软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2013,24(3):433−453 [doi: 10.3724/SP.J.1001.2013.04231]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

多值 Łukasiewicz 逻辑公式的范式表示和计数问题*

王庆平[1,2], 王国俊[1]

[1](陕西师范大学 数学研究所,陕西 西安 710062)

[2](江西财经大学 统计学院,江西 南昌 330013)

通讯作者: 王国俊, E-mail: gjwang@snnu.edu.cn, http://www.snnu.edu.cn

摘 要: 将符号化计算树逻辑中的 Shannon 展开式做了推广,在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,研究了由逻辑公式导出的 n 值 McNaughton 函数的展开式,给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的准析取范式和准合取范式.在此基础上,给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的计数问题,并在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,给出了 m 元逻辑公式的构造方法及其逻辑等价类的计数问题.

关键词: Shannon 展开式;n 值 McNaughton 函数;准析(合)取范式;逻辑等价类;计数问题

中图法分类号: TP181 **文献标识码**: A

中文引用格式: 王庆平,王国俊.多值 Łukasiewicz 逻辑公式的范式表示和计数问题.软件学报,2013,24(3):433−453. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4231.htm

英文引用格式: Wang QP, Wang GJ. Normal form of Łukasiewicz logic formulae and related counting problems. Ruanjian Xuebao/Journal of Software, 2013,24(3):433−453 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4231.htm

Normal Form of Łukasiewicz Logic Formulae and Related Counting Problems

WANG Qing-Ping[1,2], WANG Guo-Jun[1]

[1](Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

[2](School of Statistics, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China)

Corresponding author: WANG Guo-Jun, E-mail: gjwang@snnu.edu.cn, http://www.snnu.edu.cn

Abstract: The Shannon expansion in symbolic computation tree logic is generalized. In a n-valued Łukasiewicz logic system, $Ł_n$, the expansion of n-valued McNaughton functions which are induced by logical formulae is studied. The quasi disjunctive normal form and quasi conjunctive normal form of m-ary n-valued McNaughton functions, and the counting problems of m-ary n-valued McNaughton functions are given. In n-valued Łukasiewicz logic system $Ł_n$, the construction of formulae and counting problems of their logic equivalence class are provided.

Key words: Shannon expansion; n-valued McNaughton function; quasi disjunctive (conjunctive) normal form; logic equivalence class; counting problem

模型检验(model checking)技术自提出以来,已在航空航天、电子商务、通信技术乃至医疗系统等各个领域取得了成功的应用,近年来得到了迅速的发展[1−11].所谓模型是指包含有状态集、状态转移关系以及与一组原子命题相联系的迁移系统(transition system,简称 TS),而模型检验的任务就在于通过某种自动化的方法检验一个 TS 是否满足预定的规范(specification).这里的规范通常用具有足够强的表述功能的逻辑公式φ来表示,φ经常取为计算树逻辑(computing tree logic)中的公式,简称 CTL 公式.模型检验技术虽然是自动化的,但对于复杂的规范往往会出现计算复杂性大大增加,乃至出现状态爆炸的情况.为了简化检验过程,符号化的 CLT 模型检验已被提出,其中,基于开关函数(switching function)和 Shannon 展开式的有序二元决策图(ordered binary decision

* 基金项目: 国家自然科学基金(11171200, 61005046, 61103133)
收稿时间: 2011-01-05; 定稿时间: 2012-03-19

diagram,简称 OBDD)起着重要的作用.

另一方面,多值逻辑公式的计数问题也是一个困难的问题.众所周知,含有 m 个原子公式的二值命题逻辑公式的个数恰等于 m 元 Boole 函数的个数,即 2^{2^m} 个.但对于多值逻辑,相应的问题要复杂得多.以 3 值 Łukasiewicz 逻辑为例,含有 m 个原子公式的 3 值命题逻辑公式的个数并不等于 3^{3^m}.由于 Shannon 展开式是针对二值函数给出的,所以并不复杂,但其想法是巧妙的.本文首先基于 Shannon 展开式简练地导出二值逻辑公式的析取范式和合取范式.然后,根据 Shannon 展开式的思想提出多值逻辑公式的准范式,并最终用于多值逻辑公式的计数问题.为 n 值 Łukasiewicz 逻辑在近似推理中的应用奠定了基础.

1 预备知识

定义 1[12]. 设 $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$,对 $F(S)$做如下情形:

(i) $p_1,p_2,\ldots\in F(S)$;

(ii) 若 $A,B\in F(S)$,则$\neg A,A\to B\in F(S)$;

(iii) $F(S)$中的元都可通过情形(i)与情形(ii)而得到.

$F(S)$是 S 生成的$(\neg,\to)$型自由代数,S 中的元叫原子命题、命题变元或原子公式,$F(S)$中的元叫命题或合式公式,简称公式.

注 1:在定义 1 中并未用到逻辑连接词$\vee$与$\wedge$,其实它们都可以用$\neg$与$\to$来表达.规定:$A\vee B$ 与 $A\wedge B$ 分别是$\neg A\to B$ 与$\neg(A\to\neg B)$的简写.

定义 2[12]. 设 $v:F(S)\to\{0,1\}$是映射,这里,$\{0,1\}$是 Boole 代数.若 v 是$(\neg,\to)$型同态,即 $v(\neg A)=\neg v(A),v(A\to B)=v(A)\to v(B)$,则称 v 为 $F(S)$的赋值,$v(A)$也叫公式 A 的赋值.$F(S)$中全体赋值集记作Ω.

定义 3[12]. 设 $A,B\in F(S)$:

(i) 如果对每个 $v\in\Omega$均有 $v(A)=1$,则称 A 为重言式,记作$\vDash A$;如果对每个 $v\in\Omega$均有 $v(A)=0$,则称 A 为矛盾式;

(ii) 如果对每个 $v\in\Omega$均有 $v(A)=v(B)$,则称 A 与 B 逻辑等价,记作 $A\approx B$.

定义 4[12]. 函数$f:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$叫 m 元 Boole 函数$(m\in N)$.

定义 5[12]. 设 $A(p_1,\ldots,p_m)$是含有 m 个命题变元的合式公式,它由 $p_1,\ldots,p_m$ 通过逻辑连接词$\neg,\to,\vee$与$\wedge$连接而成.设$(x_1,\ldots,x_m)\in\{0,1\}^m$,分别用 $x_1,\ldots,x_m$ 取代 $A(p_1,\ldots,p_m)$中的 $p_1,\ldots,p_m$,并按$\neg 0=1,a\to b=0$ 当且仅当 $a=1,b=0,a\vee b=\max\{a,b\},a\wedge b=\min\{a,b\}$理解$\neg,\to,\vee$与$\wedge$,则得 m 元函数,记作 $\overline{A}(x_1,\ldots,x_m)$,叫作公式 A 导出的 Boole 函数.

命题 1[12]. 每个 Boole 函数都可由某公式导出.

定义 6[12]. 设 $A(p_1,\ldots,p_m)\in F(S)$,则分别当 A 具有形式$(Q_{11}\wedge\ldots\wedge Q_{1s})\vee\ldots\vee(Q_{t1}\wedge\ldots\wedge Q_{ts})$或$(Q_{11}\vee\ldots\vee Q_{1s})\wedge\ldots\wedge(Q_{t1}\vee\ldots\vee Q_{ts})$时,称 A 为析取范式或合取范式.这里,$Q_{ij}=p_j$ 或 $Q_{ij}=\neg p_j(j=1,\ldots,s;i=1,\ldots,t)$.

注 2:由原子公式或其否定通过析(合)取连接词连接而成的公式叫简单析(合)取式.如 $p_1\vee p_2\vee p_3$ 是简单析取式,$\neg p_1\wedge p_2$ 是简单合取式.简单析(合)取式既可以看作析取范式,又可以看作合取范式.

定义 7[1]. 设 $f(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 Boole 函数,称下式为 Shannon 展开式:

$$f(x_1,\ldots,x_m)=(\neg x_1\wedge f(0,x_2,\ldots,x_m))\vee(x_1\wedge f(1,x_2,\ldots,x_m)).$$

下面,我们给出 Shannon 展开式的推广形式.

命题 2. 设 $f(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0=\neg x_k,x_k^1=x_k\ (k=1,2)$,则

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge x_2^{\alpha_2}\wedge f(\alpha_1,\alpha_2,x_3,\ldots,x_m):(\alpha_1,\alpha_2)\in\{0,1\}^2\}.$$

证明:由 Shannon 展开式可得:

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=(\neg x_1\wedge f(0,x_2,x_3,\ldots,x_m))\vee(x_1\wedge f(1,x_2,x_3,\ldots,x_m)) \tag{1}$$

又

$$f(0,x_2,x_3,\ldots,x_m)=(\neg x_2\wedge f(0,0,x_3,\ldots,x_m))\vee(x_2\wedge f(0,1,x_3,\ldots,x_m)),$$
$$f(1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=(\neg x_2\wedge f(1,0,x_3,\ldots,x_m))\vee(x_2\wedge f(1,1,x_3,\ldots,x_m)).$$

代入公式(1),整理得到:

$$f(x_1,x_2,x_3,...,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge x_2^{\alpha_2}\wedge f(\alpha_1,\alpha_2,x_3,...,x_m):(\alpha_1,\alpha_2)\in\{0,1\}^2\}.$$ □

更一般地,由 Shannon 展开式及其推广形式可以得到 Boole 函数的析取范式.

推论 1. 设 $f(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0=\neg x_k, x_k^1=x_k$ (k=1,2,…,m),则

$$f(x_1,...,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge f(\alpha_1,...,\alpha_m):(\alpha_1,...,\alpha_m)\in\{0,1\}^m\}=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in f^{-1}(1)\}.$$

注 3:若 $f^{-1}(1)=\varnothing$,即 $f(x_1,\dots,x_m)=0$,这时可令 $f(x_1,\dots,x_m)=x_1\wedge\neg x_1$.

下面,我们再给出 Shannon 展开式的对偶形式及其推广.

命题 3. 设 $f(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0=x_k, x_k^1=\neg x_k$ (k=1,2),则,

(i) $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=(x_1\vee f(0,x_2,\dots,x_m))\wedge(\neg x_1\vee f(1,x_2,\dots,x_m))$;

(ii) $f(x_1,x_2,x_3,...,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee x_2^{\beta_2}\vee f(\beta_1,\beta_2,x_3,...,x_m):(\beta_1,\beta_2)\in\{0,1\}^2\}$.

证明:

(i) 当 x_1=0 时

$$\begin{aligned}(x_1\vee f(0,x_2,\dots,x_m))\wedge(\neg x_1\vee f(1,x_2,\dots,x_m))&=(0\vee f(0,x_2,\dots,x_m))\wedge(1\vee f(1,x_2,\dots,x_m))\\&=f(0,x_2,\dots,x_m)\wedge 1\\&=f(0,x_2,\dots,x_m)\\&=f(x_1,x_2,\dots,x_m).\end{aligned}$$

当 x_1=1 时

$$\begin{aligned}(x_1\vee f(0,x_2,\dots,x_m))\wedge(\neg x_1\vee f(1,x_2,\dots,x_m))&=(1\vee f(0,x_2,\dots,x_m))\wedge(0\vee f(1,x_2,\dots,x_m))\\&=1\wedge f(1,x_2,\dots,x_m)\\&=f(1,x_2,\dots,x_m)\\&=f(x_1,x_2,\dots,x_m).\end{aligned}$$

(ii) 由情形(i)可得

$$f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=(x_1\vee f(0,x_2,x_3,\dots,x_m))\wedge(\neg x_1\vee f(1,x_2,x_3,\dots,x_m)) \quad (2)$$

又

$$f(0,x_2,x_3,\dots,x_m)=(x_2\vee f(0,0,x_3,\dots,x_m))\wedge(\neg x_2\vee f(0,1,x_3,\dots,x_m)),$$
$$f(1,x_2,x_3,\dots,x_m)=(x_2\vee f(1,0,x_3,\dots,x_m))\wedge(\neg x_2\vee f(1,1,x_3,\dots,x_m)).$$

代入公式(2),整理可得:

$$f(x_1,x_2,x_3,...,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee x_2^{\beta_2}\vee f(\beta_1,\beta_2,x_3,...,x_m):(\beta_1,\beta_2)\in\{0,1\}^2\}.$$ □

由命题 3 可以得到 Boole 函数的合取范式.

推论 2. 设 $f(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0=x_k, x_k^1=\neg x_k$ (k=1,2,…,m),则

$$f(x_1,...,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee...\vee x_m^{\beta_m}\vee f(\beta_1,...,\beta_m):(\beta_1,...,\beta_m)\in\{0,1\}^m\}=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee...\vee x_m^{\beta_m}:(\beta_1,...,\beta_m)\in f^{-1}(0)\}.$$

注 4:若 $f^{-1}(0)=\varnothing$,即 $f(x_1,\dots,x_m)=1$,这时可令 $f(x_1,\dots,x_m)=x_1\vee\neg x_1$.

定理 1[12]. 每个公式都逻辑等价于一个析取范式(或合取范式).

注 5:文献[12]给出了定理 1 的构造性证明,下面根据 Shannon 展开式及其推广形式给出另外一种证明方法.

证明:仅证析取范式的情形(合取范式的情形是类似的).

$\forall A\in F(S)$,不妨设 A 中含有 m 个原子命题 $p_1,\dots,p_m$,则 A 导出一个 m 元 Boole 函数 $\overline{A}(x_1,\dots,x_m)$.

- 若 A 不是矛盾式,则 $\overline{A}^{-1}(1)\neq\varnothing$.由推论 1 可知,约定 $x_k^0=\neg x_k, x_k^1=x_k$ (k=1,2,…,m),则

$$\overline{A}(x_1,...,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in\overline{A}^{-1}(1)\}.$$

这时,约定 $p_k^0=\neg p_k, p_k^1=p_k$ (k=1,2,…,m),令 $B=\vee\{p_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge p_m^{\alpha_m}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in\overline{A}^{-1}(1)\}$,则 B 导出的 m 元 Boole 函数 $\overline{B}(x_1,...,x_m)=\overline{A}(x_1,...,x_m)$.所以 $A\approx B$,且 B 是析取范式.

- 若 A 是矛盾式,则 $\overline{A}(x_1,\dots,x_m)=0$.由注 3 可知,可令 $\overline{A}(x_1,\dots,x_m)=x_1\wedge\neg x_1$.

这时,令公式 $B=p_1\wedge\neg p_1$,则 $\overline{B}(x_1)=\overline{A}(x_1,...,x_m)$.所以 $A\approx B$,且 B 是简单合取式,可看作析取范式. □

定理 2. 在二值命题逻辑系统 L 中,m 元公式的逻辑等价类共 2^{2^m} 个.

证明:任意 m 元 Boole 函数均可由某个 m 元公式导出,且任意 m 元公式导出的函数均为 m 元 Boole 函数.而 Boole 函数共 2^{2^m} 个.又因逻辑等价公式导出的 Boole 函数是相等的,故 m 元公式的逻辑等价类共 2^{2^m} 个. □

2 *n* 值 McNaughton 函数的范式表示

本文用 $L(n)$表示集合$\left\{0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\dots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$,用 $h_0(x)$表示函数$\neg(\neg x\to x)$,用 $h_{\frac{1}{2}}(x)$ 表示函数$(x\to\neg x)\wedge(\neg x\to x)$,用 $h_1(x)$表示函数$\neg(x\to\neg x)$.

2.1 *n*值Łukasiewicz逻辑系统$Ł_n$

定义 8[12]. 设 $S=\{p_1,p_2,\dots\}$,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\to)$型自由代数,称 $F(S)$中的元为系统 $Ł_n$ 中的公式(或命题),称 S 中的元为系统 $Ł_n$ 中的原子公式(或原子命题).

注 6:与经典逻辑系统不同,在 $Ł_n$ 中,$A\vee B$ 不再是$\neg A\to B$ 的简写,而是$(A\to B)\to B$ 的简写,$A\wedge B$ 表示$\neg(\neg A\vee\neg B)$.

定义 9[12]. 设 $v:F(S)\to L(n)$是映射,这里,$L(n)$是 n 值 MV 代数,若 v 是$(\neg,\to)$型同态,即

$$v(\neg A)=\neg v(A),v(A\to B)=v(A)\to v(B)=\min\{1-v(A)+v(B),1\},$$

则称 v 为 $F(S)$在 n 值 MV 代数 $L(n)$中的赋值,简称 v 为赋值.$F(S)$中全体赋值之集记作$\Omega(Ł_n)$.

在 $Ł_n$ 中,重言式、矛盾式以及逻辑等价的定义与经典逻辑系统 L 中的定义是一致的,这里不再赘述.

定义 10[12]. 设 $A(p_1,\dots,p_m)$是含有 m 个命题变元的合式公式,它由 $p_1,\dots,p_m$ 通过逻辑连接词$\neg,\to,\vee$与$\wedge$连接而成.设$(x_1,\dots,x_m)\in(L(n))^m$,分别用 $x_1,\dots,x_m$ 取代 $A(p_1,\dots,p_m)$中的 $p_1,\dots,p_m$,并按$\neg x=1-x,x\to y=(1-x+y)\wedge 1,x\vee y=\max\{x,y\},x\wedge y=\min\{x,y\},(x,y\in L(n))$理解$\neg,\to,\vee$与$\wedge$,则得 m 元函数,记作 $\overline{A}(x_1,\dots,x_m)$,叫作公式 A 导出的函数.

定义 11[13]. 若函数 $g:(L(n))^m\to L(n)$可由 $Ł_n$ 中的某个 m 元逻辑公式导出,则称 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数($m\in N$).

例 1:设 $\overline{g}:(L(n))^m\to L(n)$ 为 m 元 n 值函数,则常值映射 $\overline{g}(x_1,\dots,x_m)\equiv\frac{1}{2}$ 不能由合式公式导出.

证明:任给 m 元合式公式 $A(p_1,\dots,p_m)$,设 $\overline{A}(x_1,\dots,x_m)$ 为公式 A 导出的 n 值函数.当 $p_1,\dots,p_m$ 全部赋值为 0 时,作用连接词$\neg,\to,\vee$与$\wedge$只能得到 0 或 1,不可能为 $\frac{1}{2}$.即,$\overline{A}(0,\dots,0)\neq\frac{1}{2}$.而 $\overline{g}(x_1,\dots,x_m)$ 恒等于 $\frac{1}{2}$,故 $\overline{g}(x_1,\dots,x_m)\equiv\frac{1}{2}$ 不能由合式公式导出. □

注 7:在经典逻辑系统中,每一个 m 元 Boole 函数$f:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$都可由某合式公式导出;然而在 n 值逻辑系统中,每一个 m 元 n 值函数 $\overline{g}$ 却不一定由某个合式公式导出.因此在 n 值逻辑系统中,由 m 元公式导出的 m 元 n 值函数的形式要比 m 元 Boole 函数复杂很多.下面,我们将 Shannon 展开式的技巧进行推广来解决这一问题.首先研究 3 值 McNaughton 函数的范式表示.

2.2 3值McNaughton函数的范式表示

在 3 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_3$ 中,公式的赋值域为 $L(3)=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$.$\forall x,y\in L(3)$,$Ł_3$ 中的真值表如下所示:

x	$\neg x$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\neg x$

$x\backslash y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$x\to y$

$x\backslash y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$x\vee y$

$x\backslash y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$x\wedge y$

而且,$h_0(x)=\neg(\neg x\to x)$, $h_{\frac{1}{2}}(x)=(x\to\neg x)\wedge(\neg x\to x)$,$h_1(x)=\neg(x\to\neg x)$的真值表如下所示:

x	$h_0(x)$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

x	$h_{\frac{1}{2}}(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	0

x	$h_1(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	1

下面,依据 Shannon 展开式的技巧以及 $h_0(x)$, $h_{\frac{1}{2}}(x)$,$h_1(x)$的特点,我们给出 m 元 3 值 McNaughton 函数的展开式及准析(合)取范式.

命题 4. 设 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 3 值 McNaughton 函数,则

$$g(x_1,\dots,x_m)=(h_0(x_1)\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(h_{\frac{1}{2}}(x_1)\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(h_1(x_1)\wedge g(1,x_2,\dots,x_m)).$$

证明:

- 当 $x_1=0$ 时

$$\begin{aligned}&(h_0(x_1)\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(h_{\frac{1}{2}}(x_1)\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(h_1(x_1)\wedge g(1,x_2,\dots,x_m))=\\&(1\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(0\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(0\wedge g(1,x_2,\dots,x_m))=\\&g(0,x_2,\dots,x_m)\vee0\vee0=g(0,x_2,\dots,x_m)=g(x_1,x_2,\dots,x_m).\end{aligned}$$

- 当 $x_1=\frac{1}{2}$ 时

$$\begin{aligned}&(h_0(x_1)\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(h_{\frac{1}{2}}(x_1)\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(h_1(x_1)\wedge g(1,x_2,\dots,x_m))=\\&(0\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(1\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(0\wedge g(1,x_2,\dots,x_m))=\\&0\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\vee0=g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)=g(x_1,x_2,\dots,x_m).\end{aligned}$$

- 当 $x_1=1$ 时

$$\begin{aligned}&(h_0(x_1)\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(h_{\frac{1}{2}}(x_1)\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(h_1(x_1)\wedge g(1,x_2,\dots,x_m))=\\&(0\wedge g(0,x_2,\dots,x_m))\vee\left(0\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\vee(1\wedge g(1,x_2,\dots,x_m))=\\&0\vee0\vee g(1,x_2,\dots,x_m)=g(1,x_2,\dots,x_m)=g(x_1,x_2,\dots,x_m).\end{aligned}$$

□

命题 5. 设 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 3 值 McNaughton 函数,约定 $x_k^0=h_0(x_k),x_k^{\frac{1}{2}}=h_{\frac{1}{2}}(x_k),x_k^1=h_1(x_k)$ (k=1,2),则

$$g(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\vee\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge x_2^{\alpha_2}\wedge g(\alpha_1,\alpha_2,x_3,\dots,x_m):(\alpha_1,\alpha_2)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^2\right\}.$$

证明:由命题 4 可知:

$$g(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\vee\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge g(\alpha_1,x_2,x_3,\dots,x_m):\alpha_1\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}\right\}\tag{3}$$

又 $g(\alpha_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\vee\left\{x_2^{\alpha_2}\wedge g(\alpha_1,\alpha_2,x_3,\dots,x_m):\alpha_2\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}\right\},\alpha_1=0,\frac{1}{2},1$,代入公式(3),整理可得:

$$g(x_1,x_2,x_3,...,x_m)=\vee\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge x_2^{\alpha_2}\wedge g(\alpha_1,\alpha_2,x_3,...,x_m):(\alpha_1,\alpha_2)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^2\right\}.$$ □

推论 3. 设 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 3 值 McNaughton 函数,约定 $x_k^0=h_0(x_k), x_k^{\frac{1}{2}}=h_{\frac{1}{2}}(x_k), x_k^1=h_1(x_k)$ ($k=1,2,\dots,m$),则

$$g(x_1,...,x_m)=\vee\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge g(\alpha_1,...,\alpha_m):(\alpha_1,...,\alpha_m)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^m\right\}$$

$$=(\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in g^{-1}(1)\})\vee\left(\vee\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge\frac{1}{2}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right).$$

注 8:

(i) 称 $(\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in g^{-1}(1)\})\vee\left(\vee\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge\frac{1}{2}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数的准析取范式.注意:在析取范式中, $x_i^{\alpha_i}$ $(i=1,2,...,m)$ 取 x_i 或$\neg x_i$;而在准析取范式中, $x_i^{\alpha_i}$ 是 x_i 通过$\neg,\rightarrow,\vee,\wedge$运算得到的 1 元函数;

(ii) 若 $g^{-1}(1)=g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\varnothing$,即 $g(x_1,\dots,x_m)=0$,这时可令 $g(x_1,...,x_m)=x_1^0\wedge x_1^1$,即

$$g(x_1,\dots,x_m)=\neg(\neg x_1\rightarrow x_1)\wedge\neg(x_1\rightarrow\neg x_1).$$

而$\neg(\neg x_1\rightarrow x_1)\wedge\neg(x_1\rightarrow\neg x_1)$是 x_1 的 1 元函数,可看作简单准析(合)取式;

(iii) 若 $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\neq\varnothing$,则 $x_1,\dots,x_m$ 中至少有一个取值 $\frac{1}{2}$,则 $g(x_1,\dots,x_m)$可表示为

$$(\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_m^{\alpha_m}:(\alpha_1,...,\alpha_m)\in g^{-1}(1)\})\vee\left(\vee\left\{(x_1^{\alpha_1}\wedge(x_1\vee\neg x_1))\wedge...\wedge(x_m^{\alpha_m}\wedge(x_m\vee\neg x_m)):(\alpha_1,...,\alpha_m)\in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right).$$

下面给出命题 4 的对偶形式.

命题 6. 设 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 3 值 McNaughton 函数,则

$$g(x_1,...,x_m)=(\neg h_0(x_1)\vee g(0,x_2,...,x_m))\wedge\left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1)\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)\right)\wedge(\neg h_1(x_1)\wedge g(1,x_2,...,x_m)).$$

证明:

- 当 $x_1=0$ 时

$$(\neg h_0(x_1)\vee g(0,x_2,...,x_m))\wedge\left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1)\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)\right)\wedge(\neg h_1(x_1)\vee g(1,x_2,...,x_m))=$$

$$(0\vee g(0,x_2,...,x_m))\wedge\left(1\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)\right)\wedge(1\vee g(1,x_2,...,x_m))=$$

$$g(0,x_2,...,x_m)\wedge 1\wedge 1=g(0,x_2,...,x_m)=g(x_1,x_2,...,x_m).$$

- 当 $x_1=\frac{1}{2}$ 时

$$(\neg h_0(x_1)\vee g(0,x_2,...,x_m))\wedge\left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1)\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)\right)\wedge(\neg h_1(x_1)\vee g(1,x_2,...,x_m))=$$

$$(1\vee g(0,x_2,...,x_m))\wedge\left(0\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)\right)\wedge(1\vee g(1,x_2,...,x_m))=$$

$$1\wedge g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)\wedge 1=g\left(\frac{1}{2},x_2,...,x_m\right)=g(x_1,x_2,...,x_m).$$

- 当 $x_1=1$ 时

$$(\neg h_0(x_1)\vee g(0,x_2,\dots,x_m))\wedge\left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1)\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\wedge(\neg h_1(x_1)\vee g(1,x_2,\dots,x_m))=$$

$$(1\vee g(0,x_2,\dots,x_m))\wedge\left(1\vee g\left(\frac{1}{2},x_2,\dots,x_m\right)\right)\wedge(0\vee g(1,x_2,\dots,x_m))=$$

$$1\wedge 1\wedge g(1,x_2,\dots,x_m)=g(1,x_2,\dots,x_m)=g(x_1,x_2,\dots,x_m).$$ □

命题 7. 设 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 3 值 McNaughton 函数,约定 $x_k^0=\neg h_0(x_k),x_k^{\frac{1}{2}}=\neg h_{\frac{1}{2}}(x_k),x_k^1=\neg h_1(x_k)$ (k=1,2),则

$$g(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\wedge\left\{x_1^{\beta_1}\vee x_2^{\beta_2}\vee g(\beta_1,\beta_2,x_3,\dots,x_m):(\beta_1,\beta_2)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^2\right\}.$$

证明:由命题 6 可知:

$$g(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\wedge\left\{x_1^{\beta_1}\vee g(\beta_1,x_2,x_3,\dots,x_m):\beta_1\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}\right\} \tag{4}$$

又 $g(\beta_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\wedge\left\{x_2^{\beta_2}\vee g(\beta_1,\beta_2,x_3,\dots,x_m):\beta_2\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}\right\},\beta_1=0,\frac{1}{2},1$,代入公式(4),整理可得:

$$g(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)=\wedge\left\{x_1^{\beta_1}\vee x_2^{\beta_2}\vee g(\beta_1,\beta_2,x_3,\dots,x_m):(\beta_1,\beta_2)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^2\right\}.$$ □

推论 4. 设 $g(x_1,\dots,x_m)$为 m 元 3 值 McNaughton 函数,约定 $x_k^0=\neg h_0(x_k),x_k^{\frac{1}{2}}=\neg h_{\frac{1}{2}}(x_k),x_k^1=\neg h_1(x_k)$ (k=1,2…,m),则有

$$g(x_1,\dots,x_m)=\wedge\left\{x_1^{\beta_1}\vee\dots\vee x_m^{\beta_m}\vee g(\beta_1,\dots,\beta_m):(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^m\right\}$$
$$=(\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee\dots\vee x_m^{\beta_m}:(\beta_1,\dots,\beta_m)\in g^{-1}(0)\})\wedge\left(\wedge\left\{x_1^{\beta_1}\vee\dots\vee x_m^{\beta_m}\vee\frac{1}{2}:(\beta_1,\dots,\beta_m)\in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right).$$

注 9:

(i) 称 $(\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee\dots\vee x_m^{\beta_m}:(\beta_1,\dots,\beta_m)\in g^{-1}(0)\})\wedge\left(\wedge\left\{x_1^{\beta_1}\vee\dots\vee x_m^{\beta_m}\vee\frac{1}{2}:(\beta_1,\dots,\beta_m)\in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数的准合取范式.注意:在合取范式中,$x_i^{\alpha_i}(i=1,2,\dots,m)$ 取 x_i 或$\neg x_i$;而在准合取范式中,$x_i^{\alpha_i}$ 是 x_i 通过$\neg,\rightarrow,\vee,\wedge$运算得到的一元函数;

(ii) 若 $g^{-1}(0)=g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\varnothing$,即 $g(x_1,\dots,x_m)=1$,这时可令 $g(x_1,\dots,x_m)=x_1^0\vee x_1^1$,即

$$g(x_1,\dots,x_m)=(\neg x_1\rightarrow x_1)\vee(x_1\rightarrow\neg x_1).$$

而$(\neg x_1\rightarrow x_1)\vee(x_1\rightarrow\neg x_1)$是 x_1 的一元函数,可看作简单准析(合)取式;

(iii) 若 $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\neq\varnothing$,则 $x_1,\dots,x_m$ 中至少有一个取值 $\frac{1}{2}$,则 $g(x_1,\dots,x_m)$可表示为

$$(\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee\dots\vee x_m^{\beta_m}:(\beta_1,\dots,\beta_m)\in g^{-1}(0)\})\wedge\left(\wedge\left\{(x_1^{\beta_1}\vee(x_1\wedge\neg x_1))\vee\dots\vee(x_m^{\beta_m}\vee(x_m\wedge\neg x_m)):(\beta_1,\dots,\beta_m)\in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right).$$

2.3 n值McNaughton函数的展开式及其范式表示

现在,我们研究 n 值 McNaughton 函数.这时,McNaughton 函数的值域为 $L(n)=\left\{0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\dots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$.为了给出 n 值 McNaughton 函数的展开式,我们先给下面的引理.

引理 1. 在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,$\forall k\in\{0,1,2,\dots,n-2,n-1\}$,均存在一元逻辑公式 $A_k(p)$,使得 $A_k(p)$

导出的一元函数 $\overline{A_k}(x)$,满足: $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{k}{n-1}\\ 0, & x\neq\dfrac{k}{n-1}\end{cases}, x\in L(n).$

证明:

(i) 当 k=0 时,令

$$B_{01}(p)=\neg p\to p, B_{02}(p)=\neg B_{01}(p)\to B_{01}(p),\dots,B_{0([\log_2(n-1)]+1)}(p)=\neg B_{0[\log_2(n-1)]}(p)\to B_{0[\log_2(n-1)]}(p).$$

这里,$[\log_2(n-1)]$表示 $\log_2(n-1)$取整数部分,则有

$$\overline{B_{01}}(x)=\neg x\to x, \overline{B_{02}}(x)=\neg\overline{B_{01}}(x)\to\overline{B_{01}}(x),\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(x)=\neg\overline{B_{0[\log_2(n-1)]}}(x)\to\overline{B_{0[\log_2(n-1)]}}(x).$$

因为$\neg x=1-x, x\to y=(1-x+y)\wedge 1$,所以,

$$\overline{B_{01}}(x)=2x\wedge 1, \overline{B_{02}}(x)=2\overline{B_{01}}(x)\wedge 1,\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(x)=2\overline{B_{0[\log_2(n-1)]}}(x)\wedge 1.$$

- 代入 x=0 得: $\overline{B_{01}}(0)=0, \overline{B_{02}}(0)=0,\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(0)=0$;
- 代入 $x=\dfrac{1}{n-1}$ 得: $\overline{B_{01}}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)=\dfrac{2}{n-1}\wedge 1, \overline{B_{02}}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)=\dfrac{4}{n-1}\wedge 1,\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)=\dfrac{2^{[\log_2(n-1)]+1}}{n-1}\wedge 1=1$;
- 代入 $x=\dfrac{2}{n-1}$ 得: $\overline{B_{01}}\left(\dfrac{2}{n-1}\right)=\dfrac{4}{n-1}\wedge 1, \overline{B_{02}}\left(\dfrac{2}{n-1}\right)=\dfrac{8}{n-1}\wedge 1,\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\dfrac{2}{n-1}\right)=\dfrac{2^{[\log_2(n-1)]+2}}{n-1}\wedge 1=1$;
- …;
- 代入 $x=\dfrac{n-2}{n-1}$,可得:

$$\overline{B_{01}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=\frac{(n-2)\times 2}{n-1}\wedge 1, \overline{B_{02}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=\frac{(n-2)\times 4}{n-1}\wedge 1,\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=\frac{(n-2)\times 2^{[\log_2(n-1)]+1}}{n-1}\wedge 1=1.$$

- 代入 x=1 得: $\overline{B_{01}}(1)=1, \overline{B_{02}}(1)=1,\dots,\overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(1)=1$.

这时令 $A_0(p)=\neg B_{0([\log_2(n-1)]+1)}(p)$,则有 $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}, x\in L(n)$.

(ii) 当 $k=n-1$ 时,令 $B_{n-1}(p)=\neg p$,则 $\overline{B_{n-1}}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)=1-\dfrac{i}{n-1}(i=0,1,2,\dots,n-2,n-1)$,即

$$\overline{B_{n-1}}(1)=0, \overline{B_{n-1}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=\frac{1}{n-1}, \overline{B_{n-1}}\left(\frac{n-3}{n-1}\right)=\frac{2}{n-1},\dots,\overline{B_{n-1}}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{n-2}{n-1}, \overline{B_{n-1}}(0)=1.$$

这时,可采用情形(i)的做法,令

$$\begin{aligned}&B_{(n-1)1}(p)=\neg B_{n-1}(p)\to B_{n-1}(p),\\&B_{(n-1)2}(p)=\neg B_{(n-1)1}(p)\to B_{(n-1)1}(p),\\&\dots,\\&B_{(n-1)([\log_2(n-1)]+1)}(p)=\neg B_{(n-1)[\log_2(n-1)]}(p)\to B_{(n-1)[\log_2(n-1)]}(p),\\&A_{n-1}(p)=\neg B_{(n-1)([\log_2(n-1)]+1)}(p),\end{aligned}$$

则有 $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}, x\in L(n)$.

(iii) 若 n 为奇数,则 $\dfrac{n-1}{2}$ 为整数.当 $k=\dfrac{n-1}{2}$ 时,令 $B_{\frac{n-1}{2}}(p)=\neg((p\to\neg p)\wedge(\neg p\to p))$,则有

$$\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{i}{n-1}\right)=\frac{2i-(n-1)}{n-1}\vee\frac{(n-1)-2i}{n-1}, i=0,1,2,\dots,n-2,n-1.$$

即

$$\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2}{n-1},\dots,\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{2}{n-1}\right)=\frac{n-5}{n-1},\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{n-3}{n-1},$$
$$\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}(0)=1,\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2}{n-1},\dots,\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=\frac{n-3}{n-1},\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}(1)=1.$$

这时,可采用情形(i)的做法,令

$$B_{\frac{n-1}{2}1}(p)=\neg B_{\frac{n-1}{2}}(p)\to B_{\frac{n-1}{2}}(p),$$
$$B_{\frac{n-1}{2}2}(p)=\neg B_{\frac{n-1}{2}1}(p)\to B_{\frac{n-1}{2}1}(p),$$
$$\dots,$$
$$B_{\frac{n-1}{2}([\log_2(n-1)]+1)}(p)=\neg B_{\frac{n-1}{2}[\log_2(n-1)]}(p)\to B_{\frac{n-1}{2}[\log_2(n-1)]}(p),$$
$$A_{\frac{n-1}{2}}(p)=\neg B_{\frac{n-1}{2}([\log_2(n-1)]+1)}(p),$$

则有 $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{1}{2}\\ 0, & x\neq\frac{1}{2}\end{cases},x\in L(n).$

(iv) 当 $0<k<\frac{n-1}{2}$ 时,令 $C_{k1}(p)=\neg p\to p$,则 $\overline{C_{k1}}(x)=\neg x\to x$,所以 $\overline{C_{k1}}\left(\frac{i}{n-1}\right)=\frac{2i}{n-1}\wedge 1$ ($i=0,1,2,\dots,n-2,n-1$).当 $\frac{i}{n-1}\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$\overline{C_{k1}}\left(\frac{i}{n-1}\right)=1$.注意,$\overline{C_{k1}}(0),\overline{C_{k1}}\left(\frac{1}{n-1}\right),\overline{C_{k1}}\left(\frac{2}{n-1}\right),\dots,\overline{C_{k1}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right),\overline{C_{k1}}(1)$ 中非 0,1 且相邻的两个数的差为 $\frac{2}{n-1}$.

若 $\overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\frac{2k}{n-1}=\frac{1}{2}$,则采用情形(iii)的做法,令 $B_k(p)=\neg((C_{k1}(p)\to\neg C_{k1}(p))\wedge(\neg C_{k1}(p)\to C_{k1}(p)))$,则有

$$\overline{B_k}\left(\frac{k}{n-1}\right)=0,\overline{B_k}(0)=1,\overline{B_k}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{n-5}{n-1},\overline{B_k}\left(\frac{2}{n-1}\right)=\frac{n-9}{n-1},\dots,\overline{B_k}\left(\frac{k-1}{n-1}\right)=\frac{4}{n-1},$$
$$\overline{B_k}\left(\frac{k+1}{n-1}\right)=\frac{4}{n-1},\dots,\overline{B_k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{n-5}{n-1},\overline{B_k}\left(\frac{1}{2}\right)=\dots=\overline{B_k}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=\overline{B_k}(1)=1.$$

这时,令

$$B_{k1}(p)=\neg B_k(p)\to B_k(p),$$
$$B_{k2}(p)=\neg B_{k1}(p)\to B_{k1}(p),$$
$$\dots,$$
$$B_{k([\log_2(n-1)]+1)}(p)=\neg B_{k[\log_2(n-1)]}(p)\to B_{k[\log_2(n-1)]}(p),$$
$$A_k(p)=\neg B_{k([\log_2(n-1)]+1)}(p),$$

则有 $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{k}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{k}{n-1}\end{cases},x\in L(n).$

若 $\overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\frac{2k}{n-1}\neq\frac{1}{2}$,令 $D_{k1}(p)=\begin{cases}\neg C_{k1}(p), & \overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right)>\frac{1}{2}\\ C_{k1}(p), & \overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right)<\frac{1}{2}\end{cases}$,则有 $\overline{D_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right)<\frac{1}{2}$.

再令 $C_{k2}(p)=\neg D_{k1}(p)\to D_{k1}(p)$,即 $\overline{C_{k2}}(x)=2\overline{D_{k1}}(x)\wedge 1$,则 $\overline{C_{k2}}(0),\overline{C_{k2}}\left(\frac{1}{n-1}\right),\overline{C_{k2}}\left(\frac{2}{n-1}\right),\dots,\overline{C_{k2}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right),\overline{C_{k2}}(1)$ 中

非 0,1 且相邻的两个数的差为 $\frac{4}{n-1}$.这时,$\overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\frac{4k}{n-1}\wedge\left(1-\frac{4k}{n-1}\right)$.

若 $\overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\frac{1}{2}$,则采用情形(iii)的做法可得满足要求的 $\overline{A_k}(x)$;

若 $\overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\neq\frac{1}{2}$,令 $D_{k2}(p)=\begin{cases}\neg C_{k2}(p), & \overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right)>\frac{1}{2}\\ C_{k2}(p), & \overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right)<\frac{1}{2}\end{cases}$,则 $\overline{D_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right)<\frac{1}{2}$.

再令 $C_{k3}(p)=\neg D_{k2}(p)\to D_{k2}(p)$,即 $\overline{C_{k3}}(x)=2\overline{D_{k2}}(x)\wedge 1$.序行此法,或得到满足要求的 $\overline{A_k}(x)$,或得到一个函数列 $\overline{C_{k1}}(x),\overline{C_{k2}}(x),\overline{C_{k3}}(x),\ldots,\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}(x)$,满足 $\overline{C_{kj}}(0),\overline{C_{kj}}\left(\frac{1}{n-1}\right),\overline{C_{kj}}\left(\frac{2}{n-1}\right),\ldots,\overline{C_{kj}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right),\overline{C_{kj}}(1)$ 中非 0,1 且相邻的两个数的差为 $\frac{2j}{n-1}$ 且 $\frac{1}{n-1}\leqslant\overline{C_{kj}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\leqslant\frac{n-2}{n-1}$ ($j=1,2,3,\ldots,[\log_2(n-1)]+1$).注意,$j=[\log_2(n-1)]+1$ 时,$\frac{2j}{n-1}>1$.

所以,$\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}(0),\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{1}{n-1}\right),\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{2}{n-1}\right),\ldots,\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right),\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}(1)$ 中只有 $\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right)$不为 0,1,其余的全部为 0,1.这时,令

$$C(p)=(C_{k([\log_2(n-1)]+1)}(p)\to\neg C_{k([\log_2(n-1)]+1)}(p))\wedge(\neg C_{k([\log_2(n-1)]+1)}(p)\to C_{k([\log_2(n-1)]+1)}(p)),$$

则有 $\overline{C}(x)=0,x\neq\frac{k}{n-1}$.

而 $\overline{C}\left(\frac{k}{n-1}\right)=2\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\wedge\left(1-2\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)$,由 $\frac{1}{n-1}\leqslant\overline{C_{k([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\leqslant\frac{n-2}{n-1}$ 可知,$\overline{C}\left(\frac{k}{n-1}\right)\geqslant\frac{2}{n-1}$.

再令 $C_1(p)=\neg C(p)\to C(p),C_2(p)=\neg C_1(p)\to C_1(p),\ldots,C_{[\log_2(n-1)]}(p)=\neg C_{[\log_2(n-1)]-1}(p)\to C_{[\log_2(n-1)]-1}(p)$,则

$$\overline{C_1}(x)=2\overline{C}(x)\wedge 1,\overline{C_2}(x)=2\overline{C_1}(x)\wedge 1,\ldots,\overline{C_{[\log_2(n-1)]}}(x)=2\overline{C_{[\log_2(n-1)]-1}}(x)\wedge 1.$$

- 当 $x\neq\frac{k}{n-1}$ 时,$\overline{C_{[\log_2(n-1)]}}(x)=0$;
- 当 $x=\frac{k}{n-1}$ 时,$\overline{C_{[\log_2(n-1)]}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\geqslant\frac{2\times 2^{[\log_2(n-1)]}}{n-1}\wedge 1=1$.

所以,$\overline{C_{[\log_2(n-1)]}}\left(\frac{k}{n-1}\right)=1$. 记 $A_k(p)=C_{[\log_2(n-1)]}(p)$, 则 $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{k}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{k}{n-1}\end{cases},x\in L(n)$.

(v) 当 $\frac{n-1}{2}<k<n-1$ 时,令 $E(p)=\neg p$,则 $0<\overline{E}\left(\frac{k}{n-1}\right)<\frac{1}{2}$,这时可采用情形(iv)的做法,令 $E_{k1}(p)=\neg E(p)\to E(p)$,其余步骤类似,则可得到满足要求的 $\overline{A_k}(x)$.

由情形(i)~情形(v)可知,$\forall k\in\{0,1,2,\ldots,n-2,n-1\}$,均存在一元逻辑公式 $A_k(p)$,使得 $A_k(p)$导出的一元函数 $\overline{A_k}(x)$ 满足:$\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{k}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{k}{n-1}\end{cases},x\in L(n)$.

例 2:设 $L(6)=\left\{0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right\}$,构造一个一元逻辑公式 $A_k(p)$,使得 $A_k(p)$导出的一元函数 $\overline{A_k}(x)$ 满足:

$$\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{k}{5}\\ 0, & x\neq\dfrac{k}{5}\end{cases}, x\in L(6), k=0,1,2,3,4,5.$$

解:

(i) 令 $B_{01}(p)=\neg p\to p, B_{02}(p)=\neg B_{01}(p)\to B_{01}(p), B_{03}(p)=\neg B_{02}(p)\to B_{02}(p)$,则有

$$\overline{B_{03}}(0)=0,\overline{B_{03}}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{B_{03}}(1)=1.$$

再令 $A_0(p)=\neg B_{03}(p)$,则 $A_0(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A_0}(x)$ 满足: $\overline{A_0}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}, x\in L(6).$

(ii) 令 $C_{11}(p)=\neg p\to p, C_{12}(p)=\neg C_{11}(p)\to C_{11}(p)$,则 $\overline{C_{12}}(0)=0,\overline{C_{12}}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5},\overline{C_{12}}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{C_{12}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{C_{12}}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{C_{12}}(1)=1.$

再令 $B(p)=(C_{12}(p)\to\neg C_{12}(p))\wedge(\neg C_{12}(p)\to C_{12}(p))$,则 $\overline{B}(0)=\overline{B}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{B_{03}}(1)=0,\overline{B}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}.$

这时,令 $B_1(p)=\neg B(p)\to B(p), A_1(p)=\neg B_1(p)\to B_1(p)$,则 $\overline{A_1}(0)=\overline{A_1}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{A_1}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{A_1}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{A_1}(1)=0,\overline{A_1}\left(\frac{1}{5}\right)=1.$

即,$A_1(p)$导出的 1 元函数 $\overline{A_1}(x)$ 满足: $\overline{A_1}(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{1}{5}\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{5}\end{cases}, x\in L(6).$

(iii) 令 $C_{11}(p)=\neg p\to p$,因为 $\overline{C_{21}}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}>\frac{1}{2}$,所以,令 $D_{21}(p)=\neg C_{21}(p), C_{22}(p)=\neg D_{21}(p)\to D_{21}(p)$,则有

$$\overline{C_{22}}(0)=\overline{C_{22}}\left(\frac{1}{5}\right)=1,\overline{C_{22}}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5},\overline{C_{22}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{C_{22}}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{C_{22}}(1)=0.$$

这时,令 $B(p)=(C_{22}(p)\to\neg C_{22}(p))\wedge(\neg C_{22}(p)\to C_{22}(p))$,则 $\overline{B}(0)=\overline{B}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{B}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{B}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{B}(1)=0,\overline{B}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}.$

再令 $A_2(p)=\neg B(p)\to B(p)$,则 $\overline{A_2}(0)=\overline{A_2}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{A_2}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{A_2}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{A_2}(1)=0,\overline{A_2}\left(\frac{2}{5}\right)=1.$

即,$A_2(p)$导出的 1 元函数 $\overline{A_2}(x)$ 满足: $\overline{A_2}(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{2}{5}\\ 0, & x\neq\dfrac{2}{5}\end{cases}, x\in L(6).$

(iv) 令 $C_{31}(p)=\neg p\to p$,因为 $\overline{C_{31}}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}>\frac{1}{2}$ 所以,令 $D_{31}(p)=\neg C_{31}(p), C_{32}(p)=\neg D_{31}(p)\to D_{31}(p)$,则有

$$\overline{C_{32}}(1)=\overline{C_{32}}\left(\frac{4}{5}\right)=1,\overline{C_{32}}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{5},\overline{C_{32}}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{C_{32}}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{C_{32}}(0)=0.$$

这时,令 $B(p)=(C_{32}(p)\to\neg C_{32}(p))\wedge(\neg C_{32}(p)\to C_{32}(p))$,则 $\overline{B}(0)=\overline{B}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{B}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{B}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{B}(1)=0,\overline{B}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$

再令 $A_3(p)=\neg B(p)\to B(p)$,则 $\overline{A_3}(0)=\overline{A_3}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{A_3}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{A_3}\left(\frac{4}{5}\right)=\overline{A_3}(1)=0,\overline{A_3}\left(\frac{3}{5}\right)=1.$

即,$A_3(p)$导出的 1 元函数 $\overline{A_3}(x)$ 满足: $\overline{A_3}(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{3}{5}\\ 0, & x\neq\dfrac{3}{5}\end{cases}, x\in L(6).$

(v) 令 $C_{41}(p)=\neg p\rightarrow p, C_{42}(p)=\neg C_{41}(p)\rightarrow C_{41}(p)$,则 $\overline{C_{42}}(1)=0,\overline{C_{12}}\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5},\overline{C_{12}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{C_{12}}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{C_{12}}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{C_{12}}(0)=1.$

再令 $B(p)=(C_{42}(p)\rightarrow\neg C_{42}(p))\wedge(\neg C_{42}(p)\rightarrow C_{42}(p))$,则 $\overline{B}(0)=\overline{B}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{B_{03}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{B_{03}}(1)=0,\overline{B}\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{5}.$

这时,令 $B_4(p)=\neg B(p)\rightarrow B(p), A_4(p)=\neg B_4(p)\rightarrow B_4(p)$,则 $\overline{A_4}(0)=\overline{A_4}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{A_4}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{A_4}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{A_4}(1)=0,\overline{A_4}\left(\frac{4}{5}\right)=1.$

即,$A_4(p)$导出的 1 元函数 $\overline{A_4}(x)$ 满足: $\overline{A_4}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{4}{5}\\ 0, & x\neq\frac{4}{5}\end{cases}, x\in L(6).$

(vi) 令 $B_{51}(p)=\neg p\rightarrow p, B_{52}(p)=\neg B_{51}(p)\rightarrow B_{51}(p), B_{53}(p)=\neg B_{52}(p)\rightarrow B_{52}(p)$,则

$$\overline{B_{53}}(1)=0,\overline{B_{53}}(0)=\overline{B_{53}}\left(\frac{1}{5}\right)=\overline{B_{53}}\left(\frac{2}{5}\right)=\overline{B_{53}}\left(\frac{3}{5}\right)=\overline{B_{53}}\left(\frac{4}{5}\right)=1.$$

再令 $A_5(p)=\neg B_{53}(p)$,则 $A_5(p)$导出的 1 元函数 $\overline{A_5}(x)$ 满足: $\overline{A_5}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}, x\in L(6).$

注 10:由引理 1 和例 2 知,在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,我们可以构造出 1 元逻辑公式 $A_k(p)$,使得 $A_k(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A_k}(x)$ 满足: $\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{k}{n-1}\\ 0, & x\neq\frac{k}{n-1}\end{cases}, x\in L(n)$. 这样,依据 Shannon 展开式的技巧,我们可以得出 m 元 n 值 McNaughton 函数的展开式及其准析(合)取范式.

命题 8. 设 $g(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,则有

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(\overline{A_0}(x)\wedge g(0,x_2,\ldots,x_m))\vee\left(\overline{A_1}(x)\wedge g\left(\frac{1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee$$
$$\left(\overline{A_2}(x)\wedge g\left(\frac{2}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee\ldots\vee(\overline{A_{n-1}}(x)\wedge g(1,x_2,\ldots,x_m)).$$

证明:$\forall k\in\{0,1,2,\ldots,n-2,n-1\}$,当 $x_1=\frac{k}{n-1}$ 时,

$$(\overline{A_0}(x)\wedge g(0,x_2,\ldots,x_m))\vee\left(\overline{A_1}(x)\wedge g\left(\frac{1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee$$
$$\left(\overline{A_2}(x)\wedge g\left(\frac{2}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee\ldots\vee(\overline{A_{n-1}}(x)\wedge g(1,x_2,\ldots,x_m))=$$
$$(0\wedge g(0,x_2,\ldots,x_m))\vee\ldots\vee\left(0\wedge g\left(\frac{k-1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee\left(1\wedge g\left(\frac{k}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee$$
$$\left(0\wedge g\left(\frac{k+1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\vee\ldots\vee(0\wedge g(1,x_2,\ldots,x_m))=g\left(\frac{k}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)=g(x_1,x_2,\ldots,x_m).$$ □

命题 9. 设 $g(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,约定 $x_l^{\frac{k}{n-1}}=\overline{A_k}(x_l)$ (l=1,2;k=0,1, 2,…,n−2,n−1),则 $g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge x_2^{\alpha_2}\wedge g(\alpha_1,\alpha_2,x_3,\ldots,x_m):(\alpha_1,\alpha_2)\in(L(n))^2\}$.

证明:由命题 8 可知:

$$g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge g(\alpha_1,x_2,x_3,\ldots,x_m):\alpha_1\in L(n)\} \tag{5}$$

又 $g(\alpha_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\vee\{x_2^{\alpha_2}\wedge g(\alpha_1,\alpha_2,x_3,\ldots,x_m):\alpha_2\in L(n)\},\alpha_1=0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1$,代入公式(5),整理可得

$$g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge x_2^{\alpha_2}\wedge g(\alpha_1,\alpha_2,x_3,\ldots,x_m):(\alpha_1,\alpha_2)\in(L(n))^2\}.$$ □

推论 5. 设 $g(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,约定 $x_l^{\frac{k}{n-1}}=\overline{A_k}(x_l)$ (l=1,2,…,m;k=0,1,2,…,n−2,n−1),则

$$g(x_1,\ldots,x_m)=\vee\{x_1^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m):(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in(L(n))^m\}$$
$$=\mathop{\vee}_{k=1}^{n-1}\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge\frac{k}{n-1}:(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right\}.$$

注 11:称 $\mathop{\vee}_{k=1}^{n-1}\left\{x_1^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge x_m^{\alpha_m}\wedge\frac{k}{n-1}:(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right\}$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数的准析取范式.若 $\forall k$=1,2,…,n−1,有 $g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\varnothing$, 即 $g(x_1,\ldots,x_m)$=0,这时可令 $g(x_1,\ldots,x_m)=\overline{A_0}(x_1)\wedge\neg\overline{A_0}(x_1)$, 而 $\overline{A_0}(x_1)\wedge\neg\overline{A_0}(x_1)$ 是 x_1 的 1 元函数,可看作简单准合取式.

下面给出命题 8 的对偶形式.

命题 10. 设 $g(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,则有

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(\neg\overline{A_0}(x)\vee g(0,x_2,\ldots,x_m))\wedge\left(\neg\overline{A_1}(x)\vee g\left(\frac{1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge$$
$$\left(\neg\overline{A_2}(x)\vee g\left(\frac{2}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge\ldots\wedge(\neg\overline{A_{n-1}}(x)\vee g(1,x_2,\ldots,x_m)).$$

证明:$\forall k\in\{0,1,2,\ldots,n-2,n-1\}$,当 $x_1=\frac{k}{n-1}$ 时,

$$(\neg\overline{A_0}(x)\vee g(0,x_2,\ldots,x_m))\wedge\left(\neg\overline{A_1}(x)\vee g\left(\frac{1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge$$
$$\left(\neg\overline{A_2}(x)\vee g\left(\frac{2}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge\ldots\wedge(\neg\overline{A_{n-1}}(x)\vee g(1,x_2,\ldots,x_m))=$$
$$(1\vee g(0,x_2,\ldots,x_m))\wedge\ldots\wedge\left(1\vee g\left(\frac{k-1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge\left(0\vee g\left(\frac{k}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge$$
$$\left(1\vee g\left(\frac{k+1}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)\right)\wedge\ldots\wedge(1\vee g(1,x_2,\ldots,x_m))=g\left(\frac{k}{n-1},x_2,\ldots,x_m\right)=g(x_1,x_2,\ldots,x_m).$$

□

命题 11. 设 $g(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,约定 $x_l^{\frac{k}{n-1}}=\neg\overline{A_k}(x_l)$ (l=1,2;k=0,1,2,…,n−2,n−1),则 $g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee x_2^{\beta_2}\vee g(\beta_1,\beta_2,x_3,\ldots,x_m):(\beta_1,\beta_2)\in(L(n))^2\}$.

证明:由命题 10 可知:

$$g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee g(\beta_1,x_2,x_3,\ldots,x_m):\beta_1\in L(n)\}\tag{6}$$

又 $g(\beta_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\wedge\{x_2^{\beta_2}\vee g(\beta_1,\beta_2,x_3,\ldots,x_m):\beta_2\in L(n)\}$, $\beta_1=0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1$,代入公式(6),整理得:

$$g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee x_2^{\beta_2}\vee g(\beta_1,\beta_2,x_3,\ldots,x_m):(\beta_1,\beta_2)\in(L(n))^2\}.$$ □

推论 6. 设 $g(x_1,\ldots,x_m)$为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,约定 $x_l^{\frac{k}{n-1}}=\neg\overline{A_k}(x_l)$ (l=1,2,…,m;k=0,1,2,…,n−2,n−1),则

$$g(x_1,\ldots,x_m)=\wedge\{x_1^{\beta_1}\vee\ldots\vee x_m^{\beta_m}\vee g(\beta_1,\ldots,\beta_m):(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in(L(n))^m\}$$
$$=\mathop{\wedge}_{k=0}^{n-2}\left\{x_1^{\beta_1}\vee\ldots\vee x_m^{\beta_m}\vee\frac{k}{n-1}:(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right\}.$$

注 12:称 $\mathop{\wedge}_{k=0}^{n-2}\left\{x_1^{\beta_1}\vee\ldots\vee x_m^{\beta_m}\vee\frac{k}{n-1}:(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right\}$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数的准合取范式.若

$\forall k$=0,1,2,…,n−2,有 $g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\varnothing$,即 $g(x_1,\ldots,x_m)$=1,这时可令 $g(x_1,...,x_m)=\overline{A_0}(x_1)\vee\neg\overline{A_0}(x_1)$,而 $\overline{A_0}(x_1)\vee\neg\overline{A_0}(x_1)$ 是 x_1 的一元函数,可看作简单准析(合)取式.

3 n 值 McNaughton 函数的计数问题

第 2 节依据 Shannon 展开式的技巧,我们得到了 n 值 McNaughton 函数的展开式及准析(合)取范式.下面,我们根据 n 值 McNaughton 函数的范式表示,研究 n 值 McNaughton 函数的计数问题.

例 3:设

$A_1=\neg(\neg p_1\to p_1),B_1=\neg(p_1\to\neg p_1),C_1=(p_1\to\neg p_1)\wedge(\neg p_1\to p_1),C_1'=(p_1\to\neg p_1)\wedge(\neg p_1\to p_1)\wedge p_1=C_1\wedge p_1$,令

$$\begin{array}{lll} D_1=\neg(A_1\vee B_1\vee C_1) & D_2=B_1 & D_3=C_1' \\ D_4=B_1\vee C_1' & D_5=C_1 & D_6=B_1\vee C_1 \\ D_7=A_1 & D_8=A_1\vee B_1 & D_9=A_1\vee C_1' \\ D_{10}=A_1\vee B_1\vee C_1' & D_{11}=A_1\vee C_1 & D_{12}=A_1\vee B_1\vee C_1 \end{array}$$

则这 12 个公式导出的一元 3 值 McNaughton 函数由下表给出.

三值函数 / p_1 的值	$\overline{D_1}$	$\overline{D_2}$	$\overline{D_3}$	$\overline{D_4}$	$\overline{D_5}$	$\overline{D_6}$	$\overline{D_7}$	$\overline{D_8}$	$\overline{D_9}$	$\overline{D_{10}}$	$\overline{D_{11}}$	$\overline{D_{12}}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

由上表可以看出:当 p_1 赋值为 0,1 时,$\overline{D_k}$ 的值只能取为 0,1;当 p_1 赋值为 $\frac{1}{2}$ 时,$\overline{D_k}$ 的值可取为 3 个值 0,$\frac{1}{2}$,1.因此可知,所有一元 3 值 McNaughton 函数至多有 2×2×3=12 个,而例 3 中所给的 12 个公式恰好导出了 12 个不同的一元 3 值 McNaughton 函数.所以,1 元 3 值 McNaughton 函数共 12 个,而一元 3 值函数共 $3^{3^1}=27$ 个.

定义 12[14]. 设 $L(n)$是$(\neg,\to)$型自由代数,M 是 $L(n)$的非空子集.如果 M 关于运算$\neg,\to$都封闭,则称 M 为 $L(n)$的子代数.这里,$\neg x=1-x,x\to y=\min\{1-x+y,1\},x,y\in L(n)$.任取$\alpha\in M$,则由$\alpha\to\alpha=1$ 得知,$1\in M,0=\neg 1\in M$.可见:$L(n)$的子代数一定包含 0 与 1;又,$C_2=\{0,1\}$显然是 $L(n)$的一个子代数,它是 $L(n)$的最小子代数.

定理 3[14]. $L(m)$是 $L(n)$的子代数,当且仅当 $n-1=k(m-1)$,(k=1,2,…).

推论 7. 如果 $n-1$ 为素数,则 $L(n)$的子代数只有 $L(n)$和 C_2.

推论 8. 设 r 为素数,如果 $n-1=r^t(t\geqslant 1)$,则 $L(n)$的子代数为 $C_2,L(r+1),L(r^2+1),\ldots,L(r^t+1)$,且

$$C_2\lhd L(r+1)\lhd L(r^2+1)\lhd\ldots\lhd L(r^t+1).$$

$L(m)\lhd L(n)$表示 $L(m)$是 $L(n)$的子代数.

推论 9. 设 $r_1,r_2(r_1\neq r_2)$为素数,如果 $n-1=r_1r_2$,则 $L(n)$的子代数为 $C_2,L(r_1+1),L(r_2+1),L(r_1r_2+1)=L(n)$,且

$$C_2\lhd L(r_1+1),L(r_2+1)\lhd L(r_1r_2+1)=L(n).$$

$L(r_1r_2+1)$是包含 $L(r_1+1)$与 $L(r_2+1)$的最小子代数.

命题 12. 设 $x_0=\frac{r}{n-1}$,若 r 与 $n-1$ 互素,则 $Ł_n$ 中均存在 1 元逻辑公式 $C_k(p)$,使得 $C_k(p)$导出的一元函数 $\overline{C_k}(x)$ 在 x_0 的值为 $\frac{k}{n-1}$,即 $\overline{C_k}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\frac{k}{n-1}$ (k=0,1,2,…,n−2,n−1).

证明:

(i) 若 r=1,可令 $C_0(p)=\neg(p\to p),C_1(p)=p,C_2(p)=\neg p\to p,C_3(p)=\neg C_2(p)\to p,\ldots,C_{n-1}(p)=\neg C_{n-2}(p)\to p$,则有

$$
\begin{aligned}
&\overline{C_0}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\neg\left(\frac{1}{n-1}\to\frac{1}{n-1}\right)=0,\\
&\overline{C_1}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n-1},\\
&\overline{C_2}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\neg\frac{1}{n-1}\to\frac{1}{n-1}=\frac{2}{n-1},\\
&\overline{C_3}\left(\frac{1}{n-1}\right))=\neg\frac{2}{n-1}\to\frac{1}{n-1}=\frac{3}{n-1},\\
&\ldots,\\
&\overline{C_{n-1}}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\neg\frac{n-2}{n-1}\to\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}=1.
\end{aligned}
$$

(ii) 若 $r>1$,由 r 与 $n-1$ 互素知,存在正整数 u,v,使得 $ur-v(n-1)=\pm1$,不妨设 $ur-v(n-1)=1$.这时,令

$$
\begin{aligned}
&D_1(p)=p,\\
&D_2(p)=\begin{cases}\neg D_1(p)\to p, & \overline{D_1}\left(\frac{r}{n-1}\right)+\frac{r}{n-1}<1\\ \neg(D_1(p)\to\neg p), & \overline{D_1}\left(\frac{r}{n-1}\right)+\frac{r}{n-1}\geqslant 1\end{cases},\\
&D_3(p)=\begin{cases}\neg D_2(p)\to p, & \overline{D_2}\left(\frac{r}{n-1}\right)+\frac{r}{n-1}<1\\ \neg(D_2(p)\to\neg p), & \overline{D_2}\left(\frac{r}{n-1}\right)+\frac{r}{n-1}\geqslant 1\end{cases},\\
&\ldots,\\
&D_u(p)=\begin{cases}\neg D_{u-1}(p)\to p, & \overline{D_{u-1}}\left(\frac{r}{n-1}\right)+\frac{r}{n-1}<1\\ \neg(D_{u-1}(p)\to\neg p), & \overline{D_{u-1}}\left(\frac{r}{n-1}\right)+\frac{r}{n-1}\geqslant 1\end{cases}.
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\overline{D_1}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\frac{r}{n-1},\\
&\overline{D_2}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{2r}{n-1}, & 0\leqslant\frac{r}{n-1}<\frac{1}{2}\\ \frac{2r}{n-1}-1, & \frac{1}{2}\leqslant\frac{r}{n-1}<1\end{cases},\\
&\overline{D_3}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{3r}{n-1}, & 0\leqslant\frac{r}{n-1}<\frac{1}{3}\\ \frac{3r}{n-1}-1, & \frac{1}{3}\leqslant\frac{r}{n-1}<\frac{2}{3}\\ \frac{3r}{n-1}-2, & \frac{2}{3}\leqslant\frac{r}{n-1}<1\end{cases},\\
&\ldots,\\
&\overline{D_u}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\frac{ur}{n-1}-k,\frac{k}{u}\leqslant\frac{r}{n-1}<\frac{k+1}{u},k=0,1,2,\ldots,u-1.
\end{aligned}
$$

注意,$0\leqslant\overline{D_i}\left(\frac{r}{n-1}\right)<1,i=1,2,\ldots,u$.而在$\overline{D_u}\left(\frac{r}{n-1}\right)$中,当 $k=v$ 时,$\frac{ur}{n-1}-v=\frac{1}{n-1}$,所以$\overline{D_u}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\frac{1}{n-1}$.这样就可以采用情形(i)中的方法,令

$$C_0(p)=\neg(p\to p), C_1(p)=D_u(p), C_2(p)=\neg D_u(p)\to D_u(p), C_3(p)=\neg C_2(p)\to D_u(p),\ldots, C_{n-1}(p)=\neg C_{n-2}(p)\to D_u(p),$$

则

$$\overline{C_0}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\neg\left(\frac{r}{n-1}\to\frac{r}{n-1}\right)=0,$$

$$\overline{C_1}\left(\frac{r}{n-1}\right)=D_u\left(\frac{r}{n-1}\right)=\frac{1}{n-1},$$

$$\overline{C_2}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\neg\frac{1}{n-1}\to\frac{1}{n-1}=\frac{2}{n-1},$$

$$\overline{C_3}\left(\frac{r}{n-1}\right)=\neg\frac{2}{n-1}\to\frac{1}{n-1}=\frac{3}{n-1},$$

$$\ldots,$$

$$\overline{C_{n-1}}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\neg\frac{n-2}{n-1}\to\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}=1.$$ □

例 4:设 $L(21)=\left\{0,\frac{1}{20},\frac{2}{20},\ldots,\frac{19}{20},1\right\}$,求 $Ł_{21}$ 中的一元逻辑公式 $C_k(p)$,使得 $C_k(p)$导出的一元函数 $\overline{C_k}(x)$ 满足

$$\overline{C_k}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{k}{20}, k=0,1,2,\ldots,19,20.$$

解:令 $D_1(p)=p$:

- 因为 $\overline{D_1}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}\geqslant 1$,所以,令 $D_2(p)=\neg(D_1(p)\to\neg p)$,则 $\overline{D_2}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{2}{20}$;
- 因为 $\overline{D_2}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}<1$,所以,令 $D_3(p)=\neg D_2(p)\to p$,则 $\overline{D_3}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{13}{20}$;
- 因为 $\overline{D_3}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}\geqslant 1$,所以,令 $D_4(p)=\neg(D_3(p)\to\neg p)$,则 $\overline{D_4}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{4}{20}$;
- 因为 $\overline{D_4}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}<1$,所以,令 $D_5(p)=\neg D_4(p)\to p$,则 $\overline{D_5}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{15}{20}$;
- 因为 $\overline{D_5}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}\geqslant 1$,所以,令 $D_6(p)=\neg(D_5(p)\to\neg p)$,则 $\overline{D_6}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{6}{20}$;
- 因为 $\overline{D_6}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}<1$,所以,令 $D_7(p)=\neg D_6(p)\to p$,则 $\overline{D_7}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{17}{20}$;
- 因为 $\overline{D_7}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}\geqslant 1$,所以,令 $D_8(p)=\neg(D_7(p)\to\neg p)$,则 $\overline{D_8}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{8}{20}$;
- 因为 $\overline{D_8}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}<1$,所以,令 $D_9(p)=\neg D_8(p)\to p$,则 $\overline{D_9}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{19}{20}$;
- 因为 $\overline{D_9}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}\geqslant 1$,所以,令 $D_{10}(p)=\neg(D_9(p)\to\neg p)$,则 $\overline{D_{10}}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{10}{20}$;
- 因为 $\overline{D_{10}}\left(\frac{11}{20}\right)+\frac{11}{20}<1$,所以,令 $D_{11}(p)=\neg D_{10}(p)\to p$,则 $\overline{D_{11}}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{1}{20}$.

这时,令

$$C_0(p)=\neg(p\to p), C_1(p)=D_{11}(p), C_2(p)=\neg D_{11}(p)\to D_{11}(p), C_3(p)=\neg C_2(p)\to D_{11}(p),\ldots, C_{20}(p)=\neg C_{19}(p)\to D_{11}(p),$$

则有

$$\overline{C_0}\left(\frac{11}{20}\right)=\neg\left(\frac{11}{20}\to\frac{11}{20}\right)=0,$$
$$\overline{C_1}\left(\frac{11}{20}\right)=D_{11}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{1}{20},$$
$$\overline{C_2}\left(\frac{11}{20}\right)=\neg\frac{1}{20}\to\frac{1}{20}=\frac{2}{20},$$
$$\overline{C_3}\left(\frac{11}{20}\right)=\neg\frac{2}{20}\to\frac{1}{20}=\frac{3}{20},$$
$$\ldots,$$
$$\overline{C_{20}}\left(\frac{11}{20}\right)=\neg\frac{19}{20}\to\frac{1}{20}=\frac{20}{20}=1.$$

注 13:在例 4 中,因为 11 与 20 互素,所以存在正整数 $u=11,v=6$,使得 $u\times 11-v\times 6=11\times 11-20\times 6=1$,故

$$\overline{D_{11}}\left(\frac{11}{20}\right)=\frac{1}{20}.$$

定理 4. 设 $n-1$ 为素数,则 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共 $2^{2^m}\times n^{n^m-2^m}$ 个.

证明:因为 m 维向量$(x_1,\ldots,x_m)\in(L(n))^m$ 的不同选取共 n^m 个,其中,$x_1,\ldots,x_m$ 只取 0,1 两个值的选取共 2^m 个;$x_1,\ldots,x_m$ 中至少有一个不取 0,1 的选取共 n^m-2^m 个.

- 当 $x_1,\ldots,x_m$ 只取 0,1 两个值时,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值只能为 0,1.由推论 5 得知,对这 2^m 个不同的选取都能取到 0 和 1.
- 当 $x_1,\ldots,x_m$ 中至少有一个不取 0,1 时,即至少有一个取为 $\frac{r}{n-1}$,$1\leqslant r\leqslant n-2$,因为 $n-1$ 为素数,所以 r 与 $n-1$ 互素.由命题 12 及推论 5 得知,对这 n^m-2^m 个不同选取 $g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到 $L(n)$中 n 个值的任意一个值.

因此,m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共 $2^{2^m}\times n^{n^m-2^m}$ 个. □

定理 5. 设 $n-1=r^t$(r 为素数,$t\geqslant 1$),则 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共 $2^{2^m}\times(r+1)^{(r+1)^m-2^m}\times(r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m}\times\ldots\times(r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个.

证明:因为 m 维向量$(x_1,\ldots,x_m)\in(L(n))^m$ 的不同选取共 n^m 个,即$(r^t+1)^m$ 个:

- 若 $x_1,\ldots,x_m$ 只取 0,1 两个值,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共 2^m 个.这时,由推论 5 可知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值都能取到 0 和 1 两个值;
- 若 $x_1,\ldots,x_m$ 在 $\left\{0,\frac{1}{r},\frac{2}{r},\ldots,\frac{r-1}{r},1\right\}$ 中取值,且至少有一个不取 0,1,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共$(r+1)^m-2^m$ 个.这时,$x_1,\ldots,x_m$ 中至少有一个取为 $\frac{k}{r}$,$1\leqslant k\leqslant r-1$.因为 r 为素数,所以 k 与 r 互素.由命题 12 及推论 5 知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到 $\left\{0,\frac{1}{r},\frac{2}{r},\ldots,\frac{r-1}{r},1\right\}$ 中 $r+1$ 个值的任意一个值;
- 若 $x_1,\ldots,x_m$ 在 $\left\{0,\frac{1}{r^2},\frac{2}{r^2},\ldots,\frac{r^2-1}{r^2},1\right\}$ 中取值,且至少有一个不取 $\left\{0,\frac{1}{r},\frac{2}{r},\ldots,\frac{r-1}{r},1\right\}$ 的值,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共$(r^2+1)^m-(r+1)^m$ 个.这时,$x_1,\ldots,x_m$ 中至少有一个取为 $\frac{k}{r^2}$,$k\neq 0,r,2r,\ldots,(r-1)r,r^2$.因为 r 为素数,所以 k 与 r 互素.由命题 12 及推论 5 可知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到 $\left\{0,\frac{1}{r^2},\frac{2}{r^2},\ldots,\frac{r^2-1}{r^2},1\right\}$ 中 r^2+1 个值的任意一个值;
- …
- 若 $x_1,\ldots,x_m$ 在 $\left\{0,\frac{1}{r^t},\frac{2}{r^t},\ldots,\frac{r^t-1}{r^t},1\right\}=L(n)$ 中取值,且至少有一个不取 $\left\{0,\frac{1}{r^{t-1}},\frac{2}{r^{t-1}},\ldots,\frac{r^{t-1}-1}{r^{t-1}},1\right\}$ 的值,则

$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共$(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m$个.

这时,$x_1,\ldots,x_m$中至少有一个取为$\frac{k}{r^t},k\neq 0,r,2r,\ldots,(r^t-1)r,r^t$.因为$r$为素数,所以$k$与$r$互素,由命题12及推论5得知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到$\left\{0,\frac{1}{r^t},\frac{2}{r^t},\ldots,\frac{r^t-1}{r^t},1\right\}$中$r^t+1$个值的任意一个值.

因此,m元n值McNaughton函数$g(x_1,\ldots,x_m)$共$2^{2^m}\times(r+1)^{(r+1)^m-2^m}\times(r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m}\times\ldots\times(r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$个. □

定理6. 设$n-1=r_1r_2$(r_1r_2为素数,$r_1\neq r_2$),则m元n值McNaughton函数$g(x_1,\ldots,x_m)$共$2^{2^m}\times(r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m}\times(r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m}\times(r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$个.

证明:因为m维向量$(x_1,\ldots,x_m)\in(L(n))^m$的不同选取共$n^m$个,即$(r_1r_2+1)^m$个:

(i) 若$x_1,\ldots,x_m$只取0,1两个值,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共2^m个.这时,由推论5可知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值都能取到0和1两个值;

(ii) 若$x_1,\ldots,x_m$在$\left\{0,\frac{1}{r_1},\frac{2}{r_1},\ldots,\frac{r_1-1}{r_1},1\right\}$中取值,且至少有一个不取0,1,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共$(r_1+1)^m-2^m$个.这时,$x_1,\ldots,x_m$中至少有一个取为$\frac{k}{r_1},1\leqslant k\leqslant r_1-1$.因为$r_1$为素数,所以$k$与$r_1$互素.由命题12及推论5得知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到$\left\{0,\frac{1}{r_1},\frac{2}{r_1},\ldots,\frac{r_1-1}{r_1},1\right\}$中$r_1+1$个值的任意一个值;

(iii) 若$x_1,\ldots,x_m$在$\left\{0,\frac{1}{r_2},\frac{2}{r_2},\ldots,\frac{r_2-1}{r_2},1\right\}$中取值,且至少有一个不取0,1,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共$(r_2+1)^m-2^m$个.这时,$x_1,\ldots,x_m$中至少有一个取为$\frac{k}{r_2},1\leqslant k\leqslant r_2-1$.因为$r_2$为素数,所以$k$与$r_2$互素.由命题12及推论5得知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到$\left\{0,\frac{1}{r_2},\frac{2}{r_2},\ldots,\frac{r_2-1}{r_2},1\right\}$中$r_2+1$个值的任意一个值;

(iv) 若$x_1,\ldots,x_m$在$\left\{0,\frac{1}{r_1r_2},\frac{2}{r_1r_2},\ldots,\frac{r_1r_2-1}{r_1r_2},1\right\}$中取值,且不是上述3种情形之一,即至少有一个不取$\left\{0,\frac{1}{r_1},\frac{2}{r_1},\ldots,\frac{r_1-1}{r_1},1\right\}\cup\left\{0,\frac{1}{r_2},\frac{2}{r_2},\ldots,\frac{r_2-1}{r_2},1\right\}$的值;或者至少有一个取自$\left\{0,\frac{1}{r_1},\frac{2}{r_1},\ldots,\frac{r_1-1}{r_1},1\right\}$中的非0,1,一个取自$\left\{0,\frac{1}{r_2},\frac{2}{r_2},\ldots,\frac{r_2-1}{r_2},1\right\}$中的非0,1,则$(x_1,\ldots,x_m)$不同的选取共$(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m$个.这时,

若$x_1,\ldots,x_m$中至少有一个取为$\frac{k}{r_1r_2},k\neq 0,r_1,2r_1,\ldots,(r_2-1)r_1,r_2r_1;r_2,2r_2,\ldots,(r_1-1)r_2$,因为$r_1,r_2$为素数,所以$k$与$r_1r_2$互素.由命题12及推论5可知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到$\left\{0,\frac{1}{r_1r_2},\frac{2}{r_1r_2},\ldots,\frac{r_1r_2-1}{r_1r_2},1\right\}$中$r_1r_2+1$个值的任意一个值;

若$x_1,\ldots,x_m$中至少有一个取自$\left\{0,\frac{1}{r_1},\frac{2}{r_1},\ldots,\frac{r_1-1}{r_1},1\right\}$中的非0,1,一个取自$\left\{0,\frac{1}{r_2},\frac{2}{r_2},\ldots,\frac{r_2-1}{r_2},1\right\}$中的非0,1,不妨设一个取$\frac{i}{r_1},1\leqslant i\leqslant r_1-1$,另一个取$\frac{j}{r_2},1\leqslant j\leqslant r_2-1$,因为$r_1,r_2$为素数,所以$i$与$r_1$互素,$j$与$r_2$互素.由命题12可知,存在一元逻辑公式$D_i(p)$与$D_j(p)$,使得$\overline{D_i}\left(\frac{i}{r_1}\right)=\frac{1}{r_1},\overline{D_j}\left(\frac{j}{r_2}\right)=\frac{1}{r_2}$.这时,令$D(p_1,p_2)=\neg D_i(p_1)\to D_j(p_2)$,则有

$$\overline{D}\left(\frac{i}{r_1},\frac{j}{r_2}\right)=\neg\frac{1}{r_1}\to\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}.$$

因为 r_1,r_2 为素数,所以 r_1+r_2 与 r_1r_2 互素.

再由命题 12 及推论 5 得知,$g(x_1,\ldots,x_m)$的值能取到 $\left\{0,\frac{1}{r_1r_2},\frac{2}{r_1r_2},\ldots,\frac{r_1r_2-1}{r_1r_2},1\right\}$ 中 r_1r_2+1 个值的任意一个值.

因此,m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共有

$$2^{2^m}\times(r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m}\times(r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m}\times\quad(r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}\text{ 个.}$$ □

注 14:对于任意的 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 $Ł_n(n\geqslant 3)$,由算术基本定理可知,$n-1$ 能够唯一地表示为

$$n-1=r_1^{t_1}\times\ldots\times r_k^{t_k},$$

其中,r_i 为素数,$t_i\geqslant 1,i=1,2,\ldots,k$.采用定理 5 和定理 6 的方法,可以得到 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$的个数,但个数的表达方式随着 $n-1$ 素分解的复杂程度会变得很复杂.

4 $Ł_n$ 中公式的构造及逻辑等价类的计数问题

在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,由逻辑公式 A 可以很容易地得到 A 导出的 n 值 McNaughton 函数 $\overline{A}$.反过来,由 n 值 McNaughton 函数 $g:(L(n))^m\to L(n)$出发,如何构造一个逻辑公式 A,使得 A 导出的 n 值 McNaughton 函数恰好就是 g 呢?下面,我们来解决这个问题.

例 5:设 $L(6)=\left\{0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right\}$,求 $Ł_6$ 中的 1 元逻辑公式 $A(p)$,使得 $A(p)$导出的 1 元函数 $\overline{A}(x)$ 满足:

x	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
$\overline{A}(x)$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

解:由例 2 可知,存在一元逻辑公式 $A_k(p)$,使得 $A_k(p)$导出的一元函数 $\overline{A_k}(x)$ 满足:

$$\overline{A_k}(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{k}{5}\\ 0, & x\neq\frac{k}{5}\end{cases},x\in L(6),k=0,1,2,3,4,5.$$

由推论 5 得知, $\overline{A}(x)=\overline{A_0}(x)\vee\left(\overline{A_1}(x)\wedge\frac{2}{5}\right)\vee\left(\overline{A_2}(x)\wedge\frac{3}{5}\right)\vee\left(\overline{A_3}(x)\wedge\frac{1}{5}\right)\vee\left(\overline{A_4}(x)\wedge\frac{1}{5}\right)\vee\overline{A_5}(x)$.令

$$C_1(p)=\neg p\to p,C_2(p)=(\neg p\to p)\to p,C_3(p)=\neg(p\to\neg p),C_4(p)=\neg p,$$

则 $\overline{C_1}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5},\overline{C_2}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5},\overline{C_3}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5},\overline{C_4}\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{5}$.这时,令

$$A(p)=A_0(p)\vee(A_1(p)\wedge C_1(p))\vee(A_2(p)\wedge C_2(p))\vee(A_3(p)\wedge C_3(p))\vee(A_4(p)\wedge C_4(p))\vee A_5(p),$$

则 $A(p)$导出的一元函数 $\overline{A}(x)$ 满足题设条件.

例 6:设 $n-1$ 为素数,$g(x_1,\ldots,x_m)$是任意一个 m 元 n 值 McNaughton 函数,求 $Ł_n$ 中的 m 元逻辑公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$,使得 $A(p_1,\ldots,p_m)$导出的 m 元函数就是 g.

解:设 $g(x_1,\ldots,x_m)$是任意一个 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1,约定 $x_l^{\frac{k}{n-1}}=\overline{A_k}(x_l)$ ($l=1,2,\ldots,m$; $k=0,1,2,\ldots,n-2,n-1$):

(i) 若$\forall k=0,1,2,\ldots,n-2$, $g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)=\varnothing$, 即 $g(x_1,\ldots,x_m)=1$,由注 12 可知, $g(x_1,\ldots,x_m)=\overline{A_0}(x_1)\vee\neg\overline{A_0}(x_1)$,令

$$A(p_1,\ldots,p_m)=A_0(p_1)\vee\neg A_0(p_1),$$

则 $A(p_1,\ldots,p_m)$导出的函数就是 g.

(ii) 若∃k=0,1,2,…,n−2,使得 $g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\neq\varnothing$,设 $\frac{k}{n-1}=\frac{k_1}{(n-1)_1}$ (k_1 与$(n-1)_1$ 互素),由定理 4 得知,$x_1,\ldots,x_m$ 至少有一个取值 $\frac{k_1}{(n-1)_1}$ (k_1 与$(n-1)_1$ 互素),不妨设 x_i 取值为 $\frac{k_1}{(n-1)_1}$.

由命题 12 可知,存在一元逻辑公式 $C_k(p_i)$,使得 $\overline{C_k}\left(\frac{k_1}{(n-1)_1}\right)=\frac{k_1}{(n-1)_1}=\frac{k}{n-1}$.令公式:

$$A(p_1,\ldots,p_m)=\bigwedge_{k=0}^{n-2}\left\{p_1^{\beta_1}\vee\ldots\vee p_{i-1}^{\beta_{i-1}}\vee(p_i^{\beta_i}\vee C_k(p_i))\vee p_{i+1}^{\beta_{i+1}}\vee\ldots\vee p_m^{\beta_m}:(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right\}.$$

由推论 6 可知,$A(p_1,\ldots,p_m)$导出的函数就是 g.

定理 7. 在 $Ł_n$ 中,m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类的个数可分以下几种情形来讨论:

(i) 若 n−1 为素数,则 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类共 $2^{2^m}\times n^{n^m-2^m}$ 个;

(ii) 若 $n-1=r^t$(r 为素数,$t\geqslant1$),

则 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类共 $2^{2^m}\times(r+1)^{(r+1)^m-2^m}\times(r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m}\times\ldots\times(r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个.

(iii) 若 $n-1=r_1r_2$(r_1r_2 为素数,$r_1\neq r_2$),则有:

m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类共 $2^{2^m}\times(r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m}\times(r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m}\times(r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$ 个.

证明:任意 m 元 n 值 McNaughton 函数是由 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$导出的,且任意 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$导出的函数是 m 元 n 值 McNaughton 函数.

(i) 当 n−1 为素数时,由定理 4 得知,m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共 $2^{2^m}\times n^{n^m-2^m}$ 个;又因为逻辑等价的公式导出的 n 值 McNaughton 函数是相等的,所以 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类共 $2^{2^m}\times n^{n^m-2^m}$ 个.

(ii) 当 $n-1=r^t$(r 为素数,$t\geqslant1$)时,由定理 5 得知,m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共 $2^{2^m}\times(r+1)^{(r+1)^m-2^m}\times(r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m}\times\ldots\times(r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个;又因为逻辑等价的公式导出的 n 值 McNaughton 函数是相等的,所以 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类共 $2^{2^m}\times(r+1)^{(r+1)^m-2^m}\times(r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m}\times\ldots\times(r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个.

(iii) 当 $n-1=r_1r_2$(r_1r_2 为素数,$r_1\neq r_2$)时,由定理 6 得知,m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1,\ldots,x_m)$共 $2^{2^m}\times(r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m}\times(r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m}\times(r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$ 个;

又因为逻辑等价的公式导出的 n 值 McNaughton 函数是相等的,所以 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类共 $2^{2^m}\times(r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m}\times(r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m}\times(r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$ 个.

注 15:对于任意的 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 $Ł_n$($n\geqslant3$),由算术基本定理可知,n−1 能够唯一地表示为

$$n-1=r_1^{t_1}\times\ldots\times r_k^{t_k},$$

其中,r_i 为素数,$t_i\geqslant1$,i=1,2,…,k.由注 14 可知,在一般的 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 $Ł_n$ 中,可以得到 m 元公式 $A(p_1,\ldots,p_m)$的逻辑等价类的个数.

5 结束语

本文由 Boole 函数的 Shannon 展开式出发,研究了 n 值 McNaughton 函数的展开式,给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的准析取范式和准合取范式.在此基础上,给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的计数问题.并在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,研究了逻辑公式的构造问题以及 m 元公式逻辑等价类的计数问题.这些问题的解决,为 n 值 Łukasiewicz 逻辑在近似推理中的应用奠定了基础.然而,在 n 值 R_0-逻辑系统 L_n^* 中,由逻辑公式导出的函数的结构与 McNaughton 函数有很大的不同,其结构和计数问题将另文加以讨论.

References:

[1] Baier C, Katoen JP. Principles of Model Checking. The MIT Press Cambridge, 2008.

[2] Dasgupta P, Chakrabarti PP, Deka JK, Sankaranarayanan S. Min-Max computation tree logic. Artificial Intelligence, 2001,127(1): 137−162.

[3] Ivančić F, Yang ZJ, ganai MK, Gupta A, Ashar P. Efficient SAT-based bounded model checking for software verification. Theoretical Computer Science, 2008,404(3):256−274. [doi: 10.1016/j.tcs.2008.03.013]

[4] Basagiannis S, Katsaros P, Pombortsis A. An intruder model with message inspection for model checking security protocols. Computer & Security, 2010,29(1):16−34. [doi: 10.1016/j.cose.2009.08.003]

[5] Burkart O, Steffen B. Model checking the full modal mu-calculus for infinite sequential processes. Theoretical Computer Science, 1999,221(1-2):251−270.

[6] Lomuscio A, Penczek W, Woźna B. Bounded model checking for knowledge and real time. Artificial Intelligence, 2007,171(16-17): 1011−1038. [doi: 10.1016/j.artint.2007.05.005]

[7] Raimondi F, Lomuscio A. Automatic verification of multi-agent systems by model checking via ordered binary decision diagrams. Journal of Applied Logic, 2007,5(2):235−251. [doi: 10.1016/j.jal.2005.12.010]

[8] Moreno-Ger P, Fuentes-Fernández R, Sierra-Rodriguez JL, Fernández-Manjón B. Model-Checking for adventure videogames. Information and Software Technology, 2009,51(3):564−580. [doi: 10.1016/j.infsof.2008.08.003]

[9] Baresi L, Rafe V, Rahmani AT, Spoletini P. An efficient solution for model checking graph transformation systems. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2008,213(1):3−21. [doi: 10.1016/j.entcs.2008.04.071]

[10] Boucheneb H, Hadjidj R. CTL^* model checking for time Petri nets. Theoretical Computer Science, 2006,353(1-3):208−227. [doi: 10.1016/j.tcs.2005.11.002]

[11] Awedh M, Somenzi F. Termination criteria for bounded model checking: extensions and comparison. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2006,144(1):51−66. [doi: 10.1016/j.entcs.2005.07.019]

[12] Wang GJ. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. 2nd ed., Beijing: Science Press, 2006. 16−40 (in Chinese).

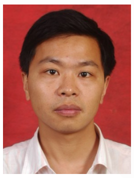
[13] Cignoli RLO, D'Ottaviano IML, Mundici D. Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 7−30.

[14] Wang GJ. Nonclassical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. 2nd ed., Beijing: Science Press, 2008. 29−36 (in Chinese).

附中文参考文献:

[12] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理.第2版,北京:科学出版社,2006.16−40.

[14] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.第2版,北京:科学出版社,2008.29−36.



王庆平(1979－),男,山东东平人,博士生,讲师,CCF会员,主要研究领域为不确定性推理,计量逻辑学.
E-mail: lc_wqp@163.com

王国俊(1935－),男,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究领域为不确定性推理,计量逻辑学.
E-mail: gjwang@snnu.edu.cn