

## 随机可满足实例集上警示传播算法的收敛性\*

王晓峰, 许道云, 韦立

(贵州大学 计算机科学系, 贵州 贵阳 550025)

通讯作者: 许道云, E-mail: dyxu@gzu.edu.cn, http://www.gzu.edu.cn

**摘要:** 信息传播算法在求解随机  $k$ SAT 问题时有着惊人的效果, 难解区域变窄. 对于这种现象, 至今缺少系统的理论解释. 警示传播(warning propagation, 简称 WP)算法是一种基础的信息传播算法, 为有效分析 WP 算法在随机  $k$ CNF 公式上的收敛性, 给出了随机  $k$ CNF 公式因子图上圈存在的相变点. 在随机  $k$ CNF 公式产生模型  $G(n, k, p)$  中, 取  $k=3$ ,  $p=d/n^2$ , 因子图中圈存在的相变点为  $p=1/8n^2$ . 当  $d < 1/8$  时, 因子图中开始出现圈, 且每个连通分支至多有一个圈, 因子图中含圈的连通分支的数目以及圈的长度均与  $n$  无关. 因此, 因子图是由森林和一些含有唯一圈的连通分支构成. 证明了 WP 算法在这些实例集上高概率收敛, 并且给出了算法的迭代步数为  $O(\log n + s)$ , 其中,  $s$  为连通分支的大小.

**关键词:** 警示传播算法; 收敛性分析; 相变; 可满足性问题

**中图法分类号:** TP301      **文献标识码:** A

中文引用格式: 王晓峰, 许道云, 韦立. 随机可满足实例集上警示传播算法的收敛性. 软件学报, 2013, 24(1): 1-11. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4213.htm>

英文引用格式: Wang XF, Xu DY, Wei L. Convergence of warning propagation algorithms for random satisfiable instances. Ruanjian Xuebao/Journal of Software, 2013, 24(1): 1-11 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4213.htm>

### Convergence of Warning Propagation Algorithms for Random Satisfiable Instances

WANG Xiao-Feng, XU Dao-Yun, WEI Li

(Department of Computer Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Corresponding author: XU Dao-Yun, E-mail: dyxu@gzu.edu.cn, http://www.gzu.edu.cn

**Abstract:** Message propagation algorithms are very effective in finding satisfying assignments for random  $k$ SAT instances and hard regions become more narrow. Unfortunately, this phenomenon is still lacks rigorous theoretical proofs. The Warning Propagation (WP) algorithm is the most basic message propagation algorithm. In order to analysis the WP algorithm convergence for random  $k$ CNF formulas, the study gives the sharp threshold point for the existence of cycles in the factor graph of random  $k$ CNF formulas, the threshold for the existence of cycles in model  $G(n, k, p)$  of random  $k$ CNF formulas is  $p=1/8n^2$  for  $k=3$ ,  $p=d/n^2$ . When  $d$  becomes asymptotically equal to  $1/8$ , cycles begin to appear, but each component contains at most one cycle, the number of the components containing a single cycle and the length of cycle are a constant independent of  $n$ . Thus, the factor graph consists of a forest of trees plus a few components that have a single cycle. Then WHP (with high probability) after at most  $O(\log n + s)$  iterations, WP converges on these instances. Here  $s$  is the size of the connected component.

**Key words:** warning propagation algorithm; convergence analysis; phase transition; satisfiability problem

给定一个合取范式(conjunctive normal form, 简称 CNF)公式  $F$ , 可满足性(satisfiability, 简称 SAT)判定问题是是否存在一组指派使得  $F$  为真. 子句长度为  $k$  的 SAT 判定问题称为  $k$ SAT 问题, 当  $k \geq 3$  时,  $k$ SAT 问题是著名的 NP-完全问题. 为进一步理解  $k$ SAT 问题的判定难度, 进而研究随机  $k$ SAT 问题, 为此引入随机  $k$ SAT 实例产生模型  $G(n, k, p)$ , 其中,  $n$  表示变元个数,  $k$  表示子句大小,  $p$  表示每个子句出现在公式中的概率<sup>[1]</sup>. 模型  $G(n, k, p)$  按如下

\* 基金项目: 国家自然科学基金(60863005, 61111130186); 贵州大学研究生创新基金(2011033)

收稿时间: 2011-11-26; 修改时间: 2012-02-15; 定稿时间: 2012-03-27

方式产生一个随机  $k$ SAT 实例:以概率  $p$  选取每一个可能的子句(这样的子句共有  $2^k \cdot \binom{n}{k}$  个),被选中的子句之集构成实例.已经发现,在随机  $k$ SAT 问题中,子句个数  $m$  与变元个数  $n$  的比值  $a=m/n$  是一个重要的参数,它不仅对公式的可满足性产生影响,还对公式可满足性判定的难易程度产生影响:

一方面,对于随机  $k$ SAT 问题,存在可满足性的相变点  $a_d$ ,当  $a < a_d$  时,实例高概率可满足;当  $a > a_d$  时,实例高概率不可满足<sup>[2]</sup>.在随机 3SAT 问题中,尽管人们不知道  $a_d$  的确切值,但研究表明, $a_d$  至少为 3.52<sup>[3]</sup>,至多为 4.506<sup>[4]</sup>;

另一方面,大多数优秀的可满足性判定算法能够解决的实例与  $a$  密切相关.如,基于纯文字规则的算法只能有效求解  $a < 1.6$  区域的随机 3SAT 实例(如 DPLL 算法),基于正文字或负文字出现次数最多而设计的算法可有效求解  $a < 3.52$  区域的随机 3SAT 实例(如 Zchaff 算法),WALKSAT 算法可有效求解  $a$  稍高于 3.95 区域的随机 3SAT 实例<sup>[5,6]</sup>.

近年来,使用统计物理中的腔域方法<sup>[7,8]</sup>,给出了可满足相变点的近似值  $a_d \approx 4.267$ ,且存在阈值  $a_c \approx 3.921$ .称  $a < a_c$  为易解 SAT 区域,称  $a_c < a < a_d$  为难解 SAT 区域<sup>[8,9]</sup>.位于  $a < a_c$  区域的可满足实例的解空间形成一个较大的解集簇,启发式局部搜索算法容易求解.位于  $a_c < a < a_d$  区域的实例,解空间被分解成许多很小的解集簇,这些解集簇之间相互分开,且相距很远,不可能通过改变有限数目变元的赋值使得可满足指派从一个解集簇转到另一个解集簇,使用局部搜索算法求解时收敛速度很慢,且求解难度较大<sup>[9]</sup>.基于腔域方法设计的求解可满足性问题的信息传播算法,在难解随机 3SAT 区域非常有效<sup>[9-13]</sup>,弥补了以往的模拟退火算法、随机游走算法等在接近相变点的难解区域时就会失效的缺憾.如,信念传播(belief propagation,简称 BP)算法可有效求解  $a < 3.95$  区域的随机 3SAT 实例,调查传播(survey propagation,简称 SP)算法能够有效求解  $a < 4.26$  区域的随机 3SAT 实例<sup>[6,9,10,14,15]</sup>.SP 是目前求解随机 3SAT 问题最为有效的算法,能够在稍高于线性时间内解决处于难解 SAT 区域的具备  $10^7$  个变量规模的实例,几乎能够有效求解接近相变点的可满足性实例<sup>[9,10]</sup>.对 SP 算法而言,难解 SAT 区域变窄.然而,对于信息传播算法的这种现象,至今仍缺少系统的理论解释.

信息传播算法不仅对固定定义域的随机可满足性问题非常有效(如随机  $k$ SAT),还可用于求解具有增长定义域的随机可满足性问题.许可等人在 NP 完全问题相变现象的研究中,提出了具有精确相变和难解实例的 RB 模型,该模型是一个典型的具有增长定义域的随机可满足实例产生模型,被广泛应用于构造难解性问题<sup>[16]</sup>.随后,文献[17-19]分别从理论和实验角度说明,在相变的阈值附近,求解 RB 模型随机实例的难度随着问题规模的增加,以指数形式增长.文献[20]表明,BP 算法在求解 RB 模型实例时非常有效.同样,信息传播算法也可用于求解量化布尔公式(quantified Boolean formulae,简称 QBF)的可满足性.殷明浩等人设计了一种基于 SP 算法的启发式算法 HSPQBF,用于求解 QBF 问题,其实验结果表明算法有效<sup>[21]</sup>.

尽管信息传播算法提供了一个非常有力的工具来求解随机可满足性问题,但仍存在两个问题有待理论上深入研究:

- 1) 当模型  $G(n,k,p)$  满足什么条件时,信息传播算法在该模型所产生的实例上收敛;
- 2) 如果信息传播算法收敛,得到的结果是否是变元边缘概率分布的有效近似;如果信息传播算法不收敛,这种情况下算法失效.

信息传播算法之所以能够使难解 SAT 区域变窄,缘于算法能够在难解 SAT 区域正确收敛,进而可以得到部分变元的有效边缘概率分布,用以固定变元的赋值.目前,对于算法收敛性的理论分析较少.文献[9]给出了信息传播算法的一般形式,其本质是对变元边缘概率分布的一种近似;文献[12]中分析了信息传播算法与统计物理中的自由能量函数之间的关系,并指出信息传播算法收敛后得到的固定点是自由能量函数的稳定点,但未对信息传播算法是否收敛做出理论分析;文献[22]分析了有限树型结构上信息传播算法收敛的复杂性;文献[23]分析了带有一个圈的图模型上信息传播算法的收敛性,表明信息传播算法得到的值是变元边缘概率分布的有效近似;文献[24]表明,对于任意结构的高斯图模型,信息传播算法能够正确收敛.可以看出,信息传播算法在某些具有特定性质或结构的实例上收敛<sup>[25-27]</sup>.目前,对信息传播算法的性能及收敛性的理论分析仍然不够完善.

信息传播算法求解随机可满足实例时非常有效,特别是 SP 算法在接近相变点的区域中仍具有非常出色的

表现.然而,对 SP 算法的收敛性很难从理论上给予解释.警示传播(warning propagation,简称 WP)算法是最为基础的信息传播算法,对 WP 算法的收敛性分析有助于其他信息传播算法的收敛性分析<sup>[10]</sup>.文献[28]中,Feige 和 Mossel 等人分析了 WP 算法的收敛性,但主要局限于植入指派的随机可满足实例.即,给定一个指派,随机选取满足指派的子句之集构成实例.本文中,我们研究一般的随机 3SAT 实例上 WP 算法的收敛性.对于随机 3SAT 实例产生模型  $G(n,3,p)$ ,给出随机 3CNF 公式的因子图中圈存在的相变点为  $p=1/8n^2$ .当  $p<1/8n^2$  时,由  $G(n,k,p)$  产生的 3CNF 公式的因子图中以高概率满足每个连通分支至多含 1 个圈.在此基础上,含圈的连通分支的数目以及圈的长度均为独立于  $n$  的常数.在其因子图由森林和一些仅含 1 个圈的连通分支构成的实例上,证明了 WP 算法高概率收敛,并给出了算法收敛的迭代步数为  $O(\log n+s)$ ,其中,  $s$  为连通分支的大小.

## 1 警示传播算法

设  $F=\{C_1,C_2,\dots,C_m\}$  为一个 CNF 公式,含有  $n$  个变元  $x_1,x_2,\dots,x_n$ ,用  $i$  代表变元  $x_i$ .公式  $F$  可以用一个二分图  $G=(C\cup X,E)$  表示,称为因子图.其中,变元结点集为  $X=\{1,2,\dots,n\}$ ,子句结点集为  $C=\{C_1,C_2,\dots,C_m\}$ .图  $G$  中的边分为两类:实边和虚边.

- 实边:  $(C_i,j)\in E \Leftrightarrow$  子句  $C_i$  含正文字  $x_j$ ;
- 虚边:  $(C_i,j)\in E \Leftrightarrow$  子句  $C_i$  含负文字  $x_j$ .

$V^+(x)$  表示变元  $x$  正出现的子句集合,  $V^-(x)$  表示变元  $x$  负出现的子句集合,  $V^+(C)$  表示子句  $C$  中正出现的变元集合,  $V^-(C)$  表示子句  $C$  中负出现的变元集合.在因子图的每条边  $(C_j,i)$  上,定义 WP 算法中的两类消息:第 1 类是变元传递给子句的消息  $x_i \rightarrow C_j$ ,第 2 类是子句传递给变元的消息  $C_j \rightarrow x_i$ (常称为警示信息).两类消息的直观解释是:  $x_i \rightarrow C_j$  表示在没有子句  $C_j$  的情况下,其他子句对变元  $x_i$  的取值倾向;  $C_j \rightarrow x_i$  表示子句  $C_j$  的可满足性对变元  $x_i$  的取值倾向.WP 算法的迭代方程如下所示<sup>[10]</sup>:

$$x_i \rightarrow C_j = \left( \sum_{C_k \in V^+(x_i), k \neq j} (C_k \rightarrow x_i) \right) - \left( \sum_{C_k \in V^-(x_i), k \neq j} (C_k \rightarrow x_i) \right) \quad (1)$$

如果  $x_i$  仅出现在  $C_j$  中,则  $x_i \rightarrow C_j=0$ .

$$C_j \rightarrow x_i = \left( \prod_{x_k \in V^+(C_j), k \neq i} I_{<0}(x_k \rightarrow C_j) \right) \cdot \left( \prod_{x_k \in V^-(C_j), k \neq i} I_{>0}(x_k \rightarrow C_j) \right) \quad (2)$$

$I_{<0}(b)$  是截尾函数.如果  $b<0$ ,则  $I_{<0}(b)=1$ ;否则,  $I_{<0}(b)=0$ .类似定义  $I_{>0}(b)$ ,如果  $b>0$ ,则  $I_{>0}(b)=1$ ;否则,  $I_{>0}(b)=0$ .如果  $C_j$  中仅包含变元  $x_i$ ,则  $C_j \rightarrow x_i=1$ .当 WP 算法收敛时,根据警示信息  $C_j \rightarrow x_i$  固定变元  $x_i$  的赋值如下所示:

$$B_i = \left( \sum_{C_j \in V^+(x_i)} (C_j \rightarrow x_i) \right) - \left( \sum_{C_j \in V^-(x_i)} (C_j \rightarrow x_i) \right) \quad (3)$$

如果  $B_i>0$ ,则  $x_i=1$ ;如果  $B_i<0$ ,则  $x_i=0$ .否则,  $x_i$  暂不赋值.WP 算法如下:

Warning Propagation (CNF formula  $F$ )

1. 构造相应的因子图  $G(F)$ ;
2. 给因子图上的所有消息边  $C_j \rightarrow x_i$  随机赋值 0 或 1;
3. 重复如下过程,直到算法收敛(可设置最大迭代步  $t_{\max}$  强迫算法结束):
  - 3.1. 对  $G(F)$  中的边随机排列;
  - 3.2. 根据随机边序列更新消息  $C_j \rightarrow x_i$ ;
4. 根据  $B_i$  计算部分指派  $\psi$ ,对公式  $F$  进行简化;
5. 返回  $\psi$ ;

上述算法第 3 步中的收敛是指算法本次迭代得到的信息与上次信息一致.当算法收敛时,得到警示信息的不动点,进而可固定部分变元的赋值,并返回部分指派  $\psi$ ;否则,算法不收敛,返回失败.可以看出,算法的收敛性对算法的性能起关键作用,我们有如下结论:

定理 1<sup>[10]</sup>. 如果公式对应的因子图为树型结构,且树分支的大小为  $s$ ,那么 WP 算法最多迭代  $O(s)$ 步后收敛.

## 2 圈存在的相变分析

信息传播算法求解随机 3SAT 实例时非常有效,为有效分析信息传播算法在随机 3SAT 实例上的性能,给出随机 3SAT 实例产生模型中圈存在的相变点,进而研究 WP 算法的收敛性.一个随机可满足性实例产生模型  $G(n,k,p)$ ,其中,

- $n$  表示变元个数;
- $k$  表示子句长度;
- $p$  表示子句出现的概率.

在由  $G(n,k,p)$ 产生的实例对应的因子图中,假设某个连通分支包含有  $t$  个变元的圈,根据因子图的构成,圈同时含有  $t$  个子句,记这类圈为  $2t$ -cycle. 设  $t$  个变元为  $x_1, x_2, \dots, x_t$ ,  $t$  个子句为  $C_1, C_2, \dots, C_t$ , 使得  $x_i, x_{i+1} \in C_i$ , 圈包含有  $2t$  条边. 定义如下 3 类不同的路径:

- 第 1 类:变元到变元,表示路径的端点是变元;
- 第 2 类:子句到子句,表示路径的端点是子句;
- 第 3 类:变元到子句,表示路径的两个端点分别是变元和子句.

对于变元到变元的路径,设路径的长度为  $l$ ,那么有  $l/2-1$  个变元和  $l/2$  个子句(不包含端点).对于子句到子句的路径,有  $l/2$  个变元和  $l/2-1$  个子句;对于子句到变元的路径,有  $(l-1)/2$  个变元和  $(l-1)/2$  个子句.如果图中包含有两个简单圈  $C_1$  和  $C_2$ ,之间由一条简单路径连接,称为  $bi$ -cycle 图.如果图中包含一个圈  $C_1$ ,圈中有一条简单路径的弦,称为  $chord$ -cycle 图. $i, j, l \in [1, n], t \in [1, 3], B_{2i, 2j, l, t}$  表示由长度为  $l$  的第  $t$  类路径连接两个简单圈  $2i$ -cycle 和  $2j$ -cycle 构成的  $bi$ -cycle 图.类似地,  $B_{2i, l, t}$  表示由长度为  $l$  的以第  $t$  类路径为弦的圈  $2i$ -cycle 构成的  $chord$ -cycle 图.

本文中,取  $k=3, p=d/n^2, d$  为一常数(称为约束紧度),  $G(n, 3, p)$ 模型以概率  $p$  选取每一个可能的子句(共  $2^3 \cdot \binom{n}{3}$  个),被选中的子句之集构成一个 3CNF 公式.因此,公式规模的期望为  $\binom{n}{3} \cdot 2^3 \cdot p \leq 4dn/3$ . 当  $d < 1/8$  时,由  $G(n, 3, p)$ 产生的 3CNF 公式高概率可满足,且对应的因子图中每个连通分支最多有一个圈,  $p=1/8n^2$  是因子图上圈存在的相变点,因子图是由森林和一些含有一个圈的连通分支构成的.我们给出如下结论:

定理 2. 由  $G(n, 3, p)$ 模型产生的 3CNF 公式,其因子图中圈存在的相变点为  $p=1/8n^2$ .当  $p$  渐近趋于  $1/8n^2$  时,圈开始出现,且每个连通分支最多包含一个圈.

如下两个引理构成定理 2 的证明:

引理 1. 由  $G(n, 3, p)$ 模型产生的 3CNF 公式,因子图中圈存在的相变点为  $p=1/8n^2$ .

证明:设  $x$  为  $2t$ -cycle 圈的数目的随机变量.在公式对应的因子图中,由于形成圈至少需要两个变元和两个子句,同时,注意到圈上的变元数和子句数相等,变元数目为  $t$  的圈有  $\binom{n}{t} \cdot \frac{(t-1)!}{2} \cdot (8n)^t$  个.因此,圈的期望值最多为

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \sum_{t=2}^n \binom{n}{t} \cdot \frac{(t-1)!}{2} \cdot (8n)^t \cdot (p)^t \\ &\leq \sum_{t=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!} \cdot \frac{t!}{2} \cdot (8n)^t \cdot (p)^t \\ &\leq \sum_{t=2}^n (8n^2 p)^t. \end{aligned}$$

当  $p \in o(1/8n^2)$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 8n^2 p = 0$ . 因此,  $E(x) = 0$ , 使用一阶矩方法,因子图中几乎没有  $2t$ -cycle 圈.

然而,当  $p=d/n^2$  时,

$$\begin{aligned}
 E(x) &\leq \sum_{t=2}^n \binom{n}{t} \cdot \frac{(t-1)!}{2} \cdot (8n)^t \cdot \left(\frac{d}{n^2}\right)^t \\
 &= \sum_{t=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!} \cdot \frac{(t-1)!}{2} \cdot 8^t \cdot n^t \cdot \frac{d^t}{n^{2t}} \\
 &= \sum_{t=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot (8d)^t \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^t \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{n^t} \cdot \frac{(8d)^t}{t}.
 \end{aligned}$$

- 如果  $d \geq 1/8$ , 则  $E(x)$  发散;
- 如果  $d < 1/8$ , 则  $E(x)$  收敛, 且  $E(x) \cong \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{(8d)^t}{t}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(x)$  为一常数;
- 如果  $d = 1/8$ ,  $E(x) = \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{n^t} \cdot \frac{1}{t}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{t=2}^{\log n} \frac{1}{t} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (\log \log n) = \infty$ .

使用二阶矩方法, 当  $d$  渐近趋于  $1/8$  时, 圈出现的概率趋于 1. 因此,  $p=1/8n^2$  是因子图上圈存在的相变点.  $\square$  由引理 1 可知, 当  $p \in o(1/8n^2)$  时, 因子图由森林构成, 根据定理 1, WP 算法高概率收敛, 且迭代步数最多为  $O(s)$ , 其中,  $s$  为连通分支的大小.

**引理 2.** 当  $p$  渐近趋于  $1/8n^2$  时, 因子图中圈开始出现, 且每个连通分支最多高概率地包含一个圈.

证明: 为了证明每个连通分支高概率地最多包含一个圈, 只需证明: 连通分支中高概率地不包含 *bi-cycle* 或 *chord-cycle*. 这里, 只证明 *bi-cycle* 情形, *chord-cycle* 可类似分析.

设随机变量  $x$  表示连通分支中 *bi-cycle* 的数目, 假设连通分支为  $B_{2i, 2j, l, t}$  类型. 考虑  $t=1$  (即, 变元到变元路径), 根据  $B_{2i, 2j, l, t}$  的构成, 圈和路径上的变元数目为  $s = i + j + \frac{l}{2} - 1$ , 圈和路径上的子句数目为  $s+1$ , 则

$$\begin{aligned}
 E(x) &\leq \sum_{i, j, \frac{l}{2}=1}^n \binom{n}{s} \cdot s! \cdot (8n)^{s+1} \cdot p^{s+1} \\
 &= \sum_{i, j, \frac{l}{2}=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} \cdot s! \cdot (8n)^{s+1} \cdot \left(\frac{d}{n^2}\right)^{s+1} \\
 &\leq \sum_{i, j, \frac{l}{2}=1}^n \frac{n^s}{s!} \cdot s! \cdot (8n)^{s+1} \cdot \left(\frac{d}{n^2}\right)^{s+1} \\
 &= \sum_{i, j, \frac{l}{2}=1}^n \frac{n^s}{s!} \cdot s! \cdot (8d)^{s+1} \cdot n^{s+1} \cdot \frac{1}{n^{2(s+1)}} \\
 &= \sum_{i, j, \frac{l}{2}=1}^n \frac{1}{n} \cdot (8d)^{s+1}.
 \end{aligned}$$

当  $d < 1/8$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i, j, \frac{l}{2}=1}^n \frac{1}{n} \cdot (8d)^{s+1} = 0$ , 从而有  $E(x) = 0$ . 使用一阶矩方法, 连通分支中高概率地不包含  $B_{2i, 2j, l, t}$ .

当  $t=1$  时, 圈和路径上的变元数目为  $s = i + j + \frac{k}{2}$ , 圈和路径上的子句数目为  $s-1$ , 则

$$\begin{aligned}
E(x) &\leq \sum_{i,j,\frac{l}{2}=1}^n \binom{n}{s} \cdot s! \cdot (8n)^{s-3} \cdot p^{s-1} \\
&= \sum_{i,j,\frac{l}{2}=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} \cdot s! \cdot 8^{s-3} \cdot n^{s-3} \cdot \left(\frac{d}{n^2}\right)^{s-1} \\
&\leq \sum_{i,j,\frac{l}{2}=1}^n \frac{n^s}{s!} \cdot s! \cdot 8^{s-3} \cdot n^{s-3} \cdot d^{s-1} \cdot \frac{1}{n^{2(s-1)}} \\
&= \sum_{i,j,\frac{l}{2}=1}^n \frac{1}{n} \cdot 8^{s-3} \cdot d^{s-1} \\
&= \sum_{i,j,\frac{l}{2}=1}^n \frac{1}{64n} \cdot (8d)^{s-1}.
\end{aligned}$$

当  $d < 1/8$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,\frac{l}{2}=1}^n \frac{1}{64n} \cdot (8d)^{s-1} = 0$ , 从而有  $E(x) = 0$ . 使用一阶矩方法, 连通分支中高概率地不包含

$B_{2i,2j,l,t}$ .

当  $t=3$  时, 圈和路径上的变元数目和子句数目相等, 即为  $s = i + j + \frac{k-1}{2}$ , 则

$$\begin{aligned}
E(x) &\leq \sum_{i,j,\frac{l-1}{2}=1}^n \binom{n}{s} \cdot s! \cdot (8n)^{s-1} \cdot p^s \\
&= \sum_{i,j,\frac{l-1}{2}=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} \cdot s! \cdot (8n)^{s-1} \cdot \left(\frac{d}{n^2}\right)^s \\
&\leq \sum_{i,j,\frac{l-1}{2}=1}^n \frac{n^s}{s!} \cdot s! \cdot 8^{s-1} \cdot n^{s-1} \cdot d^s \cdot \frac{1}{n^{2s}} \\
&= \sum_{i,j,\frac{l-1}{2}=1}^n \frac{1}{n} \cdot 8^{s-1} \cdot d^s \\
&= \sum_{i,j,\frac{l-1}{2}=1}^n \frac{1}{8n} \cdot (8d)^s.
\end{aligned}$$

当  $d < 1/8$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,\frac{l-1}{2}=1}^n \frac{1}{8n} \cdot (8d)^s = 0$ , 从而有  $E(x) = 0$ . 使用一阶矩方法, 连通分支中高概率地不包含

$B_{2i,2j,l,t}$ .

故, 连通分支中高概率地不包含 *bi-cycle* 或 *chord-cycle*. 即, 每个连通分支高概率地至多包含一个圈.  $\square$

因此, 当  $d \in (0, 1/8)$  时, 由  $G(n, 3, p)$  产生的公式, 根据引理 1 和引理 2 的证明, 其因子图由森林和一些恰有一个圈的连通分支构成. 设  $f(n)$  表示圈的长度,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$ . 当  $d < 1/8$  时,  $E(x) \cong \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{(8d)^t}{t}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(x)$  为一常数. 如果  $t = f(n)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(x) = 0$ , 由马尔可夫不等式得到如下推论:

**推论 1.** 当  $p$  渐近地趋于  $1/8n^2$  时, 因子图中高概率地含有圈的连通分支的数目为一常数, 且不存在长度为  $f(n)$  的圈.

### 3 主要结果及证明

当随机 3CNF 公式对应的因子图为树型结构时, WP 算法完全收敛. 然而, 对于因子图含有圈的图型结构的

公式,WP 算法可能不收敛.事实上,当  $d \in (0, 1/8)$  时,由  $G(n, 3, p)$  产生的随机 3CNF 公式,其因子图是由森林和一些含有一个圈的连通分支所构成的,WP 算法在这些公式上高概率收敛.我们给出如下定理:

**定理 3.** 对于  $d \in (0, 1/8)$ ,由  $G(n, 3, p)$  模型产生的 3CNF 公式,WP 算法高概率收敛,且迭代步数最多不会超过  $O(\log n + s)$ .其中,  $s$  为连通分支的大小.

设  $F$  是由  $G(n, 3, p)$  产生的公式,其中,  $p = d/n^2, 0 < d < 1/8$ .不妨设  $F$  有一个圈  $x_1, C_2, x_3, C_4, \dots, x_r, x_1$ ,对于所有的  $i, x_i$  和  $x_{i+2}$  都属于  $C_{i+1}$ ,并且  $x_i \neq x_{i+2}, C_{i+1} \neq C_{i+3}, x \rightarrow C$  是公式  $F$  的因子图的有向边.

- 如果  $x$  和  $C$  都属于这个圈,则称  $x \rightarrow C$  属于一个圈;
- 对于不属于圈的边  $x \rightarrow C$ ,如果  $x$  不属于这个圈,并且  $C$  位于  $x$  到圈的简单路径上,则称  $x \rightarrow C$  指向这个圈;
- 如果  $C$  不属于这个圈,并且  $x$  位于圈到  $C$  的简单路径上,则称边  $x \rightarrow C$  离开这个圈.

类似地,定义边  $C \rightarrow x$  属于圈、指向圈、离开圈.

显然,因子图中每一个有向边  $x \rightarrow C$  或  $C \rightarrow x$  一定属于上述 3 种情况之一.

假设由  $x_1, C_2, x_3, C_4, \dots, x_{2r-1}, C_{2r}, x_1$  形成一个圈,每个变元  $x_i$  出现在前一个子句和后一个子句中,每个子句  $C_i$  包含前一个变元和后一个变元.定义两类不同的圈:

- a. 约束圈:至少有一个  $C \rightarrow x_i = 1$  进入圈.其中,  $C \rightarrow x_i$  指向圈,其值是算法收敛时的警示信息;
- b. 自由圈:没有  $C \rightarrow x_i = 1$  进入圈.即,进入圈的消息  $C \rightarrow x_i = 0$ .

设  $F$  是有唯一圈的公式,我们只考虑以变元进入圈的边.对于以子句进入圈的边  $z \rightarrow C$ ,不失一般性,假设  $z$  正出现在子句  $C$  中.算法收敛后,如果  $z \rightarrow C \geq 0$ ,对于圈上的边  $C \rightarrow x = 0$ ,则从公式中删除子句  $C$  后,与删除前的收敛性一致(即,删除子句  $C$  之前与之后算法收敛得到的警示信息一致).如果  $z \rightarrow C < 0$ ,则从子句  $C$  中删除变元  $z$  后收敛性一致.因此,我们不考虑以子句进入圈的边.

**引理 3.** 设  $C$  是一个大小为  $s$  的连通分支,且包含一个约束圈(即,有  $C \rightarrow x_i = 1$  进入圈).那么 WP 算法在  $C$  上高概率地最多  $O(s)$  步收敛.

证明:不失一般性,假设  $x_i$  在子句  $C$  中负出现.

- 1) 假设存在变元  $x_j$  在子句  $C_{j-1}$  和  $C_{j+1}$  中负出现,因此  $x_j \rightarrow C_{j+1} \leq 0$ ,进而有  $C_{j+1} \rightarrow x_{j+2} = 0$ .这意味着,删除子句  $C_{j+1}$  并不影响算法收敛后的所有  $x_r \rightarrow C_{r+1}$  和  $C_{r+1} \rightarrow x_{r+2}$  的警示信息,其中,  $r \neq j$ .所以,这种情形可归约到树公式;
- 2) 假设变元  $x_i$  在子句  $C_{i-1}$  中负出现,在子句  $C_{i+1}$  中正出现,因此  $x_i \rightarrow C_{i+1} < 0$ ,进而有  $C_{i+1} \rightarrow x_{i+2} = 1$ .不妨设  $C_{i+1} = l_j \vee x_i$ ,用单位子句  $l_j$  代替  $C_{i+1}$ ,进而将  $C$  归约为树分支;
- 3) 假设变元  $x_i$  在  $C_{i-1}$  和  $C_{i+1}$  中正出现,且不存在变元  $x_j$  在  $C_{j-1}$  和  $C_{j+1}$  中负出现(如果  $x_j$  都正出现在  $C_{j-1}$  和  $C_{j+1}$  中,即圈上变元都是纯文字,易求解).由于  $C \rightarrow x_i = 1$ ,所以  $x_i = 0$ ,不妨设  $C_{i+1} = x_i \vee \neg l_{i+2}$ .由于  $d < 1/8$ ,

由  $G(n, k, p)$  产生的公式的期望值大小最多为  $\binom{n}{3} \cdot 2^3 \cdot p \leq 4dn/3 < n/6$ ,因此,子句与变元的比值  $\alpha < 1/6$ ,

进而公式高概率可满足.所以,高概率有  $\neg l_{i+2} = 1$ ,类似有  $\neg l_{i+4} = 1, \dots, x_i = 1$ (矛盾).

所以,WP 算法在  $C$  上高概率地最多  $O(s)$  步收敛. □

**引理 4.**  $C$  是一个大小为  $s$  且包含一个大小为  $r$  的自由圈的连通分支(即,没有  $C \rightarrow x_i = 1$  进入圈).那么,WP 算法高概率地在  $C$  上最多  $O(r^2 \log n + s)$  步收敛.

考虑两种情况:圈包含纯文字变元和不包含纯文字变元.为了证明引理 4,只需证明如下两个引理即可.

**引理 5.** 如果圈中包含纯文字  $x_i$ ,那么 WP 在  $C$  上最多  $O(s)$  步收敛.

证明:不妨假设  $x_i$  出现在子句  $C_{i-1}$  和  $C_{i+1}$  中.如果  $x_i$  正出现在子句  $C_{i-1}$  和  $C_{i+1}$  中,有  $x_i \rightarrow C_{i+1} \geq 0$ ,因此,  $C_{i+1} \rightarrow x_{i+2} = 0$ .如果  $x_i$  负出现在子句  $C_{i-1}$  和  $C_{i+1}$  中,有  $x_i \rightarrow C_{i+1} \leq 0$ ,进而有  $C_{i+1} \rightarrow x_{i+2} = 0$ .因此,删除子句  $C_{i+1}$ ,连通分支将变为树分支,不影响算法收敛的警示信息.所以,WP 算法最多  $O(s)$  步收敛. □

假设圈中不含纯文字,不妨设圈为  $C_1 = (x_1 \vee \neg x_2), C_2 = (x_2 \vee \neg x_3), \dots, C_L = (x_L \vee \neg x_1)$ .

考虑有向圈  $x_1 \rightarrow C_1 \rightarrow x_2 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_L \rightarrow C_L \rightarrow x_1$ ,有向边  $C_{i-1} \rightarrow x_i$  的值决定  $x_i \rightarrow C_i$  的取值,而  $C_i \rightarrow x_{i+1}$  的值决

于  $x_i \rightarrow C_i$ , 因此,  $C_i \rightarrow x_{i+1}$  的值由  $C_{i-1} \rightarrow x_i$  决定. 设有状态过程  $\Gamma^j$ , 其中,  $m \geq j \geq 0$ ,  $m$  是一常数,  $\Gamma^j \in \{0, 1\}^L$ . 显然, 状态过程  $\Gamma^j$  是一个马尔可夫链. 过程的初始状态为  $\Gamma^0$ , 结束状态  $\Gamma^m$  为全 0 或全 1.

**引理 6.** 如果大小为  $r$  的自由圈中没有纯文字, 那么 WP 算法在  $\mathcal{C}$  上高概率地最多  $O(r^2 \log n)$  步收敛.

证明: 不妨假设结束状态  $\Gamma^m$  全为 1. 考虑最悲观的情况是初始状态  $\Gamma^0$  全为 0 且只有在算法到达状态  $\Gamma^m$  时收敛. 设  $h_j$  为从状态  $\Gamma^j$  开始到达结束状态  $\Gamma^m$  的期望步数. 显然,  $h_m=0, h_0=h_1+1$ . 这是因为从  $\Gamma^0$  开始, 总是一步转移到  $\Gamma^1$ . 利用期望的线性性质来寻找其他  $h_j$  值的表达式. 设  $Z_j$  表示从状态  $\Gamma^j$  到达状态  $\Gamma^m$  的步数的随机变量. 现在考虑从状态  $\Gamma^j$  开始到达的下一步状态, 其中,  $1 \leq j \leq m-1$ . 以  $1/3$  的概率, 下一状态为  $\Gamma^{j-1}$ , 此时  $Z_j=1+Z_{j-1}$ ; 以  $1/3$  的概率, 下一状态为  $\Gamma^{j+1}$ , 此时  $Z_j=1+Z_{j+1}$ ; 以  $1/3$  的概率, 下一状态为  $\Gamma^j$ , 此时  $Z_j=1+Z_j$ . 因此,

$$E[Z_j] = E\left[\frac{1}{3}(1+Z_{j-1}) + \frac{1}{3}(1+Z_{j+1}) + \frac{1}{3}(1+Z_j)\right] \quad (4)$$

但  $E[Z_j]=h_j$ , 故由期望的线性性质得到:

$$h_j = \frac{h_{j-1}+1}{3} + \frac{h_{j+1}+1}{3} + \frac{h_j+1}{3} = \frac{h_{j-1}}{3} + \frac{h_{j+1}}{3} + \frac{h_j}{3} + 1 \quad (5)$$

所以有以下方程组:

$$\begin{cases} h_0 = h_1 + 1 \\ h_j = \frac{h_{j-1}}{2} + \frac{h_{j+1}}{2} + \frac{3}{2}, 1 \leq j \leq m-1 \\ h_m = 0 \end{cases} \quad (6)$$

用数学归纳法证明, 对  $0 \leq j \leq m-1$ , 有

$$h_j = h_{j+1} + 3j + 1 \quad (7)$$

成立.

显然, 当  $j=0$  时, 上式成立; 假设对于  $j-1$  等式成立, 由等式  $h_j = \frac{h_{j-1}}{2} + \frac{h_{j+1}}{2} + \frac{3}{2}$  得到:

$$\begin{aligned} h_{j+1} &= 2h_j - h_{j-1} - 3 \\ &= 2h_j - (h_j + 3(j-1) + 1) - 3 \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= h_j - 3j - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

所以,  $h_j = h_{j+1} + 3j + 1$ . 可以断言:

$$h_0 = h_1 + 1 = h_2 + 1 + 4 = \dots = \sum_{j=0}^{m-1} (3j+1) = \frac{3}{2}m^2 - \frac{1}{2}m < \frac{3}{2}m^2 \quad (9)$$

在圈  $C_1=(x_1 \vee \neg x_2), C_2=(x_2 \vee \neg x_3), \dots, C_L=(x_L \vee \neg x_1)$  中有  $L$  个变元和  $L$  个子句, 所以, 状态  $\Gamma^0$  到达状态  $\Gamma^m$  的期望步数为  $\frac{3}{2}L^2$ . 由于  $L=r/2$ , 因此  $h_0 < \frac{3}{8}r^2$ . 由推论 1 以及马尔可夫不等式可得:

$$p\{Z_0 \geq r^2\} \leq \frac{E(Z_0)}{r^2} \leq \frac{3}{8}, p\{Z_0 \geq r^2 \log n\} \leq \frac{E(Z_0)}{r^2 \log n} \leq \frac{3}{8 \log n} \quad (10)$$

所以, WP 算法在  $\mathcal{C}$  上高概率地最多  $O(r^2 \log n)$  步收敛.

当  $d \in (0, 1/8)$  时, 由  $G(n, 3, p)$  模型产生的随机 3CNF 公式, 根据推论 1、引理 3、引理 4, WP 算法高概率地最多  $O(\log n + s)$  步收敛. 至此, 定理 3 得证.  $\square$

#### 4 数值实验及分析

在实验中, 我们取两组变元规模不同的数据, 分别为  $n=20, 40, 60$  和  $n=80, 100, 120$ . 取算法最大迭代次数  $t_{\max}=10^3$ .

对于第 1 组数据, WP 算法成功收敛的概率如图 1(a) 所示, 图中的每个数据点是 100 个实例成功收敛的统计概率. 当约束紧度  $d < 3.475$  时, WP 算法几乎完全收敛; 在  $d \geq 3.475$  时, 收敛概率减小. 可以看出: 对于变元数目规模



$n$  较小时,收敛概率下降较慢;而对于规模  $n$  较大时,收敛概率下降较快。

对于第 2 组数据,WP 算法成功收敛的概率如图 1(b)所示,当  $d < 3.315$  时,WP 算法几乎完全收敛;在  $d \geq 3.315$  时,收敛概率迅速下降。我们发现:当  $n$  增大到一定值时,WP 算法成功收敛的概率几乎不受变元规模  $n$  的影响;在  $d=3.125$  时,收敛概率几乎从 1 突变到 0。

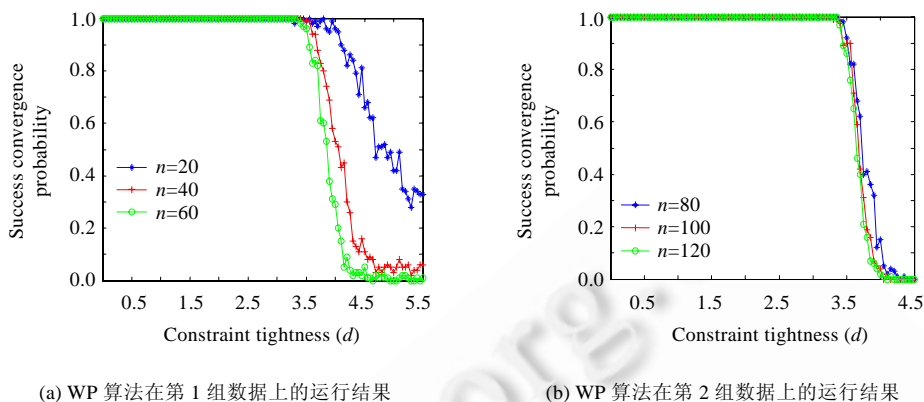


Fig.1 The change of convergence probability of WP with constraint tightness  $d$   
图 1 WP 算法收敛的概率随约束紧度  $d$  而发生的变化

实验结果表明,当  $d \leq 3.125$  时,对于  $G(n,3,p)$  产生的随机 3SAT 实例,WP 算法几乎能够完全收敛。当  $d=3.125$  时,实例已处于难解区域。WP 算法的收敛并不保证能够有效判定实例的可满足性。文献[10]中指出:如果公式对应的因子图为树型结构,则 WP 算法一定能够收敛,且能够有效判定公式的可满足性。本文中,当约束紧度  $d$  逐渐靠近  $1/8$  时,因子图中开始出现圈,且每个连通分支最多包含一个圈。我们能够证明,如果公式对应的因子图中每个连通分支最多含有一个圈,则 WP 算法几乎完全收敛。本文从理论上解释了 WP 算法的收敛性,扩展了 WP 算法的收敛区间。对于当  $d \geq 1/8$  时,WP 算法是否一定能够收敛,且能够有效判定公式的可满足性这一问题,目前还未能从理论上给予解释。文献[28]中表明:对于植入指派的随机可满足实例产生模型  $\mathcal{P}_{n,p}^{plant}$ ,其中  $p \geq d/n^2$ ,  $d$  是足够大常数,则 WP 算法高概率收敛。具体地讲,给定一个植入指派的随机可满足实例,通过限制警示信息的初始赋值,借助于公式几乎被该植入指派唯一可满足等假设条件,证明了 WP 算法高概率收敛。与之相比,本文中对一般的随机可满足性实例产生模型进行分析,在没有任何假设限制的条件下,证明了 WP 算法的收敛性。希望该方法能够被推广到其他信息传播算法的收敛性分析中。

### 5 结束语

本文分析了随机 3SAT 实例产生模型中,因子图上圈存在的相变点,给出了当  $d$  渐近趋于  $1/8$  时,连通分支中开始出现圈,且最多有一个圈。证明了当  $d \in (0,1/8)$  时,WP 算法在  $G(n,3,p)$  模型产生的 3SAT 实例集上高概率收敛,且算法迭代步数为  $O(\log n + s)$ 。本文也提供了一种分析信息传播算法收敛性的方法,通过设置参数,利用因子图的结构对实例集进行分类,研究信息传播算法在这些子类上的收敛性。相对地,基于某种规则结构下展开研究,信息传播算法的收敛性分析则更为具体和深入。我们希望,这些方法的引入可以提供一种新的思路,来分析其他信息传播算法的收敛性及性能,从而揭露信息传播算法能使难解区域变窄的本质。进一步的工作是:考虑当  $d \in [1/8,3/4)$  时,WP 算法的收敛情况,并给出严格的理论证明过程。

### References:

[1] Bourgain J. Sharp thresholds of graph properties and the  $k$ -SAT problem. Journal of The American Mathematical Society, 1999, 12(4):1017-1054. [doi: 10.1090/S0894-0347-99-00305-7]

- [2] Kirkpatrick S, Selman B. Critical behavior in the satisfiability of random Boolean formulae. *Science*, 1994,264(5163):1297–1301. [doi: 10.1126/science.264.5163.1297]
- [3] Kaporis A, Kirousis L, Lalas E. The probabilistic analysis of a greedy satisfiability algorithm. *Random Structures & Algorithms*, 2006,28(4):444–480. [doi: 10.1002/rsa.v28:4]
- [4] Dubois O, Boufkhad Y, Mandler J. Typical random 3-sat formulae and the satisfiability threshold. *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 2003,10(007):1–2.
- [5] Moskewicz MW, Madigan CF, Zhao Y. Chaff: Engineering an efficient SAT solver. In: *Proc. of the 38th Annual Design Automation Conf. (DAC 2001)*. New York: ACM, 2001. 530–535. [doi: 10.1145/378239.379017]
- [6] Aurell E, Gordon U, Kirkpatrick S. Comparing beliefs, surveys, and random walks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2004,17(1):1–8.
- [7] Mezard M, Parisi G. The cavity method at zero temperature. *Journal of Statistical Physics*, 2003,111(1-2):1–34. [doi: 10.1023/A:1022221005097]
- [8] Mezard M, Zecchina R. Random  $k$ -satisfiability problem: From an analytic solution to an efficient algorithm. *Physical Review E*, 2002,66(5):056126. [doi: 10.1103/PhysRevE.66.056126]
- [9] Maneva E, Mossel E, Wainwright M. A new look at survey propagation and its generalizations. *Journal of the ACM*, 2007,54(4):1089–1098. [doi: 10.1145/1255443.1255445]
- [10] Braunstein A, Mezard M, Zecchina R. Survey propagation: An algorithm for satisfiability. *Random Structures and Algorithms*, 2005,27(2):201–226. [doi: 10.1002/rsa.20057]
- [11] Montanari A. Message passing algorithms: A success looking for theoreticians. In: *Proc. of the 42nd ACM Symp. on Theory of Computing (STOC 2010)*. New York: ACM, 2010. 37–38. [doi: 10.1145/1806689.1806695]
- [12] Yedidia JS, Freeman WT, Weiss Y. Understanding belief propagation and its generalizations. *Artificial Intelligence*, 2003,8(1):239–269.
- [13] Mezard M, Parisi G, Zecchina R. Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems. *Science*, 2002,297(5582):812–815. [doi: 10.1126/science.1073287]
- [14] Kroc L, Sabharwal A, Selman B. Survey propagation revisited. In: *Proc. of the 23rd Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI 2007)*. Corvallis: AUAI, 2007. 217–226.
- [15] Braunstein A, Zecchina R. Survey and belief propagation on random  $k$ -SAT. *Lecture Notes in Computer Science*, 2004,2919(1):519–528. [doi: 10.1007/978-3-540-24605-3\_38]
- [16] Xu K, Li W. Exact phase transitions in random constraint satisfaction problems. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2000,12(1):93–103.
- [17] Liu T, Liu X, Wang C, Su K, Xu K. Large hinge width on sparse random hypergraphs. In: *Proc. of the 22nd Int'l Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI 2011)*. Menlo Park: AAAI, 2011. 611–616. [doi: 10.5591/978-1-57735-516-8/IJCAI11-109]
- [18] Xu K, Li W. Many hard examples in exact phase transitions. *Theory Computer Science*, 2006,355(1):291–302. [doi: 10.1016/j.tcs.2006.01.001]
- [19] Xu K, Boussemart F, Hemery F, Lecoutre C. Random constraint satisfaction: Easy generation of hard instances. *Artificial Intelligence*, 2007,171(1):514–534. [doi: 10.1016/j.artint.2007.04.001]
- [20] Zhao C, Zhou H, Zheng Z, Xu K. A message passing approach to random constraint satisfaction problems with growing domains. *Journal of Statistical Mechanics*, 2011,(02):02019. [doi: 10.1088/1742-5468/2011/02/P02019]
- [21] Yin M, Zhou J, Sun J, Gu W. Heuristic survey propagation algorithm for solving QBF problem. *Ruanjian Xuebao/Journal of Software*, 2011,22(7):1538–1550 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3859.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03859]
- [22] Kschischang F, Frey B, Loeliger H. Factor graph and the sum-product algorithm. *Information Theory*, 2001,47(1):498–519.
- [23] Weiss Y. Correctness of local probability propagation in graphical models with loops. *Neural Computation*, 2000,12(1):1–41. [doi: 10.1162/089976600300015880]
- [24] Weiss Y, Freeman WT. Correctness of belief propagation in Gaussian graphical models of arbitrary topology. *Neural Computation*, 2001,13(10):2173–2200. [doi: 10.1162/089976601750541769]

- [25] Meltzer T, Globerson A, Weiss Y. Convergent message passing algorithms—A unifying view. In: Proc. of the 25th Conf. Annual Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI 2009). Corvallis: AUAI, 2009. 393–401. <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/uai/uai2009.html#MeltzerGW09>
- [26] Hazan T, Shashua A. Convergent message passing algorithms for inference over general graphs with convex free energies. Science, 2008,51(11):264–273.
- [27] Ruozi N, Tatikonda S. Convergent and correct message passing schemes for optimization problems over graphical models. In: Proc. of the 26th Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI 2010). Corvallis: AUAI, 2010. 500. <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/uai/uai2010.html#RuoziT10>
- [28] Feige U, Mossel E, Vilenchik D. Complete convergence of message passing algorithms for some satisfiability problems. Lecture Notes in Computer Science, 2006,4410(1):339–350. [doi: 10.1007/11830924\_32]

## 附中文参考文献:

- [21] 殷明浩,周俊萍,孙吉贵,谷文祥.求解 QBF 问题的启发式调查传播算法.软件学报,2011,22(7):1538–1550. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3859.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03859]



王晓峰(1980—),男,甘肃会宁人,博士生,CCF 学生会员,主要研究领域为算法设计与分析,计算复杂性.  
E-mail: wxf\_gzu@163.com



韦立(1981—),男,博士生,CCF 学生会员,主要研究领域为计算复杂性,可计算性分析.  
E-mail: weilikb@163.com



许道云(1959—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为计算复杂性,可计算性分析.  
E-mail: dyxu@gzu.edu.cn