

边界约束的非相交球树实体对象多维统一索引*

俞肇元¹, 袁林旺^{1,2+}, 罗文¹, 胡勇³, 闾国年¹

¹(虚拟地理环境教育部重点实验室(南京师范大学), 江苏 南京 210046)

²(江苏省大规模复杂系统数值模拟重点实验室(南京师范大学), 江苏 南京 210046)

³(南京师范大学 计算机科学与技术学院, 江苏 南京 210046)

Boundary Restricted Non-Overlapping Sphere Tree for Unified Multidimensional Solid Object Index

YU Zhao-Yuan¹, YUAN Lin-Wang^{1,2+}, LUO Wen¹, HU Yong³, LÜ Guo-Nian¹

¹(Key Laboratory of VGE of Ministry of Education (Nanjing Normal University), Nanjing 210046, China)

²(Jiangsu Provincial Key Laboratory for Numerical Simulation of Large Scale Complex System (Nanjing Normal University), Nanjing 210046, China)

³(School of Computer Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

+ Corresponding author: E-mail: yuanlinwang@njnu.edu.cn

Yu ZY, Yuan LW, Luo W, Hu Y, Lü GN. Boundary restricted non-overlapping sphere tree for unified multidimensional solid object index. Journal of Software, 2012, 23(10): 2746-2759 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4214.htm>

Abstract: To solve leakages as complex subdivision structures, high nodes overlap probability and poor supporting on multi-dimensional entity object retrievals and the computation of existing spatial indexes. This paper presents a boundary restricted non-overlapping sphere tree for a unified multidimensional solid object index. By using the outer product expression of a sphere in Geometric Algebra, an approach is explored for intersection judgments and point extractions between lines and planes and lines and spherical surfaces based on meet operators. The element subdivision of multi-dimensional object voxelization and the boundary restricted non-overlapping sphere-filling algorithm is developed to balance the conditions (e.g. granularity, non-overlapping subdivision of object voxelization), the duplication and approximate degrees of approaching objects. Furthermore, generating and updating minimum boundary sphere and batch Neural Gas hierarchical clustering algorithm is also presented, and contains a volume adjusted, index level system steady with the balance of each branch of a sphere tree. Next, with the advantage of a clear geometric meaning, simple geometric relations calculation among spheres and dynamical updateable parameters, index structure can be dynamically generated and updated. Finally, the unified multidimensional solid object index, a query mechanism of any location and range on and in the solid objects is proposed. The updated minimum boundary sphere construction, algorithm, and the volume adjusted adaptive batch Neural Gas hierarchical cluster algorithm are defined to quickly, robustly, relatively, and uniformly classify the filling sphere. The simulation of different physical objects and performance comparison with a commonly used

* 基金项目: 国家自然科学基金(41171300); 国家科技支撑计划(2012BAH35B02); 江苏省自然科学基金(BK2012454)

收稿时间: 2011-08-23; 修改时间: 2012-01-16; 定稿时间: 2012-03-27

sphere tree indexes suggest that the proposed index can effectively query any position or regions on and in the solid objects, and support the nearest linkage distance and dynamical overlapping query under limited time restrictions with high precision.

Key words: multi-dimension unified spatial index; non-overlapping sphere tree; space partition; spatial cluster; solid object index

摘要: 针对现有空间索引剖分结构复杂、节点重叠率高及对多维实体对象检索及运算支撑较弱等问题,构建了一种边界约束的非相交球树实体对象多维统一空间索引;利用球的几何代数外积表达,提出了基于求交算子的直线-平面和直线-球面的相交判定与交点提取方法,建立了多维实体对象体元化剖分方法及包含边界约束的非相交离散球实体填充算法,实现了实体对象空间均匀、非重叠的分割,并在填充球的个数、重叠率以及对对象逼近近似度等约束条件下获得了较好的平衡.定义了最小外包球生成与更新的迭代算法与包含球体积修正的批量 Neural Gas 层次聚类算法,在尽可能保证球树各分支平衡性的前提下,实现了索引层次体系的稳健构建.利用几何代数下球对象间几何关系计算的内蕴性与参数更新的动态性,实现了索引结构的动态生成与更新,进而设计了实体对象表面及其内部任意位置及区域的检索策略及基于实体索引的空间关系计算方法.基于不同实体对象的模拟实验显示,基于几何代数的实体对象索引可以有效实现多维实体对象表面及其内部任意位置及区域的快速检索,并能在有限时间内以较高的精度实现多维实体对象最近邻距离和动态实体对象相交状态的检索.相对于常用球树索引,所提出的索引方法在填充率、节点重叠率、填充误差、体元个数、层次球个数、体积百分比和时间占用等方面均具有明显优势,且不同分辨率剖分条件下的索引结构及空间关系计算精度具有更高的稳健性,可运用于具有较强时间约束下复杂多维动态场景中对象检索与空间关系计算.

关键词: 多维统一空间索引;非相交球树;空间剖分;空间聚类;实体对象索引

中图法分类号: TP311

文献标识码: A

随着海量空间数据库建设以及 LBS 等服务的不断发展,面向多维、海量、动态数据的空间关系研究日渐增多^[1,2].GIS 研究对象的日趋复杂化、多维化与动态化,增加了空间关系计算与分析的难度与复杂度.可支持大规模时空数据快速检索和存取的多维空间索引,是多维复杂地理场景建模、管理、操作以及支撑复杂空间分析运算的关键.现有空间索引自适应性和动态可更新性不强,在向三维以及更高维空间扩展时,面临着数据量的激增,并需处理更复杂的空间剖分结构、空间编码结构、检索顺序以及空间关系等问题.同时,现有索引对空间关系运算支撑相对较弱,难以在有限时间内实现复杂、动态场景中空间关系快速检索与运算^[3,4].引入具有多维统一表达与运算能力的新型数学工具、发展可支撑多维复杂地理对象快速检索与运算的新型索引机制与分析方法,是促进多维 GIS 表达与运算能力、实现复杂地理分析的可行途径.

几何代数是一种有效连接代数和几何、统一描述抽象空间和现实空间的通用几何表达与分析语言^[5-7].以维度运算为基本运算的几何代数构建与运算体系,使多维对象统一表达与运算统一于几何积,并利用多重向量结构实现多维对象的统一表达与存储.几何代数运算的坐标无关性与维度无关性,使得对象间不依赖坐标的相对几何关系计算变得简洁、清晰,从而为几何对象的自适应表达、动态更新与关系计算提供了有利的条件^[6-9].我们在前期研究中所完成的基于几何代数的多维对象表达与场景建模等工作,也显示了几何代数在多维对象表达与运算上所具有的独到优势^[8,9].因此,借鉴几何代数理论,发展新型的多维统一的空间索引机制,进而利用几何代数的算子与算法构建依托于该索引的空间关系计算方法,可为现有多维空间索引适用性与计算效率的提升提供有益的参考.

本文对现有且常见的二、三维以及高维空间索引进行简要的回顾,探讨制约现有多维索引构建、检索及分析能力的可能问题(第 1 节).进而,从多维空间对象的剖分与填充、空间聚类及层次关系构建、索引构建与更新以及基于索引的检索与计算等视角,论述多维统一索引的构建思路,给出多维实体对象索引构建的整体框架与计算流程(第 2 节).基于几何代数中球表达的简明性、直观性、几何意义明确性和可直接计算特性,定义并构建

多维实体对象的体元剖分算法、边界约束的实体对象非相交球填充算法、可动态更新的实体对象最小外包球生成算法、球半径修正的批量 Neural Gas 层次聚类算法以及实体对象内部及表面任意位置及区域检索方法(第 3 节、第 4 节),实现对象空间均匀、稳健、非重叠的分割及近似均匀的索引层次体系构建,以有效降低现有空间索引的节点重叠率、填充误差、体元个数、层次球个数、体积百分比和时间占用等指标.以多个三维实体对象为例进行实验分析,从不同剖分分辨率条件下索引结构与空间关系计算精度等视角,探讨本文索引的主要性能指标及其优劣特性,并与常见的基于球树结构的索引进行性能对比(第 5 节).最后给出本文的主要结论,并探讨本文所建索引可能的改进途径与发展方向(第 6 节).

1 相关工作

空间索引是实现 GIS 海量数据管理与处理、提升 GIS 分析效率的关键所在.在二维、三维空间索引方面,已发展了包括四/八叉树、R 树族、KD-树、M-树等诸多索引^[10-13].现有的三维及高维空间索引多是基于二维索引进行维度扩展而来,在复杂空间查询优化、索引评价等方面仍具有较大的改进空间^[14].从数据结构与对象更新方法上看,现有空间索引多基于平衡树结构,且直接基于初始空间对象及空间位置关系一次性构建而成^[15].索引结构通常很难进行动态及快速更新,当对象发生高频连续变化、自身存在形变以及整个对象空间结构发生较大范围变化时,常引起索引效率大幅下降或导致检索错误^[16].构建结构上具有一定自适应性和动态性的新型索引结构,实现索引自身的动态、快速更新,是有效提升现有多维空间索引检索及分析能力的重要途径,也是增强现有空间索引实用性的可行途径.

空间索引的应用主要集中在对象检索及支撑空间分析计算等方面^[1-4].对象检索方面主要包括矩形区域和球形区域查询^[17].矩形查询实现简单、规则性强,已被 R 树及其变体、AABB 树等索引广泛使用.然而,高维矩形重叠率增加较快,影响了算法高维检索效率与索引存储的空间占用.基于矩形查询结构的索引 KNN 检索效率均相对较低,难以实现空间关系的实时、快速计算^[18].球形检索使用球心和半径描述节点,节点空间占用与维度无关,且可以直接支撑 KNN 检索.但欧氏空间中实体对象无法被非相交球填满,不同节点间重叠严重,导致了球树的范围查询(矩形查询)效率相对不高.近年来,不少学者从球树生成算法、优化规则、对象剖分、形态逼近与动态检索方法等诸多视角对球树索引进行改进^[19,20].综合矩形索引与球树索引的优劣,构建同时适用于实体对象检索与计算的索引结构,也是提升多维 GIS 分析能力的可行途径.

在基于索引的空间关系计算方面,二维空间索引的计算支撑相对完备,被广泛应用于空间关系计算、移动对象运动参数计算与预测、相交检测等领域.由于三维及更高维对象结构与空间关系较为复杂,使得现有索引对高维空间关系计算的支撑仍明显不足.层次包围体结构的三维索引一般具有较高的检索效率,但在对象表达的近似性、复杂对象碰撞检测精度以及动态环境下连续碰撞检测的时间复杂度等方面仍有待改进^[20].基于体元规则剖分或八叉树等剖分结构的索引,很难在剖分粒度与计算精度之间取得较好的平衡,难以提升基于体元索引的计算效率^[11].无论是基于包围盒还是实体对象剖分的索引结构,均难以同时兼顾对象表面与内部特征,实现空间关系的快速、精确计算^[21,22].面向可视化的索引,主要是通过 LOD 或启发式算法等实现复杂表面快速可视化^[10,23].由于缺乏良好的实体对象逼近与剖分机制,现有实体索引对空间实体的空间分布特征关注不够,仍不足以实现对同时包含多种不同类型复杂多维地理场景精确、快速的逼近.

针对现有空间索引存在的不足,理想的多维统一索引应包括:① 兼顾精度与效率的实体对象空间优化剖分机制;② 不同空间的均衡聚集/聚类与层次体系构建机制;③ 基于索引结构的可支撑多维统一空间关系计算的运算方法.在实体对象空间剖分方面,需要进行实体对象分块与标定,并需兼顾剖分粒度与表达精度的平衡问题^[14,15].规则剖分实现了空间均质、有序的剖分,适用于对象空间顺序标定;而基于特定对象的空间剖分更有助于逼近对象自身的形状特征,凸显其自身的几何特征.索引层次关系构建多是通过特定的聚类算法加以实现,聚类算法的优劣直接决定了索引构建的平衡性、构建的时间、空间开销以及检索的效率^[15].常见的包括基于主导方向或影响范围的聚类算法^[19]如 K-Means、Medial Axis、主成分方法等以及诸如 GDBSCAN,OPTICS 等基于密度的层次聚类算法^[24].为方便处理具有噪音的数据以及索引的动态更新,聚类算法应具有鲁棒性与自适应性,

并满足快速收敛、均匀剖分和较少的空间重叠率.通过聚类算法对对象空间以及空间对象进行分类后,即可构建出索引所需的层次关系.

我们在前期工作中,基于共形几何代数实现了多维复杂地理场景的统一建模、表达与运算.几何代数对象表达的多维统一、坐标无关与自适应性等优势以及对象表达几何意义的明确性和直接可计算性,为基于几何代数的多维统一索引的构建提供了基础.在共形几何代数空间中,球作为共形几何代数的基本形体之一,可以在几何结构上统一点、平面以及圆环等几何对象,其空间关系计算与更新方式直接、简单,并可以直接应用共形几何代数的算子、算法进行复杂的算法构建.因此,可采用球作为对象剖分的基本几何对象,综合利用体元剖分和球体填充实现对象剖分,并利用对象边界对填充球进行约束.借鉴现有各类索引尤其是球树索引的相关思路,建立适用于多维对象检索与计算的实体对象多维统一索引结构,实现多维统一的检索与计算.几何代数中表达形式上的简洁性、几何意义明确性、参数更新的动态性以及几何关系运算的便捷性,有望简化多维索引结构构建与维护的复杂性,并可能大幅提升检索及空间关系运算的效率与精度.

2 多维实体对象索引构建与计算过程

多维地理实体对象统一索引整体上包括多维空间对象体剖分、边界约束的实体对象球填充、BNG 快速聚类^[25]及层次关系构建、索引构建、维护与更新以及基于索引的检索与计算 5 个有机组成部分:

① 利用规则体元剖分的有序空间标定形成高精度的空间参考,利用实体对象填充逼近对象的形状特征,凸显其自身的几何特征,实现剖分粒度与表达精度的平衡;

② 为满足对象内部填充的均质、对称性以及简单性、易更新、平衡性和体积最大性等需求,引入边界约束的非相交球填充,在保持原有实体对象几何特征的基础上实现以较小数量的叶子节点对实体对象进行分区与标定,在填充球的个数、重叠率以及对象逼近程度之间取得平衡;

③ 建立实体对象动态最小外包球生成与多维球集的 BNG 快速聚类算法,实现填充球的层次性聚类与球树层次关系构建,实现实体对象空间及节点的均匀、稳健分割,并在算法实现与运算复杂度以及聚类效果之间取得平衡;

④ 基于上述层次关系,构建适当的数据组织与存储策略,实现索引的构建与存储,建立索引的维护与更新机制,实现索引的快速、动态更新;

⑤ 基于上述索引结构,利用几何代数算子、算法构建基于索引的检索与空间分析算法,实现对实体对象表面与内部的单一位置与范围检索以及基于索引的实体体积与对象间最近邻距离的动态计算等算法.

3 边界约束的多维实体对象剖分与填充

3.1 多维实体对象的体元化剖分

首先,对空间中实体对象进行规则的空间离散化,利用离散化对象对实体对象的结构与顺序进行粗标定,并标记每个规则格网的中心点及其到边界的距离,作为边界约束的非相交球填充的坐标参考.

定义 1(多维实体对象的几何代数统一表达). 利用几何代数的多重向量结构与几何对象的内、外积表达^[8],定义基于多重向量的几何对象/场景如下:

$$GeoObjMv = Obj.Points \oplus Obj.Lines \oplus Obj.Planes \oplus \dots \oplus Obj.Sphere \quad (1)$$

其中,“ \oplus ”表示不同 Blade 之间的连接符, $Obj.Points, Obj.Lines$ 等为不同维度 Blade 的集合.

定义 2(实体对象体元剖分). 给定任意实体对象 O 及给定的体元(voxel) V ,其体元化剖分定义为 $O = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$,满足 $O \approx V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{n-1} \oplus V_n$,且任意 $V_i \subset O$ (任意 V 在 O 内部,且所有 V 的组合近似逼近 O).

以 Simple Flooding 算法为基础^[26],首先任意选定一种子体元,基于种子体元依次向 4 个方向填充,通过虚拟光线遮挡法确定边界处体元并进行标定.依次迭代所填充的体元,直至完整填充整个实体(如图 1(a)、图 1(b)所示).为后续计算方便,构建 AABB 树辅助各段距离关系计算^[26],标识所填充的体元序号,同时记录该体元到对象

表面最近点的距离以及用于标识该距离的三角形.其中,点-面距离可以通过计算点与平面的内积获取.

定义 3(虚拟光线与对象边界面). 给定起点 A 和方向 d 的射线方程的几何代数表达为 $L=A\wedge d(L\in(A\rightarrow d))$, 为简化体元化坐标的计算,计算虚拟光线与表面的交点 B ,利用任意给定两点 AB 确定的有向线段表达为 $L=A\wedge B\wedge e_\infty(L\in(A,B))$;实体对象的边界包括由 3 点构成的平面边界与由 4 点构成的球面边界,其中 A,B,C 这 3 点构成的平面边界面: $P=A\wedge B\wedge C\wedge e_\infty(P\in(A,B,C))$;由 A,B,C,D 这 4 点构成的球面边界为 $S=A\wedge B\wedge C\wedge D.L,P$ 和 S 均为 Blade,可利用几何代数的运算与算子进行直接计算.

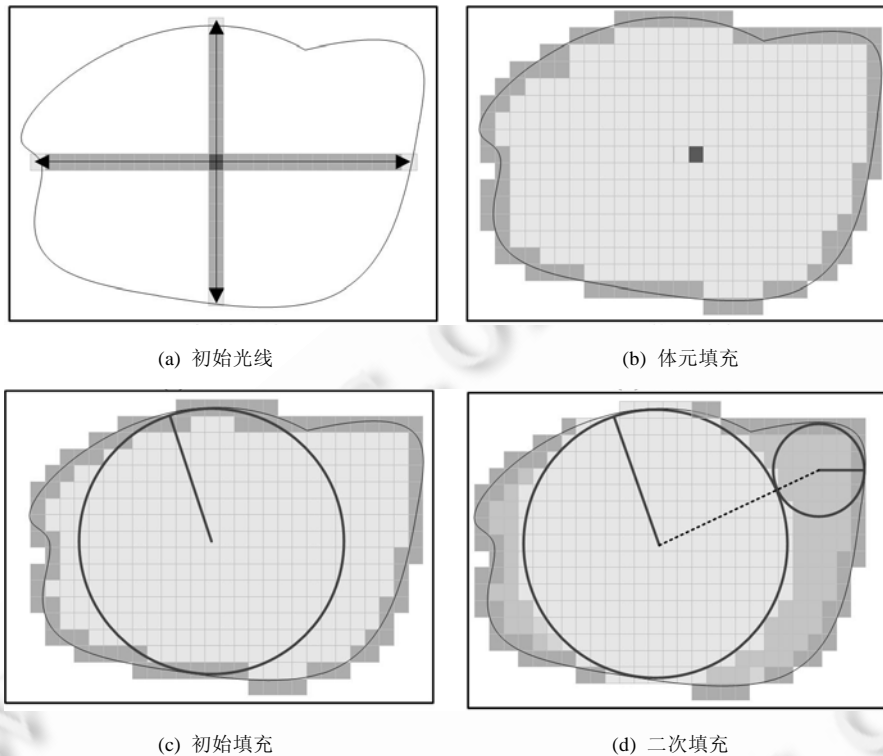


Fig.1 Object voxelization and sphere-filling algorithm based on virtual ray method

图 1 基于虚拟光线法的体元分割与球填充算法示意

定义 4(线-面相交判定与交点计算). 用虚拟光线法实现体元填充的关键是线-面求交及交点的判定.对于笛卡尔坐标系及球面坐标系下的二维/三维对象,主要是直线-平面和直线-球面的相交判定.定义求交算子(meet)实现对直线-平面和直线-球面相交的判定与交点提取,其公式为

$$f=p \cdot l \tag{2}$$

其中, p 为平面或球面的 CGA 表达, l 为直线的 CGA 表达.

由于共形几何代数表达中包含了无穷远点,即使在现实空间中线-面间实际不存在交点的情况下,Meet 运算也可以返回结果,其几何意义为两者相交在无穷远点处,因此需对此进行判定.实际上,若线面相交,则其必定存在两个交点:实际交点 Q 以及无穷远点 Inf .共形空间交点 $Q=(e_0 \cdot f)e_\infty(e_0 \cdot f)^{-1}$,标准化后的交点 $Q_n = \frac{Q}{e_\infty \cdot Q}$,

其中, $e_0 \cdot f$ 为中心在 Q 点的对偶球, e_∞ 经过该对偶球反射后,其坐标即为 Q 点.对其进行标准化后,即可得到欧氏空间中线面的实际交点.对于球面情况,可以通过计算其相交获得的点对所对应的圆的半径确定其是否具有实际交点,其半径公式为 $\rho^2 = \frac{r^2}{(e_\infty \wedge r)^2}$.

当 $\rho^2 > 0$ 时,两者具有两个交点: $Q_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{r \cdot r + r}}{e_{\infty} \cdot r}$.

定义 5(基于线段距离的体元剖分). 根据虚拟光线与边界交点 A, B 间线段的距离 $d = \sqrt{-1/2(A \cdot B)}$, 根据体元剖分的分辨率对其进行等分, 即可获得该虚拟光线上各体元的顶点坐标. 从种子体元开始, 当 4 个方向上虚拟光线获得的体元剖分都完成时, 分别往四周再选取 4 个点, 向各自剩余的 3 个方向发射虚拟光线, 依次迭代完成对象的体元剖分.

3.2 边界约束的实体对象的非相交球填充方法

非重叠球无法充满整个空间、重叠球对复杂形体逼近失真大且重叠率高, 是基于球树结构的索引机制的主要问题. 现有球树索引及其优化方法多集中在重叠球树的分析与构建上^[19], 力图在填充球的个数、重叠率以及对对象逼近程度之间取得平衡. 然而对于具有动态变化特性的对象, 非重叠球树具有更好的动态性与鲁棒性. 采用了非重叠的球填充结构, 需要在确定填充球的个数与对象覆盖程度之间取得平衡, 要求: ① 以尽可能少的球填充尽可能多的体积, 以提升索引效率; ② 兼顾实体对象形态特征.

以最小外包球作为球树根节点, 构建出可完整剖分整个空间的层次关系, 将非重叠填充球作为叶节点, 则可实现对整个空间及实体对象的有效剖分^[27]. 为此, 首先选取所有体元与对象表面距离最大的体元中心为球心, 做最大内切球; 而后, 标定所有体元中心在球内部的体元对象, 在实际计算过程中将不再考虑已标记对象; 比较其他体元到球面距离及其到表面距离大小, 取两者距离最小者更新该体元距离. 持续迭代此过程, 直至所有体元均被标定为止. 利用共形几何代数框架下, 最小外包球以及内部填充球构建与更新的参数化特性简化边界约束的球填充的过程.

定义 6(边界约束的最大体积初始填充内切球). 给定任意实体对象 O 的体元剖分 $O = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, 定义各体元中心距实体边界的最邻近距离集合为 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$; 为尽可能减少叶子节点个数, 每次填充需保证填充球体积最大. 第 1 次填充选距边界最近邻距离最大的体元为圆心, 最大近邻距离为半径进行填充; 设该体元中心为 $V_{\max d}$, 其最近邻距离为 $D_{\max} = \max\{D\}$, 则初次填充球定义为 $S_1 = (O, R) = (V_{\max d}, D_{\max}) = V_{\max d} - 0.5D_{\max}^2 e_{\infty}$.

初始球填充后, 后续球的填充规则需要同时满足填充体积最大以及与初始填充球不相交的条件. 为此, 对比初始填充球外部各体元中心距边界距离 d_B 与填充球面距离 d_S 大小, 更新该体元的边界距离集合 $d_{\text{new}} = \min(d_B, d_S)$. 由于在前一算法中已经记录了所有体元到对象表面的距离, 而体元中心点到球心的距离 R 可以直接通过两点的内积加以求解. 距离的更新则可以通过对包含体元 ID 和距离链表的排序加以快速实现. 从距离更新后的填充球外部体元集合中选取最大近邻距离的体元中心作为新的填充球的球心, 进行二次填充. 依次迭代, 直至所有体元均被填充完毕, 得到非相交填充球集合 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. 该算法中, 距离的动态更新保证了每次填球时各球不相互重叠, 而每次选取所有距离中最大的距离, 则保证了每次填的球都是相对体积最大的. 所有体元处理完毕后, 整个实体对象被一系列包含在对象内部半径不一的球所填充. 上述球即为所构建球树的叶子节点.

定义 7(体积一致性约束下的球修正填充半径). 由于整个索引的叶节点无法充满整个空间, 使得整个实体空间中存在一定空白区域. 为保证在检索及空间关系计算过程中空间拓扑及空间关系的一致性, 需要对上述空白进行处理. 通过缩放各球半径, 使所有球体积总和等于原始对象体积. 那么, 当两者体积相等时, 放大后的各球半径即是使得整个对象充满的球的半径. 对任意叶子节点赋予第二半径, 使得该叶子节点体积与该叶子节点所包含的所有体元的体积总和相等. 即 $\text{Vol}(S_i) = \sum_{V_j \in \text{Leaves}(S_i)} \text{Vol}(V_j)$; 该半径主要用于进行体积相关计算.

至此, 每个球树的叶子均同时包含了距离最短的稀疏填充球及其所辖区域以及完全覆盖整个实体对象的填充球及其所辖区域(如图 1(c)、图 1(d)所示).

3.3 实体对象剖分与边界约束的非相交球优化填充算法

基于上述流程, 构建基于多维体元的实体剖分与边界限制的非相交球填充算法的伪码如下:

算法. 实体对象剖分与边界约束的非相交球优化填充算法.

输入: $Obj3d$ (实体对象), $SeedVox$ (种子体元), Tol (剖分分辨率);

输出: $SphereList$ (球树队列).

- 1) $Initlization\ VolList, SeedVox, SphereList;$ //数据结构初始化;
- 2) $AABBTree=buildAABBtree(Obj3d,Tol);$ //根据剖分分辨率构建实体对象 AABB 树;
- 3) $VirturalRay=getRoundingPlaces(Obj3d,SeedVox);$ //以种子体元为中心向四周生成虚拟光线;
- 4) $VolList=getVoxelsWithFilling(AABBTree,Tol,VirturalRay);$ //利用虚拟光线及 AABB 树判定对象边界并进行体元填充;
- 5) $BoundaryVoxel=getBoundaryVoxel(VolList);$ //获得边界体元;
- 6) $SurfaceDistance=getVoxelDist(VolList);$ //计算体元距最近邻边界的距离;
- 7) **Do While** ($Voxels.GetSize(\cdot)>0$) {
- 8) $MaxDistVoxel=buildDistanceQueue(Voxels,SphereList);$ //选取距离最大的体元 $MaxDistVoxel$;
- 9) $tmpSphere=findMaxSphere(MaxDistVoxel);$ //以体元 $MaxDistVoxel$ 为球心、距对象表面的最近距离 d 为半径构球 S_1 , 标定所有中心在球 S_1 内部的所有体元 VS_1 , 从体元队列中删除 VS_1 ;
- 10) $SphereList.Push_Back(tmpSphere);$
- 11) $UpdateDistance(SurfaceDistance);$ //判定剩余体元中心距 S_1 球面与距表面距离大小, 若与 S_1 球面距离 $dS_1 < d$, 则更新该体元的距离 $d=dS_1$;
- 12) }

4 基于填充球聚类的实体对象层次结构构建与检索

对所填充的稀疏球进行层次性聚类, 构建出各类别球的最小外包球, 直至达到可包括整个实体对象的最小外包球为止. 上述逐次聚类过程既可实现对整个实体对象空间的概括, 也可实现整个球树层次关系的构建. 聚类算法设计需要具有较高的效率和支撑多维的能力, 也要求尽可能地减少不同类别间的体积重叠. 为支持索引快速构建与动态更新, 复杂形体内部不同区域填充球的半径可能存在明显差异, 因此, 聚类算法构建必须能够有效综合球半径的大小, 综合考虑索引效率和精度, 对填充球的分类应尽量均衡, 且可以反映其本身的构型特征. 为此, 首先基于共形几何代数定义并构建了可动态更新的实体对象最小外包球的动态生成与更新算法, 进而构建球半径修正的批量 Neural Gas 层次聚类算法, 实现对索引结构层次的构建与生成.

4.1 可动态更新的实体对象最小外包球生成

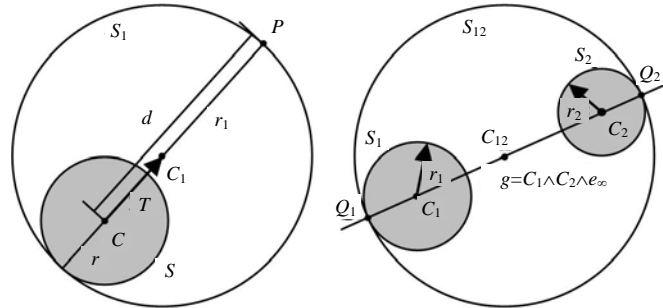
索引算法的根节点为原始对象的最小外包球, 为此需首先构建点集的最小外包球. 基于上述空间剖分方法, 同时考虑数据动态更新需求及后期处理的便捷性, 对于最小外包球的求解必须满足如下 3 个条件: ① 快速求解一批点集的最小外包球; ② 最小代价地动态更新最小外包球; ③ 可快速求解多个不相交球的最小外包球. 采用 Hildenbrand 和 Hitzer 提出的支撑动态更新的点云最小外包球的构建算法进行最小外包球的动态、快速生成. 其构建思想是利用新增点构建一个新球, 而后构建多个相切球的最小外包球^[28]. 因此, 采用该算法实现可动态更新的最小外包球求解.

定义 8(点集最小外包球). 假设对于点集 $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 及球 S , 若存在球 S 满足点集中任意点 p_i 到其圆心的距离小于半径 r , 且满足 $r=0.5\max\{D_{ij}\}$, D_{ij} 为任意两点 p_i, p_j 间的距离, 则称 S 为点集 P 的最小外包球.

引入基于点集的最小外包球生成算法. 这里, 通过半径替换的方法, 首先通过构建初始半径为 0 的球表达, 而后逐步引入点集, 更新最小外包球半径, 直至包含所有点集(如图 2(a)、图 2(b)所示). 其算法如下:

- 1) 任取一点 C 作为圆心, 初始化 $r=0$, 构建初始球 $S=C-\frac{1}{2}r^2e_{\infty}$;
- 2) 任取另一点 P , 计算该点与原始球心距离: $d=\sqrt{-2P \cdot C}$;

- 3) if ($d > r$), 计算从 C 指向 P 的多维向量: $CP = (P - C) \wedge e_\infty$;
- 4) 构建 Translator: $T = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{d} \right) CP \right) e_\infty$, 获得新球心: $C_1 = TCT^{-1}$;
- 5) 获得新半径: $r_1 = (d+r)/2$, 构建新球: $S_1 = C_1 - \frac{1}{2} r_1^2 e_\infty$;
- 6) 用 S_1 替换 S , 迭代第 1) 步~第 7) 步直至每个点遍历完毕。



(a) 点集迭代最小外包球更新 (b) 球合并的最小外包球更新

Fig.2 Iterative updating algorithm of minimum boundary sphere

图 2 最小外包球的迭代更新算法

定义 9(球集的最小外包球). 将上述点集的最小外包球定义推广至球集:对于球集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 存在球 SS 满足球集中任意球 s_i 到 SS 圆心的距离加 s_i 的半径小于 SS 的半径,且 SS 半径最小,则称 SS 为球集 S 的最小外包球。

对于支节点聚类获得的各球类别,可以通过合并已有球来直接获得各球的最小外包球.根据上述球集的最小外包球的定义,构建基于任意球集的最小外包球的动态更新算法如下:

- 1) 任意选定两球,定义连接两球中心直线的对偶表达: $g^* = (C_1 \wedge C_2 \wedge e_\infty)^*$;
- 2) 计算新最小外包球的南极点和北极点: $Q_1 = \frac{g \cdot C_1 + |g \cdot C_1|}{g \cdot C_1 \cdot e_\infty}, Q_2 = \frac{g \cdot C_2 - |g \cdot C_2|}{g \cdot C_2 \cdot e_\infty}$;
- 3) 新外包球的对偶表达为 $S_{12}^* = Q_1 + Q_2$;
- 4) 添加新球,迭代至所有球均得到遍历。

可动态更新的实体对象最小外包球的引入,不仅可以方便地计算实体对象索引的根节点,同时还可实现不同非相交填充球集外包球的计算,便于从叶子节点向上逐层构建父节点.由于采用了动态更新的方法进行外包球构建,使得上述方法可以较好地适用于具有动态变化或对象形变的分析应用.而几何代数下球表达的简洁性,则可以有效降低算法的计算复杂度.同时,无论是原始点集、所填充的非相交球还是基于上述算法生成的最小外包球,均可直接支撑几何代数运算与算子计算,为后续基于索引的检索与空间分析提供了基础。

4.2 球体积修正的批量Neural Gas层次聚类算法

对所填充稀疏球进行层次性聚类,并构建各类别球的最小外包球,直至达到可有效包括整个实体对象的最小外包球为止.逐次聚类过程在实现整个实体对象空间概括的同时,可构建整个球树的层次关系.借鉴 R -树中所采用的 K -Means 聚类的思想,综合考虑算法在几何代数框架下实现的结构复杂度、聚类效果及算法复杂度,选取批量 Neural Gas 算法^[25]作为本文的聚类算法,并在聚类算法权重函数构建过程中引入球体积修正,以保证对对象的整体形状的有效逼近,并保证了对象分割的整体性和稳健性.其算法主要流程如下:

- 1) 输入各球心集合 x_j , 随机确定 n 个分类中心 w_i ;
- 2) 将球心随机分配到初始确定的 n 个分类中,对距离第 k 个分类中心距离小于到当前分类中心距离的

每个球心重新赋权,赋权函数为 $w_i = \frac{\sum_{j=0}^m h_\lambda(k_{ij})v(x_j)x_j}{\sum_{j=0}^m h_\lambda(k_{ij})v(x_j)}$. 其中, $v(x_j)$ 为球 j 的体积, h_λ 为衰减函数, $h_\lambda(k) = \exp\left(-k / \left(\lambda_0 \left(\frac{0.01}{\lambda_0}\right)^{t_{\max}}\right)\right)$, 其中, $\lambda_0 = \frac{n}{2}$ 为初始衰减系数, t 为当前迭代步长, t_{\max} 为最大迭代次数;

- 3) 对更新权值后的球心进行重排序与重分类,计算新的坐标中心;
- 4) 迭代第 1)步~第 3)步,直至算法收敛.

该算法的思路与 K -Means 较为类似,均通过不停迭代移动聚类中心点至算法收敛.与 K -Means 相比,该算法受初始随机分类中心点的影响较小,聚类结果具有稳健性;且通过对球体积的加权处理,使得聚类结果对对象构型的把握相对较好,最终的聚类结果分布也相对均匀.在实际处理过程中,为降低数据结构创建、索引更新以及维护的复杂度,分类数最好是 2 的整数次幂,经测试,常见几何单体选取分类数为 4 时即可获得较好的分类结果;且当分类数为 4 时,该索引在数据结构上与四叉树索引类似,其各支节点与叶节点所辖为三维区域.基于上述聚类算法构建的索引层次关系构建索引树,上述索引结构即可实现对实体对象上任意部分的检索.

4.3 实体对象内部及表面任意位置及区域检索方法

由于球体积修正的批量 Neural Gas 层次聚类算法所获得的索引结构相对均匀,所构建的树近似一个平衡树,因此可以构建与基于四叉树的空间对象检索类似的实体对象内部及区域的索引检索结构.考虑到检索精确性与算法效率之间的平衡,可以首先对球树进行类四叉树的快速近似检索,确定检索的空间位置(区域)所在叶子节点(叶子集合),从而实现检索对象的初步定位.由于采用了稀疏的填充球策略,所构建的非相交球树节点数量相对较少,可以实现快速的初步定位.对于需要进行精确定位的情况,利用检索获得的叶子节点(叶子集合)中所包含的体元对象进行分方向的顺序检索,可以实现对待检索对象的精确定位.由于采用了混合检索策略,在球树粗定位步骤中可以剔除绝大部分体元对象.上述检索策略与直接顺序遍历结果的算法相比,其复杂度有显著降低(如图 3 所示),且有助于支撑基于类似索引结构的空间关系计算^[29].

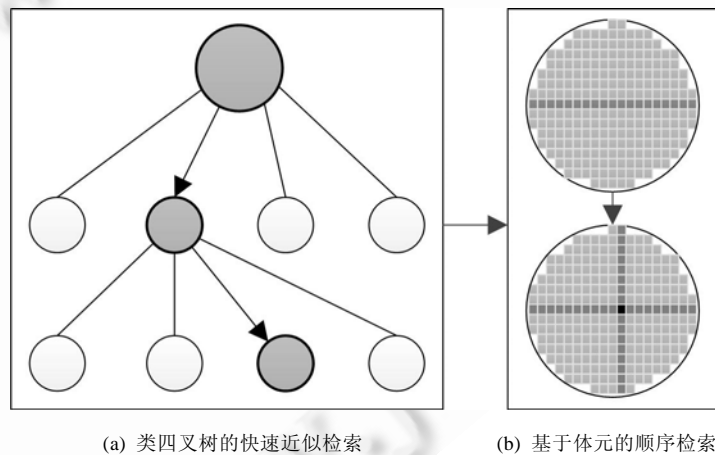


Fig.3 Hierarchical search strategy of non-overlapping sphere tree for solid object

图 3 非相交实体球树的层次检索策略

5 实验与分析

5.1 实验方案

为了对所构建矢量索引的特性与性能进行分析,选取 6 个基准的三维几何实体对象进行剖分和球树索引构建(如图 4 所示).对索引结构的特征指标主要从对象大小、体元个数、层次球个数、填充体积比和时间占用等角度进行分析(见表 1).由于在同等表面积情况下,球体积大于立方体体积,因此即使是包含在层次关系构建过程中生成的所有球的个数,在总量上也明显少于原始体元剖分的体元个数.对于任意形状的几何对象,无论是填充球(叶节点)还是层次关系构建的非叶节点的个数,均较为稳定,表明所构建索引具有较好的稳定性和适用性.由于节点个数的减少,索引的效率相对基于体元的效率可以得到大幅的提升,并可以实现实体对象内部的检索.从算法的时间效率上看,层次关系构建所占用的时间耗费最大,进行更优化的聚类算法构建或利用诸如并行等技术对索引构建过程进行优化,是有效提升索引效率的可能途径.

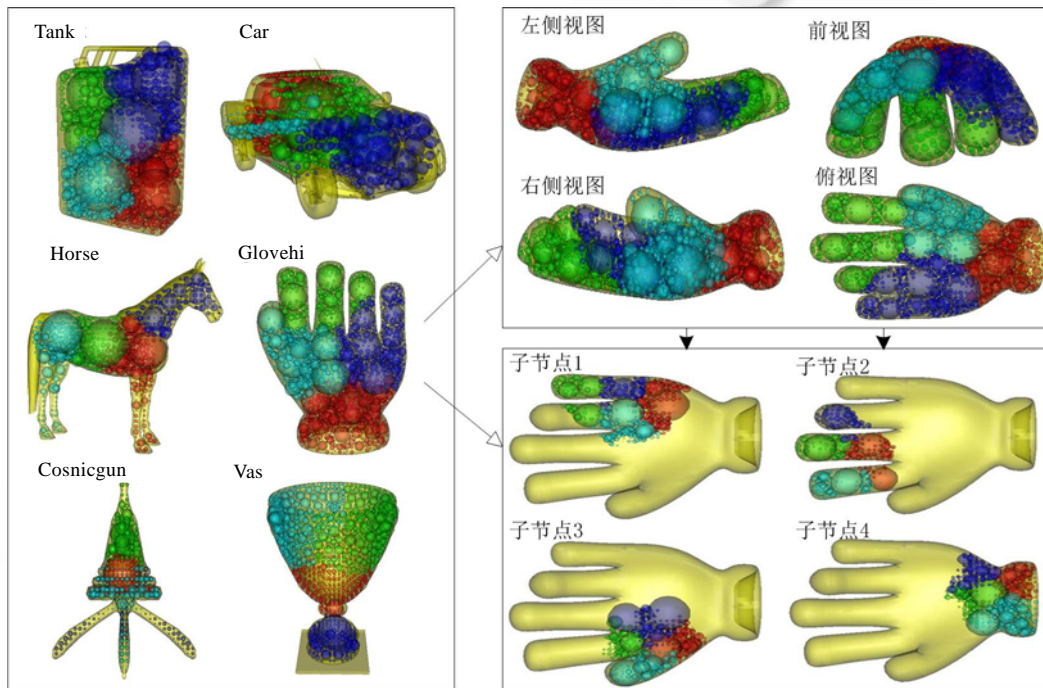


Fig.4 Sphere tree construction results of the six standard objects

图 4 6 个基准对象球树构建的结果图示

Table 1 Performance indexes of the sphere trees constructed based on six standard objects

表 1 6 个基本几何对象球树构建的基本性能指标

对象	Vas	Tank	Car	Horse	Glovehi	Cosmicgun
文件大小	1 861 290	2 706 374	1 625 422	785 864	356 579	270 788
边个数	13 965	18 782	9 218	5 412	2 146	949
面个数	16 780	33 966	15 497	10 144	4 272	1 890
体元个数	3 681	5 834	2 888	2 728	5 144	1 922
球个数	2 890	2 512	1 752	1 429	2 655	1 382
球体积占体元体积百分比	40	67	53	60	59	46
叶节点个数	2 858	2 467	1 724	1 408	2 626	1 350
球填充耗时(s)	11	28	7	7	22	3
层次关系构建耗时(s)	58	49	33	26	52	25
总耗时(s)	69	77	40	33	74	28

5.2 与常用球树索引的对比

从填充率(各层球树节点总体积与原始对象的体积比)、节点重叠率、填充误差等角度进行算法对比^[30].不失一般性,以手套(glovehi)数据为例进行7层分解,同时,分别选取分辨率为10~50的体元化方案进行索引构建,以验证不同体元化分辨率对结果的影响.测试环境为:CPU: Intel Core i3-2330M, 2.20GHz, 2.00GB 内存,操作系统: 64位 Windows 7.对比算法选取 Sphere-Tree Construction Toolkit(<http://isg.cs.tcd.ie/spheretree/>)中提供的5种球树索引算法^[19,30-32](Octree, Grid, Hubbard, Spawn 和 Medial Axis 方法)(如图5所示).除 Octree 方法外,其余方法均需要在先期填充基础上进行球位置及个数的优化来得到最终结果,计算复杂度均相对较高.受运行时间及内存占用限制,Medial Axis 方法无法计算6层后结果.由于采用了非相交球树的填充思路,本文所建索引构建的填充率低于现有常用球树索引.随着剖分层次的增加,本文方法的填充率曲线相对较为平缓,不同的体元化分辨率获得的不同层次填充率曲线之间结构一致性较强,显示了本文的球填充算法具有较强的稳定性.

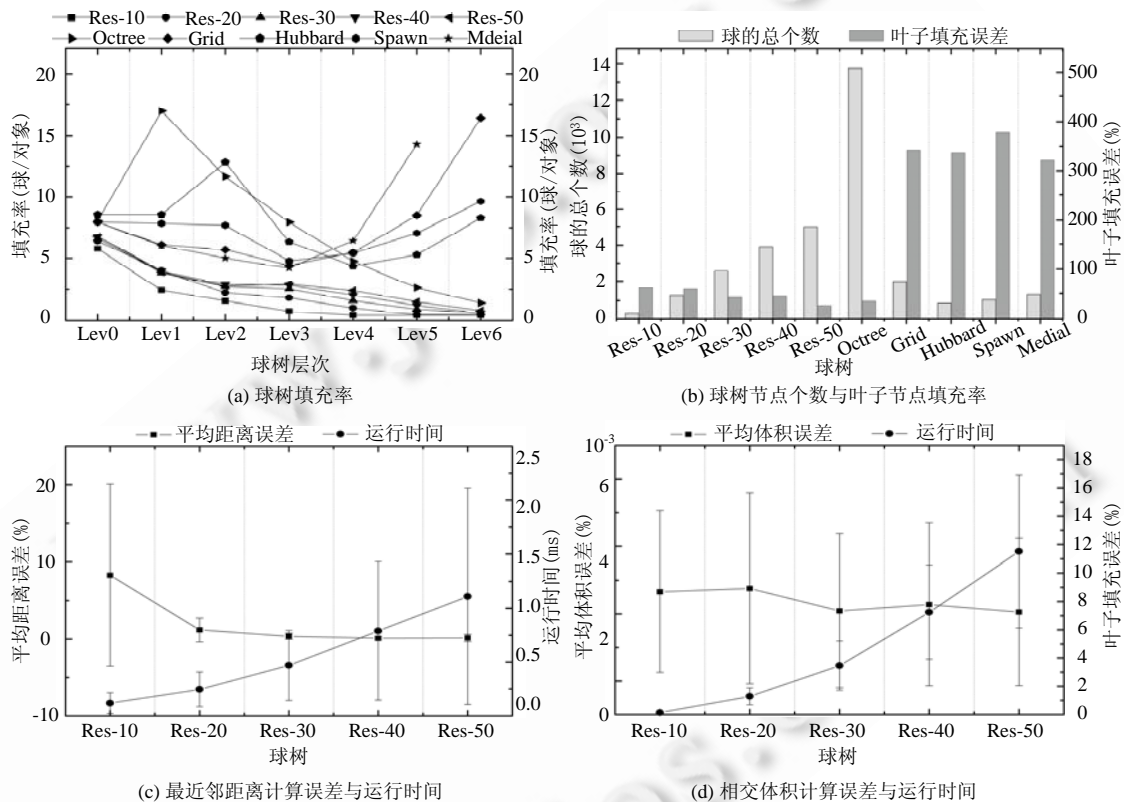


Fig.5 Performance comparison

图5 性能对比

从填充球个数与叶子填充误差上看:随着体元剖分分辨率的增加,填充球数量基本呈线性增加趋势,但仍远小于基于八叉树方法生成的球树.同时,不同体元剖分分辨率条件下叶子填充误差的变化呈缓慢下降趋势.当分辨率为50时,叶子填充误差已小于基于八叉树算法生成的球树的叶子填充误差.相对而言,本文方法虽然在填充球数量上略高于其他4种方法,但即使是最粗分辨率的叶子填充,其误差也远小于上述4种算法.从而可以有效提升一次检索的精度,降低检索和计算的复杂度.

由于现有多维实体对象索引对计算的支撑能力仍相对较弱,所选5种对比的索引均难以实现对最近邻距离以及相交体积等快速计算,因此仅对不同分辨率下本文算法计算的误差及时间复杂度进行对比分析.从平均

体积与平均距离的计算误差结果看,除分辨率 10 和 20 两个计算的平均误差相对略大外,其余 3 种方案无论是距离还是相交体积,计算的相对误差均在 1% 以内,显示了本文算法具有较高的计算精度.从运行时间上看,最近邻距离的检索除 50 分辨率的运行时间在 1ms 以上外,其余均在 1ms 以内,而相交体积的计算则多在 8ms 以内.上述结果显示,本文算法具有较好的实时性,可用于具有较强时间约束的多维动态场景中的空间关系的检索与计算.

6 结论与讨论

本文基于几何代数实现了边界约束的非相交球树多维统一空间索引,提出的体元剖分和边界约束的非相交球树填充与剖分算法在实体稀疏剖分的前提下保持了原有对象构型特征,实现了剖分粒度与表达精度的有效平衡;基于球体积修正的批量 Neural Gas 层次聚类算法,实现了填充球快速、稳健以及相对均匀的分割,该索引可以有效实现多维实体对象表面及其内部任意位置及区域的快速检索,并可支撑多维实体对象最近邻距离和动态实体对象相交体积的检索,其计算精度及算法复杂度可满足复杂多维地理场景的检索与运算.

共形几何代数通过外积方程对多维空间的球、超球予以统一结构表达,并利用多重向量结构实现对多维对象统一的存储结构,其存储结构与球/超球的表达方程具有直接对应性,满足多重向量的分解机制^[33],因而无需频繁计算球空间的具体范围;由于共形几何代数中对象表达和空间关系表达的一致性,各层对象的空间关系叠加检索可仅基于基本关系算子采用类似于符号计算的方式进行逐层判定与求解.因此,基于上述索引对复杂对象的空间关系算法进行优化,可以构建运算速度更快、检索效率更高的空间分析方法,满足实时、动态空间分析的需求.

在本文算法中,实体对象非相交球填充需要计算各体元与表面的距离值,并需要在球填充的过程中进行迭代更新.同时,基于聚类的球树层次体系的构建也是本文算法较为耗时的部分.本算法可能的优化途径包括:① 借鉴几何学以及计算几何等领域的空间填充的理论与方法^[34,35],构建非相交球填充的快速优化算法;② 构建更稳健、更高效的非相交球的快速聚类算法;③ 构建适用于非相交球树多维统一索引构建、更新与计算的并行数据结构与体系架构,实现算法的并行化.

致谢 感谢克劳斯塔尔工业大学计算机系 Weller 博士和 Zachmann 教授关于空间索引的深入讨论.

References:

- [1] Tao YF, Papadias D, Lian X, Xiao XK. Multidimensional reverse k NN search. *The VLDB Journal*, 2007,16(3):293–316. [doi: 10.1007/s00778-005-0168-2]
- [2] Sharifzadeh M, Shahabi C. Approximate Voronoi cell computation on spatial data streams. *The VLDB Journal*, 2009,18(1):57–75. [doi: 10.1007/s00778-007-0081-y]
- [3] Mouratidis LHU, Mouratidis K, Mamoulis N. Continuous spatial assignment of moving users. *The VLDB Journal*, 2010, 19(2):141–160. [doi: 10.1007/s00778-009-0144-3]
- [4] Gao YJ, Zheng BH, Chen GC, Li Q, Guo XF. Continuous visible nearest neighbor query processing in spatial databases. *The VLDB Journal*, 2011,20(3):371–396. [doi: 10.1007/s00778-010-0200-z]
- [5] Lasenby J, Fitzgerald WJ, Lasenby AN, Doran CJL. New geometric methods for computer vision: An application to structure and motion estimation. *Int'l Journal of Computer Vision*, 1998,26(3):191–213. [doi: 10.1023/A:1007901028047]
- [6] Dorst L, Fontijne D, Mann S. *Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry*. San Francisco. Morgan Kaufmann Publishers, 2007. 7–15.
- [7] Perwass C. *Geometric Algebra with Applications in Engineering*. New York: Springer-Verlag, 2009. 1–23. [doi: 10.1007/978-3-540-89068-3]
- [8] Yuan LW, Yu ZY, Luo W, Zhou LC, Lü GN. A 3D GIS spatial data model based on conformal geometric algebra. *Science of China (Series D—Earth Science)*, 2011,54(1):101–112. [doi: 10.1007/s11430-010-4130-9]

- [9] Yuan LW, Yu ZY, Chen SF, Luo W, Wang YJ, Lü GN. CAUSTA: Clifford algebra based unified spatio-temporal analysis. *Trans. in GIS*, 2010,14(s1):59–83. [doi: 10.1111/j.1467-9671.2010.01221.x]
- [10] Zhu Q, Gong J, Zhang YT. An efficient 3D R-tree spatial index method for virtual geographic environments. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2007,62(3):217–224. [doi: 10.1016/j.isprsjprs.2007.05.007]
- [11] Lü GX, Pan M, Wu HP, Cong WQ, Wu ZX. Research on large virtual Otree model for true three dimensional geo-science modeling. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2007,43(4):496–501 (in Chinese with English abstract).
- [12] Iyer N, Jayanti S, Lou K, Kalyanaraman Y, Ramani K. Three-Dimensional shape searching: State-of-the-Art review and future trends. *Computer-Aided Design*, 2005,37(5):509–530. [doi: 10.1016/j.cad.2004.07.002]
- [13] Ye CC, Luo JP, Zhou XM. A spatial index to improve the response speed of WebGIS servers. *Journal of Software*, 2005,16(5):819–826 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/819.htm> [doi: 10.1360/jos160819]
- [14] Zhen K, Zhu LF, Wu XC, Liu XG, Li J. Study on spatial indexing techniques for 3D GIS. *Geography and Geo-Information Science*, 2006,22(4):35–39 (in Chinese with English abstract).
- [15] Yan CD, Zhao XS. The review of spatial indexes in GIS. *Geography and Geo-Information Science*, 2004,20(4):23–26, 39 (in Chinese with English abstract).
- [16] Tao YF, Papadias D, Sun JM. The TPR⁺-Tree: An optimized spatio-temporal access method for predictive queries. In: *Proc. of the 29th VLDB*. Berlin: Morgan Kaufmann Publishers, 2003. 790–801. <http://repository.ust.hk/dspace/bitstream/1783.1/172/1/VLDB03TPR.pdf>
- [17] Feng YC, Cao K, Cao ZS. A multidimensional index structure for fast similarity retrieval. *Journal of Software*, 2002,13(8):1678–1685 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/20020847.htm>
- [18] Zhang Q, Zhao Z. Z tree: An index structure for high-dimensional data. *Computer Engineering*, 2007,33(15):49–51 (in Chinese with English abstract).
- [19] Bradshaw G, Sullivan C. Adaptive medial-axis approximation for sphere-tree construction. *ACM Trans. on Graphics*, 2004,23(1):1–26. [doi: 10.1145/966131.966132]
- [20] Weller R, Zachmann G. A unified approach for physically-based simulations and haptic rendering. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH Video Game*. New Orleans: ACM Press, 2009. [doi: 10.1145/1581073.1581097]
- [21] Sourina O, Boey SH. Geometric query types for data retrieval in relational databases. *Data & Knowledge Engineering*, 1998,27(2):207–229. [doi: 10.1016/S0169-023X(97)00061-X]
- [22] Breunig M, Zlatanova S. 3D geo-database research: Retrospective and future directions. *Computers & Geosciences*, 2011,37(7):791–803. [doi: 10.1016/j.cageo.2010.04.016]
- [23] Li J, Jing N, Sun MY. A mechanism of implementing visualization with level of detail at multi-scale. *Journal of Software*, 2002, 13(10):2037–2043 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/20021018.htm>
- [24] Sander J, Ester M, Kriegel HP, Xu XW. Density-Based clustering in spatial databases: The algorithm GDBSCAN and its applications. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 1998,2(2):169–194. [doi: 10.1023/A:1009745219419]
- [25] Hammer B, Hasenfuss A, Villmann T. Magnification control for batch neural gas. *Journal Neurocomputing*, 2007,70(7-9):1225–1234. [doi: 10.1016/j.neucom.2006.10.147]
- [26] Morris D. Algorithms and data structures for haptic rendering: Curve constraints, distance maps, and data logging. Technical Report, Report 2006-06, Stanford University, 2006. http://www-cs.stanford.edu/~dmorris/publications/haptic_algorithms.pdf
- [27] Weller R, Zachmann G. Inner sphere trees and their application to collision detection. In: Brunnelt G, Coquillart S, Welch G, eds. *Virtual Realities*. Vienna: Springer-Verlag, 2011. 181–201. [doi: 10.1007/978-3-211-99178-7_10]
- [28] Hildenbrand D, Hitzer E. Analysis of point clouds using conformal geometric algebra. In: *Proc. of the 3rd GRAPP*. Funchal, 2008. http://www.gris.informatik.tu-darmstadt.de/~dhilden/GRAPP08_Points_Final.pdf
- [29] Yuan LW, Lü GN, Luo W, Yu ZY, Yi L, Shen YH. Geometric algebra method for multidimensionally-unified GIS computation. *Chinese Science Bulletin*, 2012,57(7):802–811. [doi: 10.1007/s11434-011-4891-3]
- [30] Garcia M, Bayona S, Toharia P, Mendoza C. Comparing sphere-tree generators and hierarchy updates for deformable objects collision detection. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005,3804:167–174. [doi: 10.1007/11595755_21]

- [31] Palmer JJ, Grimsdale RL. Collision detection for animation using sphere-trees. *Computer Graphics Forum*, 1995,14(2):105–116. [doi: 10.1111/1467-8659.1420105]
- [32] Hubbard P. Collision detection for interactive graphics applications. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 1995, 1(3):218–230. [doi: 10.1111/1467-8659.1420105]
- [33] Bayro-Corrochano E, Arana-Daniel N. Clifford support vector machines for classification, regression, and recurrence. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2010,21(11):1731–1746. [doi: 10.1109/TNN.2010.2060352]
- [34] Birgin EG, Sobral FNC. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers & OR*, 2008,35(7): 2357–2375. [doi: 10.1016/j.cor.2006.11.002]
- [35] Broutta A, Coeurjolly D, Sivignon I. Hierarchical discrete medial axis for sphere-tree construction. *Lecture Notes in Computer Science*, 2009,5832:56–67. [doi: 10.1007/978-3-642-10210-3_5]

附中文参考文献:

- [11] 吕广宪,潘懋,吴焕萍,丛威青,吴自兴.面向真三维地学建模的海量虚拟八叉树模型研究. *北京大学学报(自然科学版)*,2007, 43(4):496–501.
- [13] 叶常春,罗金平,周兴铭.一种加快 WebGIS 服务器响应速度的空间索引. *软件学报*,2005,16(5):819–826. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/819.htm> [doi: 10.1360/jos160819]
- [14] 郑坤,朱良峰,吴信才,刘修国,李菁.3D GIS 空间索引技术研究. *地理与地理信息科学*,2006,22(4):35–39.
- [15] 阎超德,赵学胜.GIS 空间索引方法述评. *地理与地理信息科学*,2004,20(4):23–26,39.
- [17] 冯玉才,曹奎,曹忠升.一种支持快速相似检索的多维索引结构. *软件学报*,2002,13(8):1678–1685. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/20020847.htm>
- [18] 张强,赵政.Z 树:一个高维度的数据索引结构. *计算机工程*,2007,33(15):49–51.
- [23] 李军,景宁,孙茂印.多比例尺下细节层次可视化的实现机制. *软件学报*,2002,13(10):2037–2043. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/20021018.htm>



俞肇元(1984—),男,安徽南陵人,博士,讲师,主要研究领域为地理信息系统.



胡勇(1973—),男,讲师,主要研究领域为计算机算法.



袁林旺(1973—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为地理信息系统.



阎国年(1961—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为地理信息系统.



罗文(1986—),男,博士生,主要研究领域为地理信息系统,软件工程.