的一个 Borel 概率测度μ指的是定义在 $B(\Omega)$上的概率测度,即$\mu(\varnothing)=0,\mu(\Omega)=1$,且对于两两相交为空的 $B(\Omega)$中的集族$\{E_k|k=1,2,\ldots\}$来说,$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$.在下文中,称测度$\mu$是非原子[36]的,若对任一 $v\in\Omega$,$\mu(\{v\})=0$;称μ是有限原子的,即对任一 $m\in N$ 以及任一$(x_1,...,x_m)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^m$,$\mu(m)(\{(x_1,...,x_m)\})\neq 0$(其中,$\mu(m)$ 如注 1(ii)中所定义).

$\forall A(p_1,\ldots,p_m)\in F(S)$,为了本文论述的需要,将 A 同时也看作一个从Ω到$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$的映射,其定义如下:$\forall v\in\Omega$,$A(v)=v(A)$.在本文中,我们用同一字母来表示,其含义结合上下文可以容易地看出来.另外,我们用 $\overline{A}$ 表示满足如下条件的映射:$\forall(x_1,...,x_m)\in X_1\times...\times X_m,\overline{A}(x_1,...,x_m)=v(A)$.这里,$v$ 为满足 $v(p_i)=x_i(i=1,\ldots,m)$的赋值映射.由于对于含有 m 个原子公式 $p_1,\ldots,p_m$ 而言,$v(A)$并不依赖于赋值映射 v 在其他原子公式处的取值,故该定义是合理的,则称 $\overline{A}$ 为由 A 导出的真值函数.

为了给出粗糙逻辑中命题的粗糙真度理论,需借助于如下引理:

引理 1. $\forall A\in F(S)$,A 作为从Ω到$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$的映射是可积的.

证明:不难证明,$\forall E\subseteq X_1\times X_2\times...\times X_m,E\times\prod_{i=m+1}^{\infty}X_i\in B(\Omega)$.事实上,$\forall(x_1,\ldots,x_m)\in E$,由于 $X_k(k=1,2,\ldots)$上的拓扑是离散拓扑,故$\{x_i\}\in\tau_i(i=1,2,\ldots,m)$,则由 $B(\Omega)$的定义可知,$(x_1,...,x_m)\times\prod_{i=m+1}^{\infty}X_i\in B(\Omega)$.由于 $B(\Omega)$对有限并满足封闭性,故 $E\times\prod_{i=m+1}^{\infty}X_i\in B(\Omega)=\cup(x_1,...,x_m)\times\prod_{i=m+1}^{\infty}X_i\in B(\Omega)$.对于逻辑公式$\forall A(p_1,\ldots,p_m)$而言,由于任一赋值 v 在 A 处的值只依赖于 v 在 $p_1,\ldots,p_m$ 的值,故容易验证 $A^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)=\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)\times\prod_{i=m+1}^{\infty}X_i,i=0,1,2$,因而 $A^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)\in B(\Omega)$,故 A 是 Borel 可测的,结合 A 的有界性便可知 A 是可积的.

定义 3. 在粗糙逻辑 PRL 中,$\forall A\in F(S)$,定义:

$$\overline{\tau}_\mu(A)=\int_\Omega(MA)(v)\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

$$\tau_\mu(A)=\int_\Omega A(v)\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

$$\underline{\tau}_\mu(A)=\int_\Omega(LA)(v)\mathrm{d}\mu \tag{5}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

则称 $\overline{\tau}(A)$,$\tau(A)$以及 $\underline{\tau}(A)$ 分别为 A 的 Borel 概率粗糙上真度、Borel 概率粗糙真度以及 Borel 概率粗糙下真度.

$\forall A\in F(S)$,由引理 1 可知,MA 作为从全体赋值集Ω到$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$的映射是可积的,则根据积分的性质有:

$$\overline{\tau}_\mu(A)=0\times\mu((MA)^{-1}(0))+\frac{1}{2}\times\mu\left((MA)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+1\times\mu((MA)^{-1}(1)) \tag{6}$$

又根据赋值定义及式(2)可知,$\forall v\in\Omega,(MA)(v)=v(MA)=M(v(A))\in\{0,1\}$,这样,$(MA)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\varnothing$. 故,公式(6)又可写成

$$\overline{\tau}_\mu(A)=1\times\mu((MA)^{-1}(1))=\mu((MA)^{-1}(1)) \tag{7}$$

再者,由赋值定义及式(2)可知,$v(MA)=1$ 当且仅当 $v(A)\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$. 故 $(MA)^{-1}(1)=A^{-1}(1)\cup A^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. 因此,公式(7)可进一步写成

$$\overline{\tau}_\mu(A)=\mu(A^{-1}(1))+\mu\left(A^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tag{8}$$

类似地,对于粗糙下真度和粗糙真度,我们有:

$$\underline{\tau}_\mu(A)=\mu(A^{-1}(1)) \tag{9}$$

$$\tau_\mu(A)=\frac{1}{2}\times\mu\left(A^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mu(A^{-1}(1)) \tag{10}$$

注 1:

(i) 简单验证可得,文献[37]中基于赋值域上均匀概率测度的无穷乘积理论而提出的粗糙真度理论可看作是本文的特例.

(ii) 正如文献[20]中所述,Ω上的任一 Borel 概率测度可决定 X_k^m 上的一个 Borel 概率测度.设μ是Ω上的一 Borel 概率测度,定义映射 $\mu(m):B(X_k^m)\to[0,1]$ 如下:

$$\mu(m)(E)=\mu\left(E\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right),E\in B(X_k^m),$$

则不难验证$\mu(m)$为 $B(X_k^m)$ 上的一 Borel 概率测度.则对于逻辑公式 $A(p_1,\dots,p_m)$,式(8)~式(10)又可写成

$$\overline{\tau}_\mu(A)=\mu(m)(\overline{A}^{-1}(1))+\mu(m)\left(\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tag{11}$$

$$\tau_\mu(A)=\mu(m)(\overline{A}^{-1}(1))+\frac{1}{2}\times\mu(m)\left(\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tag{12}$$

$$\underline{\tau}_\mu(A)=\mu(m)(\overline{A}^{-1}(1)) \tag{13}$$

命题 1. 设μ是赋值空间Ω上的 Borel 概率测度,则$\forall A\in F(S)$:

(i) $0\leqslant\underline{\tau}_\mu(A)\leqslant\tau_\mu(A)\leqslant\overline{\tau}_\mu(A)\leqslant 1$.

(ii) $\overline{\tau}_\mu(A)=\overline{\tau}_\mu(MA),\underline{\tau}_\mu(A)=\underline{\tau}_\mu(LA)$.

(iii) 若$\vdash A$,则 $\overline{\tau}_\mu(A)=\underline{\tau}_\mu(A)=\tau_\mu(A)=1$;若$\vdash MA$,则 $\overline{\tau}_\mu(A)=1$;若$\vdash LA$,则 $\underline{\tau}_\mu(A)=1$.

(iv) 若$\vdash A\to B$,则 $\overline{\tau}_\mu(A)\leqslant\overline{\tau}_\mu(B),\tau_\mu(A)\leqslant\tau_\mu(B),\underline{\tau}_\mu(A)\leqslant\underline{\tau}_\mu(B)$; 若$\vdash MA\to MB$,则 $\overline{\tau}_\mu(A)\leqslant\overline{\tau}_\mu(B)$; 若$\vdash LA\to LB$,则 $\underline{\tau}_\mu(A)\leqslant\underline{\tau}_\mu(B)$.

(v) 设μ是有限原子的,则对于任一公式 $A\in F(S)$,若 $\overline{\tau}_\mu(A)=1$, 则 MA 是定理,若$\tau_\mu(A)=1$ 或者 $\underline{\tau}_\mu(A)=1$, 则 A 是定理.

(vi) $\overline{\tau}_\mu(\neg A)=1-\underline{\tau}_\mu(A),\underline{\tau}_\mu(\neg A)=1-\overline{\tau}_\mu(A)$.

(vii) $\overline{\tau}_\mu(A\vee B)=\overline{\tau}_\mu(A)+\overline{\tau}_\mu(B)-\overline{\tau}_\mu(A\wedge B),\underline{\tau}_\mu(A\vee B)=\underline{\tau}_\mu(A)+\underline{\tau}_\mu(B)-\underline{\tau}_\mu(A\wedge B),\tau_\mu(A\vee B)=\tau_\mu(A)+$

$\tau_\mu(B)-\tau_\mu(A\wedge B)$.

证明:易证得,略. □

命题 2. 设μ是赋值空间Ω上的 Borel 概率测度,$\forall A\in F(S),\alpha,\beta\in[0,1]$,则

(i) 若 $\overline{\tau}_\mu(A)\geqslant\alpha,\overline{\tau}_\mu(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\overline{\tau}_\mu(B)\geqslant\alpha+\beta-1$;

若 $\underline{\tau}_\mu(A)\geqslant\alpha,\underline{\tau}_\mu(A\to B)\geqslant\beta$, 则 $\underline{\tau}_\mu(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(ii) 若$\tau_\mu(A\to B)\geqslant\alpha,\tau_\mu(B\to C)\geqslant\beta$,则$\tau_\mu(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

注 2:

(i) 在命题 1 中,

- 由(iii)和(vi)可知:在有限原子测度下,$A(MA,LA)$是定理,与 $\tau_\mu(A)=1(\overline{\tau}_\mu(A)=1,\underline{\tau}_\mu(A)=1)$ 等价，从而进一步说明概率粗糙(上、下)真度是公式粗糙为真的程度化表示.
- (iv)与(v)说明:概率粗糙(上、下)真度关于逻辑蕴涵具有单调性,并且在粗糙(上、下)逻辑等价意义下是保持不变的.
- (vii)说明:概率粗糙上、下真度具有对偶性,这完全类似于 Pawlak 粗糙集中上下近似算子的对偶性.
- (viii)说明:概率粗糙(上、下)真度具有有限可加性.

(ii) 由命题 2 不难得到如下结论:若 $\overline{\tau}_\mu(A)=1,\overline{\tau}_\mu(A\to B)=1$, 则 $\overline{\tau}_\mu(B)=1$.这类似于逻辑推理中的 MP 规则,我们称其为概率粗糙真度的 MP 规则.类似地,容易验证概率粗糙真度的 HS 规则也成立.

以下命题揭示了公式概率粗糙(上、下)真度之集在单位区间的分布情况,为此,需要如下引理:

引理 2[38]. 设 X 为一个至少含有两个点的有限集合,则在乘积拓扑意义下,X^ω是一个 Cantor 空间.

引理 3[39]. Ω作为乘积拓扑空间是可度量的,其度量ρ定义如下:

$$\rho(u,v)=\max\left\{\frac{|u_i-v_i|}{i}\middle|i=1,2,...\right\} \tag{14}$$

其中,$u=(u_1,u_2,\ldots),v=(v_1,v_2,\ldots)$.

引理 4[38]. 设(X,d)是一个度量空间,μ是 X 上的一非原子测度,则$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得对于 X 中每个 Borel 集 B,若 $diam(B)\leqslant\delta$,则$\mu(B)<\varepsilon$.这里,$diam(B)=\sup\{d(x_1,x_2)|x_1,x_2\in B\}$.

引理 5[38]. 若 X 是一 Cantor 空间,μ是 X 上一非原子测度,则 $S(v)=\{v(U)|U$ 是 X 中既开且闭集$\}$是单位区间中包含 0 与 1 的可数稠密子集.

命题 3. 设μ是Ω上的非原子的 Borel 概率测度,则,

(i) $\overline{H}=\{\overline{\tau}_\mu(A)|A\in F(S)\},H=\{\tau_\mu(A)\mid A\in F(S)\},\underline{H}=\{\underline{\tau}_\mu(A)\mid A\in F(S)\}$ 均在[0,1]稠密;

(ii) 当μ是均匀概率测度时, $\left\{\frac{k}{3^n}\middle|k=0,...,3^n,n=1,2,...\right\}\subseteq\overline{H}\cap H\cap\underline{H}$.

证明:

(i) 由引理 2 可知,在乘积拓扑下, $\Omega=\prod_{k=1}^\infty X_k$ 构成一个 Cantor 空间;又由引理 3 可知,拓扑空间Ω是可度量的,若μ为一个非原子测度,则由引理 4 可知,对于任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得$\forall B\in B(\Omega)$,若 $diam(B)\leqslant\delta$,则$\mu(B)<\varepsilon$.对于δ,由公式(14)可知:存在 N,当 $m>N$ 时,对于 X_k^m 中任意一点$(x_1,\ldots,x_m)$:

$$diam(B)=\sup\left\{\rho(u,v)\middle|u,v\in(x_1,...,x_m)\times\prod_{k=m+1}^\infty X_k\right\}\leqslant\delta.$$

从而 $\mu(m)(x_1,...,x_m)=\mu\left((x_1,...,x_m)\times\prod_{k=m+1}^\infty X_k\right)<\varepsilon$.

易知,Ω中既开且闭集具有 $E\times\prod_{k=m+1}^\infty X_k(E\subseteq X_k^m,m=1,2,...)$ 的形式.现任取 $E\subseteq X_k^m$, 为了证明以上 3 种粗糙

真度集合的稠密性,构造如下的公式序列: $\forall(x_1,\dots,x_m)\in X_k^m$,

$$\delta_{(x_1,\dots,x_m)}=A_1\wedge\dots\wedge A_m \tag{15}$$

其中,

$$A_i=\begin{cases}\neg Mp_i, & x_i=0\\ Mp_i\wedge\neg Lp_i, & x_i=\dfrac{1}{2}\\ Lp_i, & x_i=1\end{cases}.$$

容易验证: A_i 满足 $\overline{A}_i(x_i)=1$; 且当 $x\neq x_i$ 时, $\overline{A}_i(x)=0$. 结合赋值定义可知: $v(\delta_{(x_1,\dots,x_m)})=1$ 当且仅当 $v(p_i)=x_i$, $i=1,\dots,m$. 令 $\varphi_E=\vee\{\delta_{(x_1,\dots,x_m)}\mid(x_1,\dots,x_m)\in E\}$, 则由 φ_E 的定义可知, $\overline{\varphi}_E^{\,-1}(1)=E,\overline{\varphi}_E^{\,-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\varnothing,\overline{\varphi}_E^{\,-1}(0)=\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}^m-E$.

由公式(11)~公式(13)可知, $\tau_\mu(\varphi_E)=\overline{\tau}_\mu(\varphi_E)=\underline{\tau}_\mu(\varphi_E)=\mu(m)(\overline{\varphi}_E^{\,-1}(1))=\mu(m)(E)=\mu\left(E\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)$, 故

$$S(v)=\{\mu(U)\mid U\text{是}\Omega\text{中的既开且闭集}\}\subseteq H\cap\overline{H}\cap\underline{H}.$$

由引理 5 便知, $H,\overline{H},\underline{H}$ 在单位区间[0,1]是稠密的.

(ii) 若 μ 是 Ω 上的均匀概率测度,任取 $m\in N$ 及 $k\in\{0,\dots,3^m\}$,取 $E\subseteq\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}^m$,使 $|E|=k$,按照(i)中的做法,有:

$$\tau_\mu(\varphi_E)=\overline{\tau}_\mu(\varphi_E)=\underline{\tau}_\mu(\varphi_E)=\mu(m)(E)=\frac{k}{3^m}.$$

即可证明. □

1.3 粗糙真度的公理化定义及其表示定理

以上定义的粗糙真度是从语义的角度给出的,以下我们从公理化的角度给出命题粗糙真度的定义,并证明对于满足公理化定义的粗糙真度函数,存在赋值空间 Ω 上的 Borel 概率测度 μ,使得该粗糙真度函数可由第 1.2 节中的语义方式得到,从而实现了两种方法的和谐统一.

定义 4. 在粗糙逻辑 PRL 中,设 $\overline{\tau}:F(S)\to[0,1]$ 是一映射,若 $\overline{\tau}$ 满足以下条件,则称 $\overline{\tau}$ 为 $F(S)$ 上的概率粗糙上的真度函数:

(i) 若 A 是公理,则 $\overline{\tau}(A)=1$;

(ii) 若 $MA\to MB$ 是定理,则 $\overline{\tau}(A)\leqslant\overline{\tau}(B)$;

(iii) 若 $MA\wedge MB$ 是可驳公式,则 $\overline{\tau}(A\vee B)=\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)$.

注 3:

(i) 定义 4(iii)中的条件可换为:若 $A\wedge B$ 是可驳公式,则 $\overline{\tau}(A\vee B)=\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)$.这是因为在粗糙逻辑 PRL 中, $A\wedge B$ 是可驳公式当且仅当 $MA\wedge MB$ 是可驳公式.

(ii) 定义 4(ii)只考虑了两公式"粗糙上近似"之间的蕴涵关系,体现了粗糙上近似的思想,这比逻辑公式间的蕴涵关系要弱一些.事实上,由 PRL 中的语构知识不难证明:若 $\vdash A\to B$,则 $\vdash MA\to MB$;但反过来并不成立(举例留给读者).

(iii) 由公式(8)及命题 1 可知, $\overline{\tau}_\mu$ 是定义 4 意义下的概率粗糙上真度函数.

命题 4. 设 $\overline{\tau}$ 是 $F(S)$上的概率粗糙上真度函数,则:

(i) 若 $\vdash MA$,则 $\overline{\tau}(A)=1$.

(ii) 若 A,B 粗糙上等价,即 $\vdash(MA\to MB)\wedge(MB\to MA)$,则 $\overline{\tau}(A)=\overline{\tau}(B)$; 若 A,B 逻辑等价,则 $\overline{\tau}(A)=\overline{\tau}(B)$.

(iii) $\overline{\tau}(A)=\overline{\tau}(MA)$.

(iv) 若 MA 为可驳式,则 $\overline{\tau}(A)=0$.

(v) $\overline{\tau}(A\vee B)=\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)-\overline{\tau}(A\wedge B)$.

(vi) $\overline{\tau}(MA)+\overline{\tau}(MA\to MB)=\overline{\tau}(MB)+\overline{\tau}(MB\to MA)$.

(vii) $\overline{\tau}(\neg MA)=1-\overline{\tau}(A)$.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

证明:容易证得,略. □

下面给出粗糙上真度函数公理化定义的等价刻画.

命题 5. 设 $\overline{\tau}:F(S)\to[0,1]$ 是一映射,则 $\overline{\tau}$ 是粗糙逻辑中的一概率粗糙上真度函数当且仅当 $\overline{\tau}$ 满足:

(i) 若 $\vdash MA$,则 $\overline{\tau}(A)=1$;

(ii) 若 MA 为可驳公式,则 $\overline{\tau}(A)=0$;

(iii) $\overline{\tau}(A\vee B)=\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)-\overline{\tau}(A\wedge B)$.

证明:由命题 4 知必要性成立,以下只需证明充分性.

要证明定义 4(ii)成立,先证明如下结论: $\overline{\tau}(\neg MA)=1-\overline{\tau}(A)$.事实上,由 $M(\neg MA\vee A)\sim\neg MA\vee MA$ 知,$M(\neg MA\vee A)$ 为 PRL 中的一个定理,故由命题 5(i)、命题 5(iii)可知, $-\overline{\tau}(\neg MA\vee A)=1=\overline{\tau}(\neg MA)+\overline{\tau}(A)-\overline{\tau}(\neg MA\wedge A)$; 又由 $M(\neg MA\wedge A)\sim\neg MA\wedge MA$ 可知,$M(\neg MA\wedge A)$为一个可驳式,则由命题 5(ii)可知, $1=\overline{\tau}(\neg MA)+\overline{\tau}(A)$, 从而 $\overline{\tau}(\neg MA)=1-\overline{\tau}(A)$.

若$\vdash MA\to MB$,此时容易证明$\vdash M(\neg MA\vee B)$,由命题 5(i)、命题 5(iii)可知:

$$1=\overline{\tau}(\neg MA\vee B)=\overline{\tau}(\neg MA)+\overline{\tau}(B)-\overline{\tau}(\neg MA\wedge B)=1-\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)-\overline{\tau}(\neg MA\wedge B),$$

则 $-\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)-\overline{\tau}(\neg MA\wedge B)=0$. 因此, $\overline{\tau}(B)-\overline{\tau}(A)=\overline{\tau}(\neg MA\wedge B)\geqslant 0,\overline{\tau}(B)\geqslant\overline{\tau}(A)$, 结论得证.

下证定义 4(iii)成立:

若 $MA\wedge MB$ 是可驳式,则根据命题 5(ii)可知, $\overline{\tau}(A\wedge B)=0$,再结合命题 5(iii)即有 $\overline{\tau}(A\vee B)=\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(B)$. □

命题 6. 设 $\overline{\tau}:F(S)\to[0,1]$ 是一个映射,则 $\overline{\tau}$ 是粗糙逻辑 PRL 中的一个概率粗糙上的真度函数当且仅当 $\overline{\tau}$ 满足:

(i) 若 $\vdash MA$,则 $\overline{\tau}(A)=1$;

(ii) 若 MA 为可驳式,则 $\overline{\tau}(A)=0$;

(iii) $\overline{\tau}(A)+\overline{\tau}(MA\to MB)=\overline{\tau}(B)+\overline{\tau}(MB\to MA)$.

证明:可类似于命题 5 证得. □

下面给出概率粗糙下真度函数的公理化定义:

定义 5. 在粗糙逻辑 PRL 中,设 $\underline{\tau}:F(S)\to[0,1]$ 是一个映射,若 $\underline{\tau}$ 满足以下条件,则称 $\underline{\tau}$ 为 $F(S)$上的概率粗糙下的真度函数:

(i) 若 $\underline{A}$ 是公理,则 $\underline{\tau}(A)=1$;

(ii) 若$\vdash LA\to LB$,则 $\underline{\tau}(A)\leqslant\underline{\tau}(B)$;

(iii) 若 $LA\wedge LB$ 是可驳公式,则 $\underline{\tau}(A\vee B)=\underline{\tau}(A)+\underline{\tau}(B)$.

概率粗糙上真度函数与概率粗糙下真度函数具有如下关系:

命题 7. 在粗糙逻辑 PRL 中,若 $\overline{\tau}$ 是概率粗糙上真度函数,定义:

$$\forall A\in F(S),\ \underline{\tau}(A)=1-\overline{\tau}(\neg A) \tag{16}$$

则 $\underline{\tau}$ 是概率粗糙下真度函数.同样地,若 $\underline{\tau}$ 是概率粗糙下真度函数,定义:

$$\forall A\in F(S),\ \overline{\tau}(A)=1-\underline{\tau}(\neg A) \tag{17}$$

则函数 $\overline{\tau}$ 是概率粗糙上真度函数.

证明:略. □

以下给出概率粗糙(上、下)真度函数的表示定理,即对任一满足公理化定义的概率粗糙上真度函数及概率粗糙下真度函数,总存在赋值集Ω上的一个 Borel 概率测度,使得该概率粗糙上、下真度函数可按公式(8)、公式(9)导出.

以下称概率粗糙上真度函数 $\overline{\tau}$ 与概率粗糙下真度函数 $\underline{\tau}$ 互为对偶,若 $\forall A\in F(S),\overline{\tau}(\neg A)=1-\underline{\tau}(A)$.

定理 2(表示定理). 设 $\overline{\tau},\underline{\tau}$ 为满足公理化定义的互为对偶的概率粗糙上、下真度函数,则存在赋值集Ω上的唯一 Borel 概率测度μ,使得对于任一公式 $A\in F(S)$:

$$\overline{\tau}(A)=\mu\left(A^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mu(A^{-1}(1)) \tag{18}$$

$$\underline{\tau}(A)=\mu(A^{-1}(1)) \tag{19}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

证明:$\forall m\in N,\forall(x_1,\dots,x_m)\in X_1\times\dots\times X_m$,为定理证明的需要,需要定义公式 $\delta_{(x_1,\dots,x_m)}$.先定义每一个 x_i 所对应的逻辑公式 A_i 如下:

$$A_i=\begin{cases}\neg Mp_i, & x_i=0\\ Mp_i\wedge\neg Lp_i, & x_i=\dfrac{1}{2},\\ Lp_i, & x_i=1\end{cases}$$

则定义 $\delta_{(x_1,\dots,x_m)}=A_1\wedge\dots\wedge A_m$. 容易证明, $v(\delta_{(x_1,\dots,x_m)})=1$ 当且仅当 $v(p_i)=x_i,i=1,\dots,m$.

$\forall m\in N,\forall(x_1,\dots,x_m)\in X_1\times\dots\times X_m$,令

$$\mu\left((x_1,\dots,x_m)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)=\overline{\tau}(\delta_{(x_1,\dots,x_m)})\tag{20}$$

任取Ω中的一拓扑闭集Σ,令

$$\mu\left(\Sigma(m)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)=\sum\{\overline{\tau}(\delta_{(x_1,\dots,x_m)})\mid(x_1,\dots,x_m)\in\Sigma(m)\}\tag{21}$$

$$\mu(\Sigma)=\lim_{m\to\infty}\mu\left(\Sigma(m)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)\tag{22}$$

任取$\Delta\in B(\Omega)$,令

$$\mu(\Delta)=\sup\{\mu(\Sigma)|\Sigma\text{为拓扑闭集}\}\tag{23}$$

则容易证明μ是 $B(\Omega)$上的一 Borel 概率测度(可参见文献[36]中的 Theorem A).

这样,

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(A)&=\overline{\tau}(MA)\\&=\sum\left\{\overline{\tau}(\delta_{(x_1,\dots,x_m)})\mid(x_1,\dots,x_m)\in\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\cup\overline{A}^{-1}(1)\right\}\\&=\sum\left\{\mu((x_1,\dots,x_m)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k)\mid(x_1,\dots,x_m)\in\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\cup\overline{A}^{-1}(1)\right\}\\&=\mu\left(\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)+\mu\left(\overline{A}^{-1}(1)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)\\&=\mu\left(A^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mu(A^{-1}(1)).\end{aligned}$$

由概率粗糙上、下真度函数的对偶性可知:

$$\begin{aligned}\underline{\tau}(A)&=1-\overline{\tau}(\neg A)\\&=1-\left(\mu\left((\neg A)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mu((\neg A)^{-1}(1))\right)\\&=1-\left(\mu\left(A^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mu(A^{-1}(0))\right)\\&=\mu(A^{-1}(1)).\end{aligned}$$

若 v 也是满足公式(18)、公式(19)的 Borel 概率测度,则不难验证 v 也满足公式(20)~公式(23),所以必有$\mu=v$.以上既证明了存在性又证明了唯一性,即可得证. □

注 4:定义 3 是从语义的角度出发定义的,而定义 4、定义 5 是从语构的角度出发定义的.类似于逻辑系统中的完备性定理(将逻辑系统中的语义理论和语构理论统一起来),这两种似乎完全不同的方法通过定理 2 中的表示定理和谐地统一起来.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

2 公式的精确度与粗糙度

基于公式的概率粗糙真度理论,本节拟给出判断命题精确与粗糙程度的两个量化指标.公式的这两种不确定性度量可看作是粗糙集理论中集合近似精度与粗糙度(见文献[1,2,29])的“逻辑版本”.

定义 6. $\forall A\in F(S)$,若 $MA\sim LA$,或等价地,$\vdash MA\sim LA$,则称 A 为一个精确公式;否则,称 A 为一个粗糙公式.

注 5:

(i) 若 $MA\sim LA$,则不难验证对于任一近似空间(U,R)以及任一赋值映射 $v:F(S)\to 2^U$,$v(A)$总是(U,R)中的一个精确集[9,10].定义 6 中称 A 为一 wh 精确公式正是由此而来.

(ii) 由定义 5 不难证明:$\forall A,B\in F(S)$,$MA,LA,A\to B$ 均为精确公式,然而大部分逻辑公式是粗糙公式,如 $p_1,p_1\vee p_2,p_1\wedge Lp_3$,等等.

定义 7. 设μ是 $B(\Omega)$上的一 Borel 概率测度,τ_μ为按公式(4)定义的概率粗糙真度函数,$\forall A\in F(S)$,定义:

$$Acc(A)=\tau_\mu(MA\to LA) \tag{24}$$

$$Rou(A)=1-Acc(A) \tag{25}$$

则称 $Acc(A),Rou(A)$分别为公式 A 的精确度与粗糙度.

命题 8. 设 $Acc(A),Rou(A)$为按公式(24)、公式(25)定义的公式集上的粗糙度、精确度函数,则$\forall A\in F(S)$:

$$Acc_\mu(A)=1-\overline{\tau}(A)+\underline{\tau}(A) \tag{26}$$

$$Rou_\mu(A)=\overline{\tau}(A)-\underline{\tau}(A) \tag{27}$$

证明:因为 $MA\to LA$ 逻辑等价于$\neg MA\vee LA$,且$\neg MA\wedge LA$ 为一个可驳式,由命题 1 可知:

$$\begin{aligned}Acc(A)&=\tau_\mu(MA\to LA)\\&=\tau_\mu(\neg MA\vee LA)\\&=\tau_\mu(\neg MA)+\tau_\mu(LA)-\tau_\mu(\neg MA\wedge LA)\\&=1-\tau_\mu(MA)+\tau_\mu(LA)\\&=1-\overline{\tau}_\mu(A)+\underline{\tau}_\mu(A),Rou(A)\\&=1-Acc(A)\\&=1-(1-\overline{\tau}_\mu(A)+\underline{\tau}_\mu(A))\\&=\overline{\tau}_\mu(A)-\underline{\tau}_\mu(A),\end{aligned}$$

即可证明公式(29)、公式(27)成立. □

命题 9. 设 $Acc_\mu(A),Rou_\mu(A)$为如上定义的粗糙度、精确度函数,则$\forall A(p_1,\ldots,p_m)\in F(S)$:

(i) $Acc_\mu(A)+Rou_\mu(A)=1$;

(ii) $Acc_\mu(A)=\mu\left(\overline{A}^{-1}(1)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)+\mu\left(\overline{A}^{-1}(0)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right),Rou_\mu(A)=\mu\left(\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)$;

(iii) $Acc_\mu(A)=\overline{\tau}_\mu(MA\to LA)=\underline{\tau}_\mu(MA\to LA)$;

(iv) $Acc_\mu(LA)=Acc_\mu(MA)=1,Rou_\mu(LA)=Rou_\mu(MA)=0$;

(v) 若μ是有限原子的,则 $Acc_\mu(A)=1$ 当且仅当 $Rou_\mu(A)=0$ 当且仅当 $A\sim LA$ 当且仅当 $A\sim MA$;

(vi) $Acc_\mu(\neg A)=Acc_\mu(A),Rou_\mu(\neg A)=Rou_\mu(A)$;

(vii) $Acc_\mu(A\vee B)=Acc_\mu(A)+Acc_\mu(B)-Acc_\mu(A\wedge B),Rou_\mu(A\vee B)=Rou_\mu(A)+Rou_\mu(B)-Rou_\mu(A\wedge B)$;

(viii) $Acc_\mu(A)$关于 $\overline{\tau}_\mu(A)$ 是单调递减的,关于 $\underline{\tau}_\mu(A)$ 是单调递增的;

(ix) 若μ是有限原子的,则在粗糙逻辑 PRL 中不存在 $Rou_\mu(A)=1$ 的逻辑公式.

证明:结合定义 7、命题 8 以及粗糙逻辑 PRL 中的完备性定理即可证得,略. □

3 公式之间的粗糙相似度

文献[27,28]已建立起的相似度理论是命题逻辑中公式间逻辑等价的程度化形式,即对于两逻辑公式而言,

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

相似度为 1 当且仅当它们是逻辑等价的.在本节中,基于已有的概率粗糙真度概念,将粗糙逻辑中的粗糙(上、下)等价概念进一步程度化,提出了公式之间的粗糙(上、下)相似度.相对于前者而言,粗糙上相似度只考虑两公式“粗糙上近似”之间的相似度,粗糙下相似度只考虑两公式的“粗糙下近似”之间的相似度,它们分别与 Pawlak 粗糙集理论中的粗糙上、下近似对应,因而相对于文献[27,28]而言,更能体现粗糙近似的思想特点,这为进一步基于粗糙真值的程度化推理搭建了可能的框架.

定义 8. 设μ是 $B(\Omega)$上的 Borel 概率测度,$\forall A,B\in F(S)$,定义:

$$\overline{\xi}_\mu(A,B)=\tau_\mu((MA\to MB)\wedge(MB\to MA)) \tag{28}$$

$$\xi_\mu(A,B)=\tau_\mu((A\to B)\wedge(B\to A)) \tag{29}$$

$$\underline{\xi}_\mu(A,B)=\tau_\mu((LA\to LB)\wedge(LB\to LA)) \tag{30}$$

则称 $\overline{\xi}_\mu(A,B),\xi_\mu(A,B),\underline{\xi}_\mu(A,B)$ 分别为 A,B 之间的粗糙上相似度、粗糙相似度以及粗糙下相似度.

注 6:文献[40]基于粗糙真度的公理化方法定义了公式的精确度、粗糙度以及公式之间的粗糙相似度,不难看出:两定义方式完全类似,但它们出发的角度是不同的.文献[40]是基于公理化的方法;而本文中公式的精度、粗糙度以及粗糙相似度则是通过语义的方式,利用更为广泛的 Borel 概率测度定义的.文献[40]中所述的公理化方法并未建立起诸如定理 2 的表示定理,这与本文也有明显的区别.

定义 9. 定义函数 $\rho_\mu,\overline{\rho}_\mu,\underline{\rho}_\mu:F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 如下:$\forall A,B\in F(S)$:

$$\overline{\rho}_\mu(A,B)=1-\overline{\xi}_\mu(A,B) \tag{31}$$

$$\rho_\mu(A,B)=1-\xi_\mu(A,B) \tag{32}$$

$$\underline{\rho}_\mu(A,B)=1-\underline{\xi}_\mu(A,B) \tag{33}$$

由命题 10(iv)、命题 10(viii)易知, $\rho_\mu,\overline{\rho}_\mu,\underline{\rho}_\mu$ 均为 $F(S)$上的伪距离,以下分别称为粗糙伪度量、粗糙上伪度量以及粗糙下伪度量.

可以证明如下命题成立:

命题 10. 设 $\rho_\mu(\overline{\rho}_\mu,\underline{\rho}_\mu)$ 是定义 9 给出的粗糙(上、下)伪度量函数,则$\forall A,B,C\in F(S)$:

(i) $\overline{\rho}_\mu(A,B)=\rho_\mu(MA,MB),\underline{\rho}_\mu(A,B)=\rho_\mu(LA,LB)$;

(ii) $\overline{\rho}_\mu(\neg A,\neg B)=\underline{\rho}_\mu(A,B),\underline{\rho}_\mu(\neg A,\neg B)=\overline{\rho}_\mu(A,B),\rho_\mu(\neg A,\neg B)=\rho_\mu(A,B)$;

(iii) 若μ是非原子的,则逻辑度量空间 $(F(S),\overline{\rho}_\mu),(F(S),\underline{\rho}_\mu),(F(S),\rho_\mu)$ 均不含有孤立点.

基于 3 种不同的伪度量,可建立如下能够体现粗糙近似思想的近似推理模式.

定义 10. 设$\Gamma\subseteq F(S),A\in F(S)$:

(i) 若$\rho_\mu(A,D(\Gamma))=\inf\{\rho_\mu(A,B)|B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 A 为Γ的误差小于ε的粗糙结论;

(ii) 若 $\overline{\rho}_\mu(A,D(\Gamma))=\inf\{\overline{\rho}_\mu(A,B)\mid B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$, 则称 A 为Γ的误差小于ε的粗糙上结论;

(iii) 若 $\underline{\rho}_\mu(A,D(\Gamma))=\inf\{\underline{\rho}_\mu(A,B)\mid B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$, 则称 A 为Γ的误差小于ε的粗糙下结论.

命题 11. 设$\Gamma\subseteq F(S),A\in F(S)$,则若 $\overline{\rho}_\mu(A,D(\Gamma))<\varepsilon$ 且 $\underline{\rho}_\mu(A,D(\Gamma))<\varepsilon$, 则$\rho_\mu(A,D(\Gamma))\leqslant 2\varepsilon$.

证明:作为预备知识,可证得如下结论成立:

若 A,B 为两精确公式,且$\tau(A)\geqslant\varepsilon,\tau(B)\geqslant\varepsilon$,则

$$\tau(A\wedge B)\geqslant 2\varepsilon-1 \tag{34}$$

事实上,若 A,B 为两精确公式,则不难证明 $A\to(B\to A\wedge B)$为粗糙逻辑 PRL 中一定理,则$\tau_\mu(A\to(B\to A\wedge B))=1$.由命题 2 可知,$\tau_\mu(B\to A\wedge B)\geqslant 1+\varepsilon-1=\varepsilon$,再利用一次命题 2 可得,$\tau_\mu(A\wedge B)\geqslant\varepsilon+\varepsilon-1=2\varepsilon-1$.

若 $\overline{\rho}_\mu(A,D(\Gamma))<\varepsilon$ 且 $\underline{\rho}_\mu(A,D(\Gamma))<\varepsilon$, 则存在 $B,C\in D(\Gamma)$分别满足 $\overline{\rho}_\mu(A,B)<\varepsilon,\underline{\rho}_\mu(A,C)<\varepsilon$, 结合公式(31)~公式(33)可知,$\tau_\mu((MA\to MB)\wedge(MB\to MA))>1-\varepsilon,\tau_\mu((LA\to LC)\wedge(LC\to LA))>1-\varepsilon$,则由公式(34)可知:

$$\tau_\mu((MB\to MA)\wedge(LC\to LA))\geqslant\tau_\mu((MB\to MA)\wedge(MA\to MB)\wedge(LC\to LA)\wedge(LA\to LC))\geqslant 1-2\varepsilon.$$

因此,$1-\tau_\mu((MB\to MA)\wedge(LC\to LA))\geqslant 2\varepsilon$.

令 $D=(B\wedge C)\vee A$,显然 $D\in D(\Gamma)$,则

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$$
\begin{aligned}
\rho_\mu(A,D(\Gamma)) &= \inf\{\rho_\mu(A,E) \mid E \in D(\Gamma)\} \\
&\leqslant \rho_\mu(A,D) \\
&= \rho_\mu(A,(B\wedge C)\vee A) \\
&= 1-\xi_\mu(A,(B\wedge C)\vee A) \\
&= 1-\tau_\mu((A\to(B\wedge C)\vee A)\wedge((B\wedge C)\vee A\to A)) \\
&= 1-\tau_\mu((B\wedge C)\vee A\to A) \\
&= 1-\tau_\mu((M(B\wedge C)\to MA)\wedge(L(B\wedge C)\to LA)) \\
&= 1-\tau_\mu(((MB\to MA)\vee(MC\to MA))\wedge((LB\to LA)\vee(LC\to LA))) \\
&\leqslant 1-\tau_\mu((MB\to MA)\wedge(LC\to LA)) \\
&\leqslant 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由此即可证明. □

注 7:命题 10 说明:若 A 作为Γ的粗糙上、下结论的误差足够小,那么 A 作为Γ的粗糙结论的误差也很小.这进一步说明了粗糙伪距离是粗糙上、下伪距离的“融合”.

4 总 结

基于粗糙真值的近似推理是一项重要的研究课题.它有助于实现已有命题逻辑中不确定性推理与粗糙近似思想的和谐统一,从而更好地模拟人类的认识思维特点.受此启发,本文在一种特殊的粗糙逻辑中,视全体赋值之集为乘积拓扑空间,利用其上的 Borel 概率测度提出了公式的概率粗糙(上、下)真度理论.概率粗糙(上、下)真度实现了粗糙逻辑中相关概念的计量化,同时,也可看作是命题逻辑中已有工作的粗糙化,可谓粗糙逻辑与计量逻辑的融合与统一.本文还从另外一不同角度给出了概率粗糙真度的公理化刻画,并证明了相应的表示定理.接着,基于概率粗糙真度,提出了公式的精确度与粗糙度,实现了已有概念的程度化推广.最后,定义了公式之间的粗糙(上、下)相似度,并建立起了基于粗糙相似度的程度化推理模式.在本文的基础上,可继续考虑基于粗糙真度概念的其他类型的近似推理方法,还可以进一步研究粗糙逻辑中理论的粗糙相容度,粗糙逻辑度量空间的拓扑结构以及基于拓扑方法的逻辑理论粗糙相容性的刻画等,我们将在后续工作中加以讨论.

References:

[1] Pawlak Z. Rough sets. Int’l Journal of Computer and Information Science, 1982,11(5):341−356. [doi: 10.1007/BF01001956]

[2] Pawlak Z. Rough Sets—Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] Lin TY, Cercone T. Rough Sets and Data Mining: Analysis for imprecise Data. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[4] Orlowska E. Incomplete Information-Rough Set Analysis. Heidelberg: Physica-Verlag, 1997.

[5] Pawlak Z. Rough set approach to knowledge-based decision support. European Journal of Operational Research, 1997,99(1):48−57. [doi: 10.1016/S0377-2217(96)00382-7]

[6] Pawlak Z. Rough logic. Bulletin of the Polish Academy of Science: Technical Science, 1987,35(5-6):253−258.

[7] Rauszer CM. Rough logic for multi-agent systems. In: Masuch M, Polos L, eds. Proc. of the Knowledge Representation and Reasoning under Uncertainty. LNAI 808, Berlin, Heldelberg: Springer-Verlag, 1994. 161−181. [doi :10.1007/3-540-58095-6_12]

[8] Düntsch I. A logic for rough sets. Theoretical Computer Science, 1997,179(1-2):427−436. [doi: 10.1016/S0304-3975(96)00248-4]

[9] Banerjee M. Rough sets and 3-valued Lukasiewicz logic. Fundamenta Informaticae, 1997,31(3-4):213−220.

[10] Banerjee M, Chakraborty MK. Rough sets through algebraic logic. Fundamenta Informaticae, 1996,28(3-4):211−221.

[11] Lin TY, Liu Q. First-Order rough logic I: Approximate reasoning via rough sets. Fundamenta Informaticae, 1996,27(2-3):137−153.

[12] Dai JH. Logic for rough sets with rough double Stone algebraic semantics. In: Slezak D, Wang G, Szczuka MS, Duntsch I, Yao Y, eds. Proc. of the RSFDGrC. LNCS 3641, Berlin, Heldelberg: Springer-Verlag, 2005. 141−148. [doi :10.1007/11548669_15]

[13] Zhang XH, Yao Y, Yu H. Rough implication operator based on strong topological rough algebras. Information Sciences, 2010,180 (19):3764−3780. [doi: 10.1016/j.ins.2010.05.017]

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

[14] Liu Q. Rough Set and Rough Reasoning. Beijing: Science in China Press, 2001 (in Chinese).
[15] Zhang WX, Wu WZ, Liang JY, Li DY. Rough Set Theory and Method. Beijing: Science in China Press, 2001 (in Chinese).
[16] Zhang XH. Fuzzy Logic and Its Algebra Analysis. Beijing: Science in China Press, 2008 (in Chinese).
[17] Pagliani P, Chakraborty MK. A Geomery of Approximation: Rough Set Theory: Logic, Algebra and Topology of Conceptual Patterns. New York: Springer-Verlag, 2008.
[18] Adam EW. A Primer of Probability Logic. Stanford: CSLI Publications, 1998.
[19] Wang GJ, Fu L, Song JS. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic. Science China Mathematics, 2002,45(9): 1106−1116.
[20] Zhou HJ, Wang GJ. Borel probabilistic and quantitative logic. Science China Information Sciences, 2011,54(9):1843−1854.
[21] She YH, Wang GJ. Topological characterizations of logic theories in 3-valued logic system L_3^*. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2009,52(6):1225−1234 (in Chinese with English abstract).
[22] Wang GJ, She YH. Topological characterizations of divergency, consistency of logic theories in two-valued propositional logic. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2007,50(7):841−850 (in Chinese with English abstract).
[23] Zhou HJ, Wang GJ. A new theory consistency index based on deduction theorems in several logic systems. Fuzzy Sets and Systems, 2006,157:427−443. [doi: 10.1016/j.fss.2005.07.006]
[24] Zhou HJ, Wang GJ. Generalized consistency degrees of theories w.r.t. formulas in several standard complete logic systems. Fuzzy Sets and Systems, 2006,157:2058−2073. [doi: 10.1016/j.fss.2006.02.007]
[25] Wang GJ, Hui XJ. Randomization of classical inference patterns and its application, Science China Information Sciences, 2007, 50 (6):867−877. [doi:10.1007/s11432-007-0067-9]
[26] Li J, Wang GJ. Theory of truth degrees of propositions in the logic system L_n^*. Science China Information Sciences, 2006,49(4): 471−483.
[27] Wang GJ, Zhou HJ. Quantitative logic. Information Sciences, 2009,179:226−247. [doi: 10.1016/j.ins.2008.09.008]
[28] Wang GJ, Zhou HJ. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. Beijing/Oxford: Science Press and Alpha Science International Limited, 2009. 257−324.
[29] Miao DQ, Li DG. Rough Set Theory, Algorithm and Application. Beijing: Tsinghua University Press, 2008 (in Chinese).
[30] Zhang WX, Liang Y, Xu P. Uncertainty Reasoning Based on Inclusion Degree. Beijing: Tsinghua University Press, 2007 (in Chinese).
[31] Li J, Xu XJ, Shi KQ. Rough similarity degree and rough close degree in rough fuzzy sets and the applications. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2008,19(5):945−951. [doi: 10.1016/S1004-4132(08)60180-2]
[32] Liang JY, Li DY. Uncertainty in information system and knowledge discovery. Beijing: Science in China Press, 2005 (in Chinese).
[33] Wang GY, Zhang QH. Uncertainty of rough sets in different knowledge granularities. Chinese Journal of Computers, 2008,31(9): 1588−1598 (in Chinese with English abstract).
[34] Düntsch I, Gediga G. Uncertainty measures of rough set prediction. Artificial Intelligence, 1998,106(1):109−137. [doi: 10.1016/S0004-3702(98)00091-5]
[35] Wierman MJ. Measuring uncertainty in rough set theory. Int’l Journal of General Systems, 1999,28(4-5):283−297. [doi: 10.1080/03081079908935239]
[36] Halmos PR. Measure Theory. New York: Springer-Verlag, 1974.
[37] She YH, He XL, Wang GJ. Rough truth degrees of formulae and approximate reasoning in rough logic. Fundamenta Informaticae, 2011,107:67−83.
[38] Akin E. Measures on Cantor space. Topology Proceedings, 1999,24:1−34.
[39] Munkres JR. Topology. Beijing: China Machine Press, 2004.
[40] She YH, He XL. Uncertainty measures for rough formulae in rough logic: An axiomatic approach. Computers and Mathematics with Applications, 2012,63(1):83−93. [doi: 10.1016/j.camwa.2011.10.074]

附中文参考文献:

[14] 刘清.Rough 集及 Rough 推理.北京:科学出版社,2001.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

[15] 张文修,吴伟志,梁吉业,李德玉.粗糙集理论与方法.北京:科学出版社,2001.
[16] 张小红.模糊逻辑及其代数分析.北京:科学出版社,2008.
[21] 折延宏,王国俊.三值命题逻辑系统 L_3^*中逻辑理论性态的拓扑刻画.数学学报,2009,52(6):1225−1234.
[22] 王国俊,折延宏.二值命题逻辑中理论的发散性、相容性及其拓扑刻画.数学学报,2007,50(7):841−850.
[29] 苗夺谦,李道国.粗糙集理论、算法与应用.北京:清华大学出版社,2008.
[30] 张文修,梁怡,徐萍.基于包含度的不确定性推理.北京:清华大学出版社,2007.
[32] 梁吉业,李德玉.信息系统中的不确定性与知识获取.北京:科学出版社,2005.
[33] 王国胤,张清华.不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究.计算机学报,2008,31(9):1588−1598.

折延宏(1983－),男,陕西延安人,博士,副教授,主要研究领域为不确定性推理,粗糙集理论.
E-mail: yanhongshe@gmail.com

贺晓丽(1982－),女,讲师,主要研究领域为格上拓扑学,不确定性推理.
E-mail: hxl820510@163.com

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn