软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2014,25(1):27−36 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004406]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

量子 Müller 自动机与单体二阶量子逻辑*

韩召伟[1,2], 李永明[2]

[1](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
[2](陕西师范大学 计算机科学学院,陕西 西安 710062)
通讯作者: 韩召伟, E-mail: hanzw888@snnu.edu.cn

摘 要: 给出量子 Müller 自动机(简称 LVMA)的概念,通过引入量子有限步可识别语言和量子状态构造方法,证明了在量子逻辑意义下 4 类量子 Müller 自动机彼此相互等价.利用该等价性,建立了量子无穷正则语言的代数刻画和层次刻画,籍此研究了量子无穷正则语言关于无穷正则运算的封闭性.同时,给出了量子 Müller 自动机所识别语言的单体二阶逻辑描述,深化和推广了量子逻辑意义下的 Büchi 基本定理.
关键词: 量子逻辑;正交模格;量子 Müller 自动机;量子无穷正则语言;单体二阶量子逻辑;Büchi 定理
中图法分类号: TP301 **文献标识码**: A

中文引用格式: 韩召伟,李永明.量子 Müller 自动机与单体二阶量子逻辑.软件学报,2014,25(1):27−36. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4406.htm
英文引用格式: Han ZW, Li YM. Quantum Müller automata and monadic second-order quantum logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(1):27−36 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4406.htm

Quantum Müller Automata and Monadic Second-Order Quantum Logic

HAN Zhao-Wei[1,2], LI Yong-Ming[2]

[1](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[2](College of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
Corresponding author: HAN Zhao-Wei, E-mail: hanzw888@snnu.edu.cn

Abstract: This paper introduces the notion of quantum Müller automaton (LVMA), provides the concept of quantum recognizable finite step language and the means of quantum state construction, and then proves the fact that four types of LVMA can equivalently constructed from each other. By using those equivalent relations, it establishes the algebraic and level characterizations of quantum regular infinite languages, and also explores the closed properties of these quantum infinite languages in details under some infinite regular operations in particular at the same time. Meanwhile, this study shows that the behaviors of quantum Müller automata are precisely the quantum languages definable with sentences of the monadic second-order quantum logic (LVMSO), expanding the fundamental Büchi theorem to quantum setting.
Key words: quantum logic; orthomodular lattice; quantum Müller automaton; quantum infinite regular language; monadic second-order quantum logic; Büchi theorem

量子计算的思想源于物理与计算之间的联系[1,2],特别是 Shor 于 1994 年发现在量子计算机上进行大数分解的多项式时间算法,Grover 于 1996 年为模式识别和数据挖掘发展了平方根时间的量子搜索算法.由于大数分解和数据挖掘是计算机科学的中心问题,所以此后,量子计算成为物理学和计算机科学的一个日益活跃的研究领域,越来越受到人们的关注和重视.由于量子计算的快速发展,而量子算法相对于传统算法具有无与伦比的优势(在传统经典计算中可能需要消耗指数时间,而在量子算法的支持下可能需要多项式时间),因此,传统的计算模

* 基金项目: 国家自然科学基金(11271237, 11226266); 陕西师范大学科研启动基金(999553)
收稿时间: 2010-10-20; 修改时间: 2012-04-11; 定稿时间: 2013-03-26

型已经不适用于量子系统.另外,为了揭示量子计算的逻辑基础,应明生等人[3−7]将量子逻辑定义为完备的正交模格值逻辑,采用语义分析的方法建立了基于量子逻辑的有穷自动机理论,是量子计算逻辑基础方面的一个重要研究方向.目前,已经得到很多与经典逻辑意义下不同的结果,其本身可认为是一般有穷自动机理论的深化和推广.特别地,在文献[3,4]中,应明生给出了基于量子逻辑自动机的重要定理的成立都依赖于正交模格中子集的交换子的条件,也就是对应定理的完全成立依赖于正交模格的分配律,从而又还原到 Boolean 逻辑或者经典逻辑的情形.本文旨在采用语义分析方法,将经典无穷计算理论中 Müller 自动机[8−12]的相关结论放在量子结构中重新考虑,利用文献[5−7]引入的量子状态构造方法,将量子计算理论丰富和深化,完善量子无穷计算理论的代数刻画问题;同时,构建无穷计算模型的逻辑刻画,给出接受语言相应的单体二阶量子逻辑描述,揭示量子结构所独具的特色,得到比较系统和完整的结果.

1 量子 Müller 自动机的定义及其性质

量子逻辑是指真值论域为完备正交模格$\mathcal{L}$的逻辑,也称为正交模格值逻辑,详见文献[3−7].完备的正交模格[13]是七元组$\mathcal{L}=(L,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$,其中,$\mathcal{L}=(L,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$是完备格;0 和 1 分别是最小元与最大元;$\leqslant$是偏序;对$X\subseteq L$,$\wedge X$ 与$\vee X$ 分别表示 X 的最大下界与最小上界;一元运算$\perp$是 L 上的正交补,满足:对 $a,b\in L,a\wedge a^{\perp}=0,a\vee a^{\perp}=1$; $a^{\perp\perp}=a;a\leqslant b$ 蕴涵 $b^{\perp}\leqslant a^{\perp}$.同时,$\mathcal{L}$满足正交模律:对 $a,b\in L,a\leqslant b$ 蕴涵 $a\vee(a^{\perp}\wedge b)=b$.在$\mathcal{L}$上定义蕴含算子$\rightarrow:L\times L\rightarrow L$满足:对 $a,b\in L,a\leqslant b$ 当且仅当 $a\rightarrow b=1$.本文假设$\rightarrow$为 Sasaki 蕴涵,即 $a\rightarrow b=a^{\perp}\vee(a\wedge b)$;双蕴涵$\leftrightarrow$定义为:对 $a,b\in L$, $a\leftrightarrow b=(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$.正交模格值逻辑的语法与经典的一阶逻辑类似.$\neg,\vee,\rightarrow$是 3 个原始连接词,$\exists$是原始量词.$\wedge,\leftrightarrow$以及$\forall$由$\neg,\vee,\rightarrow$和$\exists$定义.另外,需使用集合论公式$\in,\subseteq,\equiv$,其中,$\in$是二元(原始)谓词符号,类似地,可用$\in$来定义$\subseteq$和$\equiv$.语义方面,将$\neg,\vee$和$\rightarrow$分别解释为$\mathcal{L}$中的运算$\perp,\vee$和$\rightarrow$;$\exists$解释为$\mathcal{L}$中的最小上界,集合论公式 $x\in A$ 的真值是$\lceil x\in A\rceil=A(x)$;公式φ是有效的当且仅当$\lceil\varphi\rceil=1$,并记为$\models^{\mathcal{L}}\varphi$.对$\mathcal{L}$的有限子集 X,定义 X 的交换子(commutator)$\gamma(X)$如下:$\gamma(X)=\vee\{\wedge_{a\in X}a^{f(a)}|f:X\rightarrow\{1,-1\}$为映射$\}$,其中,$a^1=a,a^{-1}=a^{\perp}$.

定义集合$\Sigma^{\omega}=\{\alpha|\alpha:\omega\rightarrow\Sigma\}$,其中,$\alpha$是一个从自然数集$\omega=\{0,1,2,\ldots\}$到$\Sigma$的映射,通常记为

$$\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(n)\alpha(n+1)\ldots,$$

称Σ^{ω}中的元素α为无穷(长度)输入字符串(无穷输入串或无穷词),一般用字母$\alpha,\beta,\gamma,\ldots$来表示.

定义 1. 量子 Müller 自动机(也称为量子逻辑值 Müller 自动机,简称 LVMA)是五元组$\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,其中,

- Q,Σ都是非空有限集,分别表示有限状态集和有限输入符号集;
- $I:Q\rightarrow\mathcal{L}$,即 Q 的$\mathcal{L}$值子集,表示初始状态;
- $\delta:Q\times\Sigma\times Q\rightarrow\mathcal{L}$表示状态转移函数;
- $\mathcal{F}\subseteq 2^{Q}$表示终状态.

如下命题:

- q 为初始状态,记为 $q\in I$;
- P 为终状态,记为 $P\in\mathcal{F}$;
- 输入σ使状态 q 转移到 p,记为$(q,\sigma,p)\in\delta$.

这些命题的真值分别为 $I(q),1,\delta(q,\sigma,p)$.

以下记描述 LVMA $\mathcal{A}^{\omega}$所识别(接受)的逻辑语言的原子命题全体之集为 $atom(\mathcal{A}^{\omega})$,即

$$atom(\mathcal{A}^{\omega})=\{“q\in I”|q\in Q\}\cup\{“P\in\mathcal{F}”|P\subseteq Q\}\cup\{“(q,\sigma,p)\in\delta”|p,q\in Q,\sigma\in\Sigma\}.$$

注 1:

(i) 定义 1 中,量子 Müller 自动机与文献[8−12]中经典 Müller 自动机定义的不同之处在于:本文初始状态之集 I 为$\mathcal{L}$值有限子集,即量子之集;状态转移函数为正交模格$\mathcal{L}$中的格值,这一定义能够确保 LVMA 接受一定真值程度的无穷字符串(在给定的量子逻辑中),从而能够识别量子语言;

(ii) 当限定$\mathcal{L}=\{0,1\}$,即 Boolean 代数,量子 Müller 自动机退化为经典 Müller 自动机.因此,本定义可以认为是经典二值逻辑下 Müller 自动机理论的推广.

定义 2. 设$\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$是 LVMA,若$\delta:Q\times\Sigma\times Q\to\{0,1\}$表示状态转移函数,此时,称 LVMA 为具有分明状态转移函数的简单非确定型 Müller 自动机(简称 LVSNMA).

定义 3. 设$\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$是 LVMA,若 $I:Q\to\mathcal{L}$,即 Q 的$\mathcal{L}$值子集,表示初始状态,满足存在唯一的状态 $q\in Q$ 使得$I(q)>0$,而$\delta:Q\times\Sigma\times Q\to\mathcal{L}$表示状态转移函数,且满足对任意$q\in Q,\sigma\in\Sigma$,存在唯一的状态$p$使得$\delta(q,\sigma,p)>0$,此时,称 LVMA 为确定型 Müller 自动机(简称 LVDMA).

定义 4. 设$\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$是 LVMA,若 $I:Q\to\mathcal{L}$,即 Q 的$\mathcal{L}$值子集,表示初始状态,满足存在唯一的状态 $q\in Q$ 使得 $I(q)>0$,且$\delta:Q\times\Sigma\to Q$ 表示状态转移函数,这时,称 LVMA 为具有分明状态转移函数的简单确定型 Müller 自动机(简称 LVSDMA).

设$\mathcal{A}^\omega$是一个 LVMA,令 $T(Q,\Sigma)=(Q\times\Sigma\times Q)^\omega$,对任意$\alpha=\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(n)\alpha(n+1)\ldots\in\Sigma^\omega$,定义$\mathcal{A}^\omega$在输入$\alpha$下的路径为$\varrho(\alpha)=t(0)t(1)t(2)\ldots\in T(Q,\Sigma)$,其中,$t(i)=(q,\alpha(i),q_{i+1})\in\delta,q_i\in Q,i\geqslant 0$.在不引起混淆的情况下,路径$\varrho(\alpha)$有时也简记为$\varrho$.另外,引入下列记号:

- 用 $b(\varrho)$表示路径ϱ中出现的第 1 个状态 q_0,即 $b(\varrho)=q_0$;然而,有时α也称为路径ϱ的标记,即 $lb(\varrho)=\alpha$;
- 用$\mathcal{R}$表示$\mathcal{A}^\omega$在输入α下路径的全体,即$\mathcal{R}=\{\varrho|lb(\varrho)=\alpha\}\subseteq T(Q,\Sigma)$;
- 用$\exists^\omega n$ 表示量词“存在无穷多个 n”;
- 用 $In(\varrho)$表示路径ϱ上出现无穷多次的状态之集,即 $In(\varrho)=\{q\in Q|\exists^\omega n\in\omega.t(n)=(q,\alpha(n),q_{n+1})\}$.

路径ϱ称为有效的,若满足:$In(\varrho)$本身构成终状态之集$\mathcal{F}$中的一个元素,即 $In(\varrho)\in\mathcal{F}$.

以下为了叙述方便,用$\Lambda^\omega(\Sigma)$记输入集Σ上全体 LVMA 之集.

定义 5. 设$\mathcal{A}^\omega\in\Lambda^\omega(\Sigma)$,定义 $T(Q,\Sigma)$上$\mathcal{L}$值(一元)路径谓词 $path_{\mathcal{A}}^\omega\in\mathcal{L}(T(Q,\Sigma))$ (即从 $T(Q,\Sigma)$到$\mathcal{L}$的映射)为:对任意$\varrho=t(0)t(1)t(2)\ldots\in T(Q,\Sigma)$, $path_{\mathcal{A}}^\omega(\varrho)\overset{def}{=}\wedge_{i\geqslant 0}[(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\in\delta]$;而命题 $path_{\mathcal{A}}^\omega(\varrho)$ 的真值定义为

$$\lceil path_{\mathcal{A}}^\omega(\varrho)\rceil\overset{def}{=}\wedge_{i\geqslant 0}\,\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1}).$$

定义 6. 设$\mathcal{A}^\omega\in\Lambda^\omega(\Sigma)$,定义$\Sigma^\omega$上$\mathcal{L}$值(一元)可识别谓词 $rec_{\mathcal{A}}^\omega\in\mathcal{L}(\Sigma^\omega)$ (即从Σ^ω到$\mathcal{L}$的映射)为:对任意$\alpha=\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\ldots\in\Sigma^\omega$, $rec_{\mathcal{A}}^\omega(\alpha)\overset{def}{=}(\exists\varrho\in\mathcal{R}).(b(\varrho)\in I\wedge lb(\varrho)=\alpha\wedge path_{\mathcal{A}}^\omega(\varrho)\wedge In(\varrho)\in\mathcal{F})$;而命题 $rec_{\mathcal{A}}^\omega(\alpha)$ 的真值定义为

$$\lceil rec_{\mathcal{A}}^\omega(\alpha)\rceil=\vee\{I(b(\varrho))\wedge\lceil path_{\mathcal{A}}^\omega(\varrho)\rceil\,|\,\varrho\in\mathcal{R},lb(\varrho)=\alpha,In(\varrho)\in\mathcal{F}\}.$$

注 2:由定义 3 和定义 4 可知:

$$\begin{aligned}\lceil rec_{\mathcal{A}}^\omega(\alpha)\rceil&=\vee\{I(b(\varrho))\wedge\lceil path_{\mathcal{A}}^\omega(\varrho)\rceil\,|\,\varrho\in\mathcal{R},lb(\varrho)=\alpha,In(\varrho)\in\mathcal{F}\}\\&=\vee\{I(q_0)\wedge\wedge_{i\geqslant 0}\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\,|\,\varrho\in\mathcal{R},lb(\varrho)=\alpha,In(\varrho)\in\mathcal{F}\}.\end{aligned}$$

进而,称 $rec_{\mathcal{A}}^\omega$ 为量子 Müller 自动机$\mathcal{A}^\omega$识别(接受)的Σ上的$\mathcal{L}$值ω-语言(无穷语言).用$\mathcal{L}(\Sigma^\omega)$表示$\Sigma^\omega$上的所有$\mathcal{L}$值$\omega$-语言(无穷语言)之集,也称为$\Sigma$上的量子$\omega$-正则语言(无穷正则语言).对 $A\in\mathcal{L}(\Sigma^\omega)$,若存在 LVMA $\mathcal{A}^\omega$使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^\omega$,则称 A 为Σ上的量子ω-正则语言.

当两 LVMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$和 $\mathcal{A}_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$ 识别(接受)相同的量子ω-正则语言时,即对任意$\alpha\in\Sigma^\omega$, $\lceil rec_{\mathcal{A}}^\omega(\alpha)\rceil=\lceil rec_{\mathcal{A}_1}^\omega(\alpha)\rceil$,称$\mathcal{A}^\omega$和 $\mathcal{A}_1^\omega$ 相互等价,记为 $\mathcal{A}^\omega\equiv\mathcal{A}_1^\omega$.

首先说明,对于经典 Müller 自动机成立的某些结论,由于本身依赖于赋值域的分配律,而量子逻辑本身缺少分配律,因此在量子逻辑框架下一般不再成立.

设 $\mathcal{A}_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$ 和 $\mathcal{A}_2^\omega=(Q_2,\Sigma,\delta_2,I_2,\mathcal{F}_2)$ 是任意两个 LVMA,构造乘积自动机如下:

$$\mathcal{A}_1^\omega\times\mathcal{A}_2^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F}),$$

其中,$Q=Q_1\times Q_2,I=I_1\times I_2,\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$.

而$\delta:Q\times\Sigma\times Q\to\mathcal{L}$定义为:对任意$(p_1,p_2),(q_1,q_2)\in Q,\sigma\in\Sigma$,都有$\delta((p_1,p_2),\sigma,(q_1,q_2))=\delta(p_1,\sigma,q_1)\wedge\delta(p_2,\sigma,q_2)$.

命题 1. 若 $\mathcal{A}_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$ 和 $\mathcal{A}_2^\omega=(Q_2,\Sigma,\delta_2,I_2,\mathcal{F}_2)$ 是任意两个 LVMA,以下结论成立:

(1) 对任意$\alpha\in\Sigma^{\omega}$,总有$\vDash^{\mathcal{L}}\gamma(atom(\mathcal{A}_1^{\omega})\cup atom(\mathcal{A}_2^{\omega}))\rightarrow(rec_{\mathcal{A}_1}^{\omega}(\alpha)\wedge rec_{\mathcal{A}_2}^{\omega}(\alpha)\leftrightarrow rec_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2}^{\omega}(\alpha))$;

(2) 如下条件等价:

(i) $\mathcal{L}$为 Boolean 代数;

(ii) 对任意$\alpha\in\Sigma^{\omega}$,恒有$\vDash^{\mathcal{L}} rec_{\mathcal{A}_1}^{\omega}(\alpha)\wedge rec_{\mathcal{A}_2}^{\omega}(\alpha)\leftrightarrow rec_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2}^{\omega}(\alpha)$.

证明:

(1) 类似文献[3]中的 Proposition 6.5,易证结论成立;

(2) (i)⇒(ii)显然;(ii)⇒(i),只需证明:对任意 $a,b,c\in\mathcal{L}$,都有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立.

对任意 $a,b,c\in\mathcal{L}$,构造 LVMA 如下: $\mathcal{A}_1^{\omega}=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$ 和 $\mathcal{A}_2^{\omega}=(Q_2,\Sigma,\delta_2,I_2,\mathcal{F}_2)$,其中,$Q_1=I_1=\{p\}$,$\Sigma=\{\sigma\}$,$\mathcal{F}_1=\{\{p\}\}$,$\delta_1(p,\sigma,p)=a$,$Q_2=\{q,r,s\}$,$I_2=\{q\}$,$\mathcal{F}_2=\{\{r,s\}\}$,$\delta_2(q,\sigma,r)=b$,$\delta_2(q,\sigma,s)=c$,$\delta_2(r,\sigma,r)=1$,$\delta_2(s,\sigma,s)=1$.易证:

$$\left\lceil rec_{\mathcal{A}_1}^{\omega}(\sigma^{\omega})\right\rceil=a,\left\lceil rec_{\mathcal{A}_2}^{\omega}(\sigma^{\omega})\right\rceil=b\vee c.$$

而$\left\lceil rec_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2}^{\omega}(\sigma^{\omega})\right\rceil=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,由条件(ii)可知,分配律成立.

设$\mathcal{A}^{\omega}=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$是任一 LVMA,对任意 $r\in\mathcal{L}$,构造 LVMA 如下:$r\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,其中,$Q=Q_1$,$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$,$\delta=\delta_1$,$I=r\wedge I_1$.即,对任意 $q\in Q$,$I(q)=r\wedge I_1(q)$. □

命题 2. 若$\mathcal{A}^{\omega}=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$是任一 LVMA,则对任意 $r\in\mathcal{L}$,以下结论成立:

(1) 对任意$\alpha\in\Sigma^{\omega}$,总有$\vDash^{\mathcal{L}}\gamma(atom(\mathcal{A}^{\omega})\cup atom(\{r\}))\rightarrow(r\wedge rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\leftrightarrow rec_{r\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha))$;

(2) 如下条件等价:

(i) $\mathcal{L}$为 Boolean 代数;

(ii) 对任意$\alpha\in\Sigma^{\omega}$,恒有$\vDash^{\mathcal{L}} r\wedge rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\leftrightarrow rec_{r\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)$.

证明:

(1) 类似文献[3]中的 Proposition 6.5,易证结论成立;

(2) (i)⇒(ii)显然;(ii)⇒(i),只需证明对任意 $a,b,c\in\mathcal{L}$,都有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立.

对任意 $a,b,c\in\mathcal{L}$,构造 LVMA 如下:$\mathcal{A}^{\omega}=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$,其中,

$$Q=\{p,q,s\},\Sigma=\{\sigma\},I_1=\{p\},\mathcal{F}_1=\{\{q,s\}\},\delta(p,\sigma,q)=b,\delta(q,\sigma,q)=1,\delta(p,\sigma,s)=c,\delta(s,\sigma,s)=1.$$

易证$\left\lceil rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\sigma^{\omega})\right\rceil=b\vee c$.而$\left\lceil rec_{a\mathcal{A}}^{\omega}(\sigma^{\omega})\right\rceil=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,由条件(ii)可知,$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立. □

注 3:命题 1 和命题 2 说明了量子ω-正则语言对于交运算和数量积运算一般不封闭,而若加入交换子的条件(即保证了局部分配律成立),这些结论依然是成立的.实际上,还可类似说明:量子ω-正则语言对于补运算、柯西连接运算、同态和ω-Kleene 闭包运算(具体运算的定义见后文)是否封闭,必须取决于分配律是否成立.但庆幸的是,以上运算取决于分配律并不是本质的性质,而是传统的子集构造方法在量子逻辑框架下不再适用.因此,有必要进一步提出新的构造技术以及深化和研究量子ω-正则语言的代数刻画,从而保证以上性质在量子逻辑框架下依然成立.

为引入量子状态构造方法,以下说明 LVMA 识别(或接受)的量子ω-正则语言的像集总是有限的.

引理 1[14]. 设 l 为格,X 为 l 的有限子集,则由 X 生成的交$\wedge$-半格与并$\vee$-半格(记为 $X_{\wedge}$和 $X_{\vee}$)都是有限的,且

$$X_{\wedge}=\{x_1\wedge\ldots\wedge x_k|k\geqslant 1,x_1,\ldots,x_k\in X\}\cup\{1\},X_{\vee}=\{x_1\vee\ldots\vee x_k|k\geqslant 1,x_1,\ldots,x_k\in X\}\cup\{0\}.$$

命题 3. 对任一 LVMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,$\mathcal{A}^{\omega}$可识别的量子$\omega$-正则语言 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$ 作为从Σ^{ω}到$\mathcal{L}$的函数,其像集$Im(rec_{\mathcal{A}}^{\omega})=\{r\in\mathcal{L}\mid\exists\alpha\in\Sigma^{\omega}.\left\lceil rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\right\rceil=r\}$是$\mathcal{L}$的有限子集.

证明:类似文献[7],同理可证. □

2 量子 Müller 自动机的代数刻画

定义 7. 设 $A\in\mathcal{L}(\Sigma^{\omega})$,若存在 $a_1,a_2,\ldots,a_k\in\mathcal{L}-\{0\}$及分明 Müller 自动机可识别的$\omega$-正则语言 $L_1,\ldots,L_k\subseteq\Sigma^{\omega}$,使得$A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,其中,$1_{L_i}$ 表示 L_i 的特征函数,则称 A 为量子有限步 Müller 自动机可识别ω-语言,其全体之集记为

$step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$,它代表了可被识别的量子$\omega$-正则语言的全体.

命题 4. 设$\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$是任一 LVMA,则$\mathcal{L}$值(一元)可识别谓词 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}\in\mathcal{L}(\Sigma^{\omega})$ 是量子有限步 Müller 自动机可识别ω-语言,即 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$.

证明:令 $X=Im(I)\cup Im(\delta)$,则 X 显然为$\mathcal{L}$的有限子集.取 $Y_1=X_{\wedge}$,由引理 1 可知,Y_1 必然是$\mathcal{L}$的有限子集,不妨设 $Y=Y_1-\{0\}=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$.对任意 $a_i\in Y$,构造经典 Müller 自动机 $\mathcal{A}_{a_i}=(Q',\Sigma,\delta',I',\mathcal{F}_{a_i})$ 如下:令 $Q'=Q\times Y$,显然,Q'是有限集合.对任意$\sigma\in\Sigma$和$(p,a),(q,b)\in Q',p,q\in Q,a,b\in\mathcal{L}$:

- 初始状态 $I':Q'\to\{0,1\}$定义为 $I'((p,a))=\begin{cases}1, & 若 a=I(p)\\ 0, & 否则\end{cases}$;
- 状态转移函数$\delta':Q'\times\Sigma\times Q'\to\{0,1\}$定义为 $\delta'((p,a),\sigma,(q,b))=\begin{cases}1, & 若 b=a\wedge\delta(p,\sigma,q)\\ 0, & 否则\end{cases}$;
- 终状态 $\mathcal{F}_{a_i}\subseteq 2^{Q'}$ 定义为 $\mathcal{F}_{a_i}=\{F_1\times\{a_i\}\mid F_1\in\mathcal{F}\}$.

易知δ'是良定义的.显然,如此构造的 Müller 自动机 $\mathcal{A}_{a_i}$ 识别的语言为

$$L(\mathcal{A}_{a_i})=\{\alpha\in\Sigma^{\omega}\mid \varrho\in\mathcal{R},In(\varrho)\in\mathcal{F},lb(\varrho)=\alpha,\lceil rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\rceil=a_i\}.$$

进而,由定义 6 和以上构造可知:

$$\begin{aligned}\lceil rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\rceil&=\vee\{I(b(\varrho))\wedge\lceil path_{\mathcal{A}}^{\omega}(\varrho)\rceil\mid \varrho\in\mathcal{R},lb(\varrho)=\alpha,\\ &In(\varrho)\in\mathcal{F}\}=\vee_{a_i\in Y}\vee\{I(b(\varrho))\wedge\lceil path_{\mathcal{A}}^{\omega}(\varrho)\rceil\mid \varrho\in\mathcal{R},lb(\varrho)=\alpha,\\ &In(\varrho)\in\mathcal{F}\}=\vee_{a_i\in Y}\{a_i\mid \alpha\in L(\mathcal{A}_{a_i}),\varrho\in\mathcal{R},lb(\varrho)=\alpha,\\ &In(\varrho)\in\mathcal{F}\}=\vee_{a_i\in Y}a_i\wedge 1_{L(\mathcal{A}_{a_i})}(\alpha)=\vee_{a_i\in Y}(a_i\wedge 1_{L(\mathcal{A}_{a_i})})(\alpha).\end{aligned}$$

综上可知,$rec_{\mathcal{A}}^{\omega}=\vee_{a_i\in Y}a_i\wedge 1_{L(\mathcal{A}_{a_i})}$.又由定义 7 可知,$rec_{\mathcal{A}}^{\omega}\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$. □

推论 1. 设$\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$是任一 LVSNMA(或 LVDMA,或 LVSDMA),则$\mathcal{L}$值可识别谓词 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}\in\mathcal{L}(\Sigma^{\omega})$ 是量子有限步 Müller 自动机可识别ω-语言,即 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$.

命题 5. 设 $A:\Sigma^{\omega}\to\mathcal{L}$为量子$\omega$-语言,以下论断等价:

(1) $A\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$;

(2) 存在 LVMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(3) 存在 LVSNMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$.

证明:

(1)⇒(3):由定义可知,$A=\vee_{i=1}^{k}a_i1_{L_i}$,其中,$L_1,\dots,L_k\subseteq\Sigma^{\omega}$是分明 Müller 自动机可识别的$\omega$-正则语言,令识别 L_i 的 MA 为$\mathcal{A}_i=(Q_i,\Sigma,E_i,q_{0i},\mathcal{F}_i)$,且当 $i\neq j$ 时,$Q_i\cap Q_j=\varnothing$.构造 LVSNMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$如下:

$$Q=\bigcup_{i=1}^{k}Q_i,I(q_{0i})=a_i,\mathcal{F}=\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{F}_i.$$

而$\delta:Q\times\Sigma\times Q\to\{0,1\}$为 $\delta(p,\sigma,q)=\begin{cases}1, & 若(p,\sigma,q)\in E_i,p,q\in Q_i\\ 0, & 否则\end{cases}$,则易证 $A=\lceil rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\rceil=\vee_{i=1}^{k}a_i1_{L_i}$.

(3)⇒(2)⇒(1):由定义 1、定义 2 以及命题 4 显然. □

命题 6. 设 $A:\Sigma^{\omega}\to\mathcal{L}$为量子$\omega$-语言,以下论断等价:

(1) $A\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$;

(2) 存在 LVDMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(3) 存在 LVSDMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$.

证明:(1)⇒(3)⇒(4)⇒(1):同理可证. □

命题 7. 设 $A:\Sigma^{\omega}\to\mathcal{L}$为量子$\omega$-语言,$A$ 能被 LVMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$识别当且仅当存在 LVDMA $\mathcal{A}_1^{\omega}=(Q_1,\Sigma,$

$\delta_1,I_1,\mathcal{F}_1)$,使得对任意$\alpha\in\Sigma^\omega$都有$\models^{\mathcal{L}} rec_{\mathcal{A}}^{\omega}(\alpha)\leftrightarrow rec_{\mathcal{A}_1}^{\omega}(\alpha)$.

证明:由命题 5 和命题 6 结合经典自动机理论可知,结论显然成立. □

定理 1. 设 $A:\Sigma^\omega\to\mathcal{L}$为量子$\omega$-语言,以下论断等价:

(1) $A\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$;

(2) 存在 LVMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(3) 存在 LVSNMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(4) 存在 LVDMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(5) 存在 LVSDMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$.

由定义 7 和命题 4 以及经典 Müller 自动机理论易知以下定理成立:

定理 2. 设 $A:\Sigma^\omega\to\mathcal{L}$为量子$\omega$-语言,以下论断等价:

(1) 存在 LVMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(2) 存在 $a_1,\ldots,a_k\in\mathcal{L}-\{0\}$以及$\omega$-正则语言 $L_1,\ldots,L_k$,使得 $A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,其中,$1_{L_i}$ 表示 L_i 的特征函数;

(3) 存在 $a_1,\ldots,a_k\in\mathcal{L}-\{0\}$以及两两不交的$\omega$-正则语言 $L_1,\ldots,L_k$,使得 $A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$.

定理 3. 设 $A:\Sigma^\omega\to\mathcal{L}$为量子$\omega$-语言,以下论断等价:

(1) 存在 LVMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,使得 $A=rec_{\mathcal{A}}^{\omega}$;

(2) 集合 $Im(A)$为有限集,且对任意 $a\in\mathcal{L}-\{0\}$,A 的 a-截集 $A_a=\{\alpha\in\Sigma^\omega|A(\alpha)\geqslant a\}$是$\Sigma$上的$\omega$-正则语言,且 $A=\vee_{a\in\mathcal{L}-\{0\}}a1_{A_a}$,其中,$1_{A_a}$ 表示 A_a 的特征函数;

(3) 集合 $Im(A)$为有限集,且对任意 $a\in\mathcal{L}-\{0\}$,A 的 a-层集 $A_{[a]}=\{\alpha\in\Sigma^\omega|A(\alpha)=a\}$是$\Sigma$上的$\omega$-正则语言,且 $A=\vee_{a\in\mathcal{L}-\{0\}}a1_{A_{[a]}}$,其中,$1_{A_{[a]}}$ 表示 $A_{[a]}$的特征函数.

3 量子ω-正则语言关于正则运算的封闭性

对任意 $A,B\in\mathcal{L}(\Sigma^\omega),a\in\mathcal{L}$,并 $A\vee B$、交 $A\wedge B$、补 $A^\perp$以及数量积 aA 定义为:对任意$\alpha\in\Sigma^\omega$,$A\vee B(\alpha)=A(\alpha)\vee B(\alpha)$, $A\wedge B(\alpha)=A(\alpha)\wedge B(\alpha)$,$A^\perp(\alpha)=A(\alpha)^\perp$,$aA(\alpha)=a\wedge A(\alpha)$;对任意 $U\in\mathcal{L}(\Sigma^*)$(详见文献[5]),$A\in\mathcal{L}(\Sigma^\omega)$,柯西连接 UA 定义为:对任意$\alpha\in\Sigma^\omega$,$UA(\alpha)=\vee\{U(\alpha_1)\wedge A(\alpha_2):\alpha_1\alpha_2\in\alpha,\alpha_1\in\Sigma^*,\alpha_2\in\Sigma^\omega\}$;若 $V\in\mathcal{L}(\Sigma^*)$,且进一步满足$\varepsilon\notin supp(V)$,即不包含空语言,$V$ 的ω-Kleene 闭包 V^ω定义为:对任意$\alpha\in\Sigma^\omega$,$V^\omega(\alpha)=\vee\{\wedge_{i\geqslant 0}V(\alpha_i):\alpha=\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots,\alpha_i\in\Sigma^*,i\in\omega\}$.

定理 4. 集合 $step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$ 关于量子语言的有限并、有限交、数量积和补运算封闭.

证明:对任意 $A,B\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$,由定理 2(3),令 $A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,$B=\vee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}$,其中,$L_i$ 和 M_j 都是经典 Müller 自动机可识别的ω-正则语言,且 $\{L_i\}_{i=1}^{k}$ 两两不交,$\{M_j\}_{j=1}^{n}$ 同样两两不交.

- 关于有限并,易知 $A\vee B=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}\vee\vee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}$,因此由定理 2(2), $A\vee B\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$;
- 关于有限交,因为 $A\wedge B(\alpha)=A(\alpha)\wedge B(\alpha)=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}(\alpha)\wedge\vee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}(\alpha)=\vee_{i=1}^{k}\vee_{j=1}^{n}(a_i\wedge b_j)1_{L_i\cap M_j}(\alpha)$, 故
$$A\wedge B\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma);$$
- 关于数量积,对 $r\in\mathcal{L}$,易知 $rA=\vee_{i=1}^{k}(r\wedge a_i)1_{L_i}$,因此 $rA\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$;
- 关于补运算,易知 $A^\perp=\vee_{i=1}^{k}a_i{}^\perp 1_{L_i}\vee 1_{\Sigma^\omega-(L_1\cup\cdots\cup L_k)}$,因此,由定理 2(2)可知, $A^\perp\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$. □

以下定理中出现的 $step^r(\Sigma)$表示$\mathcal{L}$-值有限步识别有限正则语言,详见文献[5].

定理 5. 对于集合 $step^r(\Sigma)$和集合 $step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$,以下结论成立:

(1) 若 $U\in step^r(\Sigma)$, $A\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$, 则 $UA\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$;

(2) 若 $V\in step^r(\Sigma)$,且进一步满足$\varepsilon\notin supp(V)$,即不包含空语言,则 $V^\omega\in step_{\mathcal{M}}^{\omega}(\Sigma)$ (ω-Kleene 闭包).

证明:

(1) 因为 $U\in step^{r}(\Sigma)$, $A\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma)$, 因此, $U=\vee_{i=1}^{m}a_i 1_{U_i}$, $A=\vee_{j=1}^{k}b_j 1_{M_j}$,其中,U_i是经典正则语言,而M_j是经典ω-正则语言,且 $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ 两两不交, $\{M_j\}_{j=1}^{n}$ 同样两两不交.进而易知:

$$UA(\alpha)=\vee\{U(\alpha_1)\wedge A(\alpha_2)\mid\alpha=\alpha_1\alpha_2\}=\vee\{\vee_{i=1}^{m}a_i 1_{U_i}(\alpha_1)\wedge\vee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}(\alpha_2)\mid\alpha=\alpha_1\alpha_2\}=\vee_{i=1}^{m}\vee_{j=1}^{n}(a_i\wedge b_j)1_{U_i\cdot M_j}(\alpha),$$

因此,由定理 2(2)可知, $UA\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

(2) 类似文献[7],同理可证. □

定理 6. 设$\mathcal{L}_1=(L_1,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$和$\mathcal{L}_2=(L_2,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$是两个完备正交模格,且 $g:\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2$ 是任一映射,若 $A\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma)$, 则 $g(A)\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

证明:因为 $A\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma)$, 由定理 2(3)可知, $A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,其中,L_i是经典 Müller 自动机可识别的ω-正则语言,且 $\{L_i\}_{i=1}^{k}$ 两两不交,因此 $g(A)=g(\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i})=\vee_{i=1}^{k}g(a_i)1_{L_i}$,由定理 2(2)可知, $g(A)\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma)$. □

定理 7. 设 $h:\Sigma_1^{\omega}\to\Sigma_2^{\omega}$ 为同态,以下结论成立:

(1) 若 $A\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma_2)$, 则 $h^{-1}(A)=A\circ h\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma_1)$;

(2) 设 h 满足:对任意$\tau\in\Sigma_1,h(\tau)\neq\varepsilon$,若 $B\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma_1)$,则 $h(B)\in step^{\omega}_{\mathcal{M}}(\Sigma_2)$,且 $h(B)(\alpha)=\vee\{B(\nu):h(\nu)=\alpha\}$.

证明:类似于文献[7],同理可证. □

命题 8.

(1) 对任意 $A,B\in\mathcal{L}(\Sigma^{*})$和 $C\in\mathcal{L}(\Sigma^{\omega})$,总有$\models^{\mathcal{L}}\gamma(Im(A)\cup Im(B)\cup Im(C))\to(AB)C\leftrightarrow(A(BC))$;

(2) 以下条件等价:

(2.1) $\mathcal{L}$为 Boolean 代数;

(2.2) 对任意 $A,B\in\mathcal{L}(\Sigma^{*})$和 $C\in\mathcal{L}(\Sigma^{\omega})$,恒有$(AB)C=A(BC)$.

证明:

(1) 类似于文献[5],同理可证;

(2) (2.1)⇒(2.2)显然;(2.2)⇒(2.1),只需证明对任意 $a,b,c\in\mathcal{L}$都有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立.

对$\tau\in\Sigma$,取 $A,B\in\mathcal{L}(\Sigma^{*})$和 $C\in\mathcal{L}(\Sigma^{\omega})$如下:

$$A(w)=\begin{cases}b, & 若w=\tau\\ 1, & 若w=\varepsilon\\ 0, & 否则\end{cases},\ B(w)=\begin{cases}c, & 若w=\tau\\ 1, & 若w=\varepsilon\\ 0, & 否则\end{cases},\ C(w)=\begin{cases}a, & 若w=\tau^{\omega}\\ 0, & 否则\end{cases},$$

则$(AB)C(\tau^{\omega})=(AB)C(\tau\tau^{\omega})=AB(\tau)\wedge a=((A(\tau)\wedge B(\varepsilon))\vee(A(\varepsilon)\wedge B(\tau)))\wedge a=((b\wedge 1)\vee(1\wedge c))\wedge a=a\wedge(b\vee c)$.

而 $A(BC)(\tau^{\omega})=(A(\tau)\wedge BC(\tau\tau^{\omega}))\vee(A(\varepsilon)\wedge BC(\tau\tau\tau^{\omega}))=(b\wedge a)\vee(1\wedge B(\tau)\wedge C(\tau))=(b\wedge a)\vee(c\wedge a)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,由结合律$(AB)C=A(BC)$成立可知,分配律 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立. □

4 单体二阶量子逻辑及其可定义的语言

限于篇幅,有关单体二阶逻辑的基本知识和相关逻辑符号请参见文献[8−12].

定义 8. 字母表Σ上的 LVMSO 逻辑公式的语构用如下 BNF 形式来定义:

$$\varphi::=r|P_{\sigma}(x)|x\leqslant y|x\in X|\varphi\vee\psi|\neg\varphi|\exists x.\varphi|\exists X.\varphi,$$

其中,$r\in\mathcal{L},\sigma\in\Sigma,x,y$ 为一阶变量,而 X 为二阶集合变量.

由此可诱导如下公式:

- $\varphi\wedge\psi=\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$;
- $\varphi\to\psi=\neg\varphi\vee(\varphi\wedge\psi)$(称为 Sasaki 蕴涵);
- $\varphi\leftrightarrow\psi=(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$;
- $\forall x.\varphi=\neg(\exists x.\neg\varphi)$;
- $\forall X.\varphi=\neg(\exists X.\neg\varphi)$.

以下用 $Free(\varphi)$表示公式φ中出现的全体自由变量,用 $LVMSO(\Sigma)$表示Σ上的所有 LVMSO 公式之集.

定义 9. 设 $\varphi\in LVMSO(\Sigma),\mathcal{V}$为有限变量集且 $Free(\varphi)\subseteq\mathcal{V}$,则$\varphi$的$\mathcal{V}$-语义定义为 $\Sigma_{\mathcal{V}}$ 上的量子ω-语言 $\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}:\Sigma_{\mathcal{V}}^{\omega}\to\mathcal{L}$,对任意$(\alpha,f)\in\Sigma_{\mathcal{V}}^{\omega}$,当$f$不是有效的$(\mathcal{V},\alpha)$指派时,则$\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=0$;否则,$\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}$归纳定义如下:

- $\lceil r\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=r$;
- $\lceil P_\sigma(x)\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\begin{cases}1, & 若\alpha(f(x))=\sigma\\ 0, & 否则\end{cases}$;
- $\lceil x\leqslant y\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\begin{cases}1, & 若f(x)\leqslant f(y)\\ 0, & 否则\end{cases}$;
- $\lceil x\in X\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\begin{cases}1, & 若f(x)\in f(X)\\ 0, & 否则\end{cases}$;
- $\lceil\neg\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)^{\perp}$;
- $\lceil\varphi\vee\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)\vee\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)$;
- $\lceil\exists x.\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\vee\{\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}\cup\{x\}}(\alpha,f[x\to i]):i\in\omega\}$;
- $\lceil\exists X.\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\vee\{\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}\cup\{X\}}(\alpha,f[X\to I]):I\subseteq\omega\}$.

记$\lceil\varphi\rceil=\lceil\varphi\rceil_{Free(\varphi)}$.注意到,若$\varphi$为句子,则$\varphi$无自由变量,且$\lceil\varphi\rceil$为$\Sigma$上的量子$\omega$-语言.

命题 9. 设$\varphi\in LVMSO(\Sigma),Free(\varphi)\subseteq\mathcal{V}$,则$\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\lceil\varphi\rceil(\alpha,f|_{Free(\varphi)})$.

特别地,$\lceil\varphi\rceil$为量子ω-语言$\Leftrightarrow\lceil\varphi\rceil_{\mathcal{V}}$为量子$\omega$-正则语言.

证明:只需对公式φ中出现的连接词与量词的个数施行归纳即可. □

5 量子 Müller 自动机的单体二阶量子逻辑描述

定理 8. 设$\mathcal{A}^{\omega}$是Σ上的任一 $LVMA$,则存在$\xi\in LVMSO(\Sigma)$,使得 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}=\lceil\xi\rceil$.

证明:设 LVMA $\mathcal{A}^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$,且 $rec_{\mathcal{A}}^{\omega}=A$. 令$\mathcal{T}=Q\times\Sigma\times Q$,对$(p,\sigma,q)\in\mathcal{T}$,取集合变量 $X_{p,\sigma,q}$,并令$\mathcal{V}=\{X_{p,\sigma,q}|(p,\sigma,q)\in\mathcal{T}\}$,设$|\mathcal{V}|=m=|Q|^2\cdot|\Sigma|$,其中,$|Q|,|\mathcal{V}|,|\Sigma|$表示集合 $Q,\mathcal{V},\Sigma$中的元素个数,令 $\tilde{X}=(X_1,...,X_m)$.

定义公式φ如下:

$$\varphi(\tilde{X})=Partition(\tilde{X})\wedge\bigwedge_{(p,\sigma,q)\in\mathcal{T}}\forall x.((x\in X_{p,\sigma,q})\to P_\sigma(x))\wedge\forall x.\forall y.(y=S(x)\to\bigvee_{p,q,r\in Q,\sigma,\tau\in\Sigma}(x\in X_{p,\sigma,q})\wedge(y\in X_{q,\tau,r})),$$

其中,$Partition(\tilde{X})=\forall x.\bigwedge_{i=1}^{m}((x\in X_i)\wedge\bigwedge_{j\neq i}\neg(x\in X_j)),(y=S(x))=((x\leqslant y)\wedge\neg(y\leqslant x)\wedge\forall z.(z\leqslant x\vee y\leqslant z))$.

即,公式 $S(x)$表示 x 的后继 x+1,有时也记为 $y=x+1$.

对$\alpha=\sigma_0\sigma_1\sigma_2\ldots\in\Sigma^{\omega}$,令 $Assign(\mathcal{V},\alpha)=\{f\,|\lceil\varphi\rceil(\alpha,f)=1\}$表示所有满足公式$\varphi$的$(\mathcal{V},\alpha)$指派(即$\lceil\varphi\rceil(\alpha,f)=1$)集合,而$\mathcal{R}_\alpha=\{\varrho_\alpha|lb(\varrho)=\alpha\}$表示所有标记为$\alpha$的路径集合.易知,存在从集合 $Assign(\mathcal{V},\alpha)$到集合$\mathcal{R}_\alpha$的一一映射.

定义公式ψ如下:

$$\begin{aligned}\psi(\tilde{X})=&\varphi(\tilde{X})\wedge(\forall x.\bigwedge_{(p,\sigma,q)\in\mathcal{T}}((x\in X_{p,\sigma,q})\to\delta(p,\sigma,q)))\wedge\\&(\exists y.(Initial(y)\wedge\bigvee_{(p,\sigma,q)\in\mathcal{T}}((y\in X_{p,\sigma,q})\wedge I(p))))\wedge\\&(\bigvee_{F\in\mathcal{F}}\exists x.\forall y.(x\leqslant y)\to((\bigvee_{(p,\sigma,q)\in\mathcal{T},q\in F}y\in X_{p,\sigma,q})\wedge\bigwedge_{q\in F}\exists z.((y\leqslant z)\wedge\bigvee_{p\in Q,\sigma\in\Sigma}z\in X_{p,\sigma,q}))),\end{aligned}$$

其中,$Initial(y)=\forall x.y\leqslant x$.直观上,公式 $\bigvee_{F\in\mathcal{F}}\forall x.\exists y.$ 从语义方面来说用来判定 LVMA $\mathcal{A}^{\omega}$在输入$\alpha\in\Sigma^{\omega}$下的每一条路径ϱ_α是否有效,其取值域为$\{0,1\}$.

这时,若$\varrho_\alpha=t(0)t(1)t(2)\ldots=(t(i))_{i\geqslant 0}$为$\mathcal{A}^{\omega}$上的一条以$\alpha$为标记的路径,而 f_{ϱ_α} 为对应的$(\mathcal{V},\alpha)$指派.而对任意 $t\in\mathcal{T}$,令$\varrho_\alpha(t)=\{i|t(i)=t\}$.若$\varrho_\alpha$不是有效路径,由公式 $\bigvee_{F\in\mathcal{F}}\exists x.\forall y.$ 的定义可知,$\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f_{\varrho_\alpha})=0$;否则,$\varrho_\alpha$是有效路径,即

$In(\varrho_\alpha)\in\mathcal{F}$,从而$\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f_{\varrho_\alpha})=I(q_0)\wedge\wedge_{i\geqslant0}\delta(q_i,\sigma_i,q_{i+1})$.

进而,若令$\xi=\exists X_1\ldots\exists X_m\cdot\psi(X_1,\ldots,X_m)$,对任意$\alpha=\sigma_0\sigma_1\sigma_2\ldots\in\Sigma^\omega$,则有:

$$\lceil\xi\rceil(\alpha)=\bigvee_{f\in Assign(\mathcal{V},\alpha)}\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)==\bigvee_{\varrho_\alpha\in\mathcal{R}_\alpha}\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f_{\varrho_\alpha})=\bigvee_{In(\varrho_\alpha)\in\mathcal{F}}(I(q_0)\wedge\wedge_{i\geqslant0}\delta(q_i,\sigma_i,q_{i+1}))$$

$$=\vee\{I(b(\varrho_\alpha))\wedge\lceil path^\omega_{\mathcal{A}}(\varrho_\alpha)\rceil\mid\varrho_\alpha\in\mathcal{R}_\alpha,lb(\varrho_\alpha)=\alpha,In(\varrho_\alpha)\in\mathcal{F}\}=\lceil rec^\omega_{\mathcal{A}}(\alpha)\rceil.$$

综上所述,可知$A=rec^\omega_{\mathcal{A}}=\lceil\xi\rceil$,因此结论成立. □

引理 2. 若$\psi\in LVMSO(\Sigma)$为原子的,则$\lceil\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

证明:若$\psi=a\in\mathcal{L}$,构造 LVMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$如下:$Q=\{q\}$,对任意$\sigma\in\Sigma$,令$\delta(q,\sigma,p)=1,I(q)=a,\mathcal{F}=\{\{q\}\}$.显然有

$$\lceil\psi\rceil=rec^\omega_{\mathcal{A}}=a1_{\Sigma^\omega}.$$

对于$\psi=P_\sigma(x)|x\leqslant y|x\in X$的情形,明显地,$\psi$是经典 MSO 公式,经典构造即可,具体参见文献[8−12].这时,ψ能被经典 Müller 自动机$\mathcal{A}_1^\omega=\{Q,\Sigma,E,q_0,\mathcal{F}\}$所识别.再将$\mathcal{A}_1^\omega$转化为 LVMA $\mathcal{A}^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,\mathcal{F})$如下:$Q,\mathcal{F}$与$\mathcal{A}_1^\omega$相同,而$I(q_0)=1$,对任意$\sigma\in\Sigma,p,q\in Q$,若$(q,\sigma,p)\in E$,则令$\delta(q,\sigma,p)=1$.显然,LVMA $\mathcal{A}^\omega$能识别$\lceil\psi\rceil$. □

引理 3. 若$\varphi,\psi\in LVMSO(\Sigma)$,且$\lceil\varphi\rceil,\lceil\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$,则$\lceil\neg\varphi\rceil,\lceil\varphi\vee\psi\rceil,\lceil\varphi\wedge\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

证明:因$\lceil\neg\varphi\rceil=\lceil\varphi\rceil^\perp,\lceil\varphi\vee\psi\rceil=\lceil\varphi\rceil\vee\lceil\psi\rceil,\lceil\varphi\wedge\psi\rceil=\lceil\varphi\rceil\wedge\lceil\psi\rceil$,由定理 4 可知结论成立. □

引理 4. 设$h:\Sigma_1\to\Sigma_2^*$为任意映射,且满足:对任意$\sigma\in\Sigma_1,h(\sigma)\neq\varepsilon$,则对任意$A^\omega\in\Lambda^\omega(\Sigma),\theta\in\Sigma_2^\omega$,

$$\vDash^{\mathcal{L}}rec^\omega_{h(\mathcal{A})}(\theta)\leftrightarrow(\exists\alpha\in\Sigma_1^\omega.h(\alpha)=\theta)rec^\omega_{\mathcal{A}}(\alpha).$$

即$rec^\omega_{h(\mathcal{A})}=h(rec^\omega_{\mathcal{A}})$.

证明:由定理 7 显然. □

引理 5. 若$\psi\in LVMSO(\Sigma)$,且$\lceil\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$,则$\lceil\exists x.\psi\rceil,\lceil\exists X.\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

证明:令$\mathcal{V}=Free(\exists x.\psi)$,则$x\notin\mathcal{V}$.进而,令$\hbar:\Sigma^\omega_{\mathcal{V}\cup\{x\}}\to\Sigma^\omega_{\mathcal{V}}$为抹去$x$行元素的同态,即对任意$\sigma\in\Sigma,U\subseteq\mathcal{V}\cup\{x\}$,$\hbar(\sigma,U)=(\sigma,U-\{x\})$,则明显地,$\hbar(\sigma,U)\neq\varepsilon$.对$(\alpha,f)\in\Sigma^\omega_{\mathcal{V}},f$为有效的$(\mathcal{V},\alpha)$指派当且仅当对任意$i\in\omega,f\ [x\to i]$为有效的$(\mathcal{V}\cup\{x\},\alpha)$指派.

因此,对任意$(\alpha,f)\in N_{\mathcal{V}},\lceil\exists x.\psi\rceil_{\mathcal{V}}(\alpha,f)=\vee_{i\geqslant0}\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}\cup\{x\}}(\alpha,f[x\to i])=\hbar(\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}\cup\{x\}})(\alpha,f)$.

这里最后一个等式成立是由于f_1为有效的$(\mathcal{V}\cup\{x\},\alpha)$指派,且$\hbar(\alpha,f_1)=(\alpha,f)$当且仅当存在$i\in\omega$使得$f_1=f[x\to i]$.由命题 9 及$Free(\psi)\subseteq\mathcal{V}\cup\{x\}$可知,$\lceil\psi\rceil_{\mathcal{V}\cup\{x\}}$是量子$\omega$-正则语言,进而由引理 4 可知,$\lceil\exists x.\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

对于$\lceil\exists X.\psi\rceil\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$的情形,只需将一阶变量$x$换为二阶变量$X$,同理可证. □

定理 9. 设$\xi\in LVMSO(\Sigma)$,则存在 LVMA $\mathcal{A}^\omega$,使得$rec^\omega_{\mathcal{A}}=\lceil\xi\rceil$.

证明:由引理 2~引理 5 显然. □

定理 10(Büchi 定理). $A\in step^\omega_{\mathcal{M}}(\Sigma)$当且仅当存在$\xi\in LVMSO(\Sigma)$,使得$A=\lceil\xi\rceil$.

6 结论与展望

本文借助语义分析方法,给出量子逻辑意义下的非终止进程或数据处理的数学模型,并对该模型的代数性质进行了研究.研究结论表明,基于量子逻辑的Müller自动机相对于经典Müller自动机而言,一方面,它们所依赖的逻辑不同,一个是量子逻辑,一个是经典逻辑,因而所得结论既有相似的地方,又有本质的不同.比如:在经典Müller 自动机理论中,有穷语言与无穷语言的连接和柯西连接运算是满足结合律的,但在基于量子逻辑的Müller 自动机理论中,结合律不再成立;另一方面,基于量子逻辑的 Müller 自动机可以通过经典的 Müller 自动机和带有量子特性的初始状态加以实现,从而所得结论有许多类似的地方.特别地,当$\mathcal{L}=\{0,1\}$时,对应的逻辑为经典逻辑,量子状态构造方法退化为经典子集构造,因此,量子逻辑意义下的 Müller 自动机与经典 Müller 自动机具有紧密的联系和本质的区别.

然而,由于经典逻辑与量子逻辑之间存在着本质区别,因此,经典的模型检测方法和技术不能直接应用到基于量子逻辑的量子系统的模型检测中,而需要研究新的数学模型的代数性质以及与经典数学模型的紧密联系和本质区别.认识到这些本质区别后,我们将进一步研究基于量子逻辑的模型检测方法,并将本文得到的相关代数刻画应用到量子模型检测技术中.另外,我们还将进一步探索其在量子信息技术,尤其是在量子通信中的可能应用.

致谢 作者衷心感谢审稿人的批评和指导.

References:

[1] Gruska J. Quantum Computing. London: McGraw-Hill, 1999.

[2] Nielsen MA, Chuang IL. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University, 2004.

[3] Ying MS. A theory of computation based on quantum logic (I). Theoretical Computer Science, 2005,344(2-3):134–207.

[4] Ying MS. Quantum logic and automata theory. In: Engesser K, Gabbay DM, Lehmann D, eds. Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures. Amsterdam: Elsevier, 2007. 619–754.

[5] 李永明.基于量子逻辑的有穷自动机与单体二阶量子逻辑.中国科学(F 辑:信息科学),2009,39(11):1135–1145.

[6] Han ZW, Li YM. Pushdown automata and context-free grammars based on quantum logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2010,21(9):2107–2117 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3855.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03855]

[7] Han ZW. Algebraic properties of quantum infinite languages. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2012,40(5):9–13 (in Chinese with English abstract).

[8] Khoussainov B, Nerode A. Automata Theory and its Applications. Boston: Birkäuser, 2001.

[9] Thomas W. Languages, automata and logic. In: Rozenberg G, Salomaa A, eds. Handbook of Formal Languages, Vol.3. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. 389–455. [doi: 10.1007/978-3-642-59126-6_7]

[10] Thomas W. Automata on infinite objects. In: Leeuwen J, ed. Handbook of Theoretical Computer Science, Vol.B. Amsterdam: Elsevier, 1990. 133–191.

[11] Farwer B. ω-Automata. In: Gradel E, ed. Proc. of the Automata, Logics, and Infinite Games. LNCS 2500, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 3–21. [doi: 10.1007/3-540-36387-4_1]

[12] Perrin D, Pin JÉ. Infinite Words. Amsterdam: Elsevier, 2004.

[13] Kalmbach G. Orthomodular Lattices. London: Academic Press, 1983.

[14] Li YM, Li ZH. Free semilattices and strongly free semilattices generated by partially ordered sets. Northeastern Mathematical Journal, 1993,9(3):359–366.

附中文参考文献:

[6] 韩召伟,李永明.基于量子逻辑的下推自动机与上下文无关文法.软件学报,2010,21(9):2107–2117. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3855.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03855]

[7] 韩召伟.量子无穷正则语言的代数性质.陕西师范大学学报(自然科学版),2012,40(5):9–13.

韩召伟(1981－),男,陕西西安人,博士,讲师,主要研究领域为计算机软件与理论,量子计算与量子逻辑.

E-mail: hanzw888@snnu.edu.cn

李永明(1966－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为非经典计算理论,计算智能,模糊系统分析,量子逻辑与量子计算,格上拓扑学.

E-mail: liyongm@snnu.edu.cn