软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2012,23(12):3074−3087 [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04212]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

多值模态逻辑的计量化方法*

时慧娴+, 王国俊

(陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

Quantitative Method for Multi-Value Modal Logics

SHI Hui-Xian+, WANG Guo-Jun

(Department of Mathematics and Information Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

+ Corresponding author: E-mail: rubyshi@163.com

Shi HX, Wang GJ. Quantitative method for multi-value modal logics. *Journal of Software*, 2012,23(12): 3074−3087 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4212.htm

Abstract: The concept of n-valued modal model for multi-value modal logics is introduced in this paper, and the corresponding semantics are constructed. The study points out this kind of semantics and generalizes the semantics for classical modal logics. The definition of $\langle W,R\rangle_n$-typed frame is presented, under which the localized mappings induced by modal formulae are constructed, and the concept of localized truth degree for modal formulae is introduced. It is obtained that the localized truth degree for any modal formula can be computed as the one for some modal formula without modalities in the same possible world. Based on these, the concept of global truth degree for modal formulae is introduced. It has been shown that whenever a modal formula contains no modalities, its global truth degree coincides with its truth degree in the common propositional logics.
Key words: multi-value modal logic; $\langle W,R\rangle_n$-typed frame; n-valued modal model; localized truth degree; global truth degree; temporal logic

摘 要: 在多值模态逻辑中构建了 n-值模态模型及相应的语义理论,并指出这种语义是经典模态逻辑语义的推广.定义了$\langle W,R\rangle_n$-型框架的概念,并在该框架下用归纳的方法构建了由模态公式诱导的局部化映射,给出公式的局部化真度的概念,并指出任意模态公式的局部化真度都可以转化为另一个不含模态词的公式在同一可能世界处的局部化真度.定义了模态公式的全局真度,并证明了当某模态公式不含模态词时,其全局真度与其在一般命题逻辑中的真度一致.
关键词: 多值模态逻辑;$\langle W,R\rangle_n$-型框架;n-值模态模型;局部化真度;全局真度;时态逻辑
中图法分类号: TP181 **文献标识码**: A

模态逻辑是数理逻辑及人工智能研究领域的一个重要方面.它不仅是描述程序语义的有力工具,还在知识表示方面表现出了越来越多的优越性.因而,模态逻辑自提出以来受到了学者们的广泛关注.文献[1−3]对经典模态逻辑及其相关的逻辑系统进行了详细论述.随着多值逻辑与不确定性推理的长足发展,许多学者将经典模态逻辑进行扩充,建立了多种模糊模态逻辑及多值模态逻辑[4−15],并讨论了它们在其他若干领域的应用[16,17].本文

* 基金项目: 国家自然科学基金(11171200, 61005046, 61103133); 中央高校基本科研业务费专项资金(GK201004006)
收稿时间: 2011-01-05; 定稿时间: 2012-04-01

作者又于近期将模态逻辑的赋值域进一步推广为完备格,在文献[18]中建立了格值模态逻辑,并证明了其完备性.作为模态逻辑的一种特殊形式,时态逻辑[19−21]着眼于研究如何处理含有时间信息的事件的命题,因而在计算机科学,特别是模型检测领域[22−27]有着广泛的应用.

为了将数值计算引入到数理逻辑中,使其具有某种灵活性从而扩大其应用范围,文献[28]从概念的程度化入手,在经典二值命题逻辑中提出了较系统的公式真度理论.此后,文献[29−31]相继在 Łukasiewicz 命题逻辑、Gödel 命题逻辑以及 L^*(或等价地,NM 命题逻辑[32])中建立了类似的公式真度理论,引发了大量的后续研究.如今,已在多种命题逻辑中形成了较为系统的计量逻辑学理论[33−36].一个自然的想法是,如何将这种计量化的思想推广到模态逻辑,从而在经典模态逻辑以及多值模态逻辑中建立类似的真度理论?事实上,文献[37]在经典模态逻辑中采用将可能世界集的势固定为 n 的方法,提出了模态公式的(n)真度理论,从而尝试性地将计量化的思想引入到经典模态逻辑理论之中.然而值得注意的是,这种(n)真度理论是基于经典模态逻辑的语义模式而设计的,因而无法适用于多值模态逻辑.此外,文献[37]定义的模态公式的(n)真度与可能世界集的势 n 密切相关,当 n 增大时,相应的计算相当复杂,这自然是文献[37]的局限性.由下文的分析以及第 4 节中的说明得知,在多值模态逻辑中建立与一般命题逻辑类似的真度理论绝非易事.

实际上,在一般的命题逻辑中,赋值域为 $F\subseteq[0,1]$,赋值映射具有 $v:F(S)\to F$ 的形式[4−6,28−36],其中,$F(S)$是全体命题逻辑公式之集,赋值映射 v 是一个同态.即我们要求 F 与 $F(S)$上有同型的运算,且 v 保持这些运算.而在多值模态逻辑中,赋值映射为 $e:W\times F(\Phi)\to F$ 的形式(详见本文第 3 节),其中,W 为非空可能世界之集, $F(\Phi)$是全体模态公式之集,F 为其赋值域.可以看到,一般命题逻辑中的赋值映射 v 与模态逻辑中赋值映射 e 有两个本质的区别:

- 其一,v 的定义域为 $F(S)$,故 v 的变化只与所选择的公式有关;而 e 的定义域为 $W\times F(\Phi)$,故 e 的变化不仅与所选择的公式有关,而是由可能世界及模态公式同时决定的,具有双重变化因素;
- 其二,v 是同态,它保持 $F(S)$与 F 上所有同型运算;而 e 则不然,由于模态逻辑的模态词$\square,\Diamond$在 Kripke 语义结构中与 W 上的二元关系密切相关,这使得在赋值域 F 上很难定义与$\square,\Diamond$相应的语义算子来保证 e 成为一个同态.

这两点区别,使得在多值模态逻辑中无法用与一般命题逻辑中类似的方法建立公式的真度理论.实际上,在一般的命题逻辑中,全体赋值映射 v 构成的集合Ω同构于 F^{ω}[35,36],其中,ω为第 1 个可数序数.同时,每个公式$\varphi\in F(S)$可诱导相应的映射 $\overline{\varphi}:\Omega\to F$ 满足:

$$\overline{\varphi}(v)=v(\varphi),v\in\Omega \tag{1}$$

而此时,所有由公式诱导的映射都具有公共的定义域,即$\Omega\cong F^{\omega}\subseteq[0,1]^{\omega}$.这时,我们可以方便地在 F^{ω}上建立概率测度μ来讨论映射 $\overline{\varphi}$ 的可测性,并在 $\overline{\varphi}$ 可测时定义公式φ的真度为

$$\tau(\varphi)=\int_{\Omega}\overline{\varphi}\mathrm{d}\mu \tag{2}$$

而根据上文分析知,多值模态逻辑中的赋值映射 e 的全体不再同构于 F^{ω},甚至不同构于$[0,1]^{\omega}$的任何子空间,因此,我们很难构建公式诱导的映射并保证其可测性.即无法在多值模态逻辑中用与一般命题逻辑类似的方法建立公式的真度理论,必须另辟蹊径.

值得注意的是,模态逻辑的 Kripke 语义具有局部化的特点(详见本文第 2 节、第 3 节),即公式的赋值是局部化在某个可能世界处定义的.受此启发,我们不妨也从局部化着手,先尝试在某个可能世界处定义公式的局部化真度,继而再推广为全局真度,这正是本文的研究思路.为此,本文首先以 $F_n=\left\{0,\dfrac{1}{n-1},\dots,\dfrac{n-2}{n-1},1\right\}$ 为赋值域,定义了多值模态逻辑的 n-值 Kripke 模型的概念,并构建了相应的语义理论,同时指出经典模态逻辑的 Kripke 模型可以纳入到 n-值 Kripke 模型的框架之下,从而本文定义的多值模态逻辑的语义是经典模态逻辑语义的推广;其次,在固定可能世界集 W 与二元关系 R 而让赋值映射 e 自由变动的情况下,本文定义了$\langle W,R\rangle_n$-型框架的概念,并在该框架下用归纳的方法构建了由模态公式诱导的关于某个可能世界 $w\in W$ 的局部化映射,从而给出了模态公式关于 w 的局部化真度,并指出,任意模态公式的局部化真度都可以转化为另一个不含模态词的公式在同一可能世界处的局部化真度,且这种局部化真度的值与可能世界集的势无关;之后,在局部化真度的基础上,本文定义

了模态公式的全局真度,讨论了其若干性质,并证明了一致性定理,即当某模态公式不含模态词时,其全局真度与其在一般命题逻辑中的真度(见公式(2))吻合;最后,本文将所建立的真度理论应用于时态逻辑中,指出本文定义的公式真度较好地反映了时态逻辑的语义特点.

1 基本模态逻辑的语义

本节主要回顾基本模态逻辑(即经典模态逻辑)的语义理论及相关重要结论,更详细的内容见文献[1−3].

基本模态逻辑中模态公式的构成如下:

$$\varphi ::= p|\bot|\neg\varphi|\varphi_1\vee\varphi_2|\Diamond\varphi, p\in\Phi,$$

其中,Φ为原子公式集,$\bot$表示矛盾式,并以$\Box\varphi$表示$\neg\Diamond\neg\varphi$,$\varphi\wedge\psi$表示$\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$,$\varphi\to\psi$表示$\neg\varphi\vee\psi$.全体基本模态公式之集记为 $\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$.

定义 1[3]. 基本模态逻辑的模型(简称基本模型)是一个三元组 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$,其中,W 是非空的可能世界之集,$R\subseteq W\times W$ 是 W 上的二元关系,V 是映射 $V:\Phi\to P(W)$.这里,$P(W)$是 W 的幂集.

设$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,$w\in W$,则 w 满足φ,记作 $\boldsymbol{M},w\vDash\varphi$,可归纳的定义如下:

i) $\boldsymbol{M},w\vDash p$ 当且仅当 $w\in V(p)$,$p\in\Phi$;

ii) $\boldsymbol{M},w\vDash\bot$永远不成立;

iii) $\boldsymbol{M},w\vDash\neg\varphi$当且仅当 $\boldsymbol{M},w\vDash\varphi$不成立;

iv) $\boldsymbol{M},w\vDash\varphi\vee\psi$当且仅当 $\boldsymbol{M},w\vDash\varphi$或 $\boldsymbol{M},w\vDash\psi$;

v) $\boldsymbol{M},w\vDash\Diamond\varphi$当且仅当存在 $u\in W$,$(w,u)\in R$ 使得 $\boldsymbol{M},u\vDash\varphi$.

定义 2[3]. 设$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,如果对每个基本模型 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$及任意 $w\in W$ 均有 $\boldsymbol{M},w\vDash\varphi$,则称$\varphi$为有效公式.

命题 1[3]. 设 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$是基本模型,令 $V(\varphi)=\{w\in W|\boldsymbol{M},w\vDash\varphi\}$,$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,则:

i) $V(\neg\varphi)=W-V(\varphi)$;

ii) $V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$;

iii) $V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$;

iv) $V(\varphi\to\psi)=(W-V(\varphi))\cup V(\psi)$;

v) $V(\Diamond\varphi)=\{w\in W|R[w]\cap V(\varphi)\neq\varnothing\}$;

vi) $V(\Box\varphi)=\{w\in W|R[w]\subseteq V(\varphi)\}$.

这里,$R[w]=\{u\in W|(w,u)\in R\}$.

命题 2[3]. 设$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,则$\varphi$是有效公式当且仅当对每个基本模型 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$均有 $V(\varphi)=W$.

2 多值模态逻辑的语义

在本节中,我们将上述基本模型进行扩充,建立多值模态逻辑的 Kripke 模型及相应的语义理论.

多值模态逻辑中模态公式的构成如下:

$$\varphi ::= p|\bot|\neg\varphi|\varphi_1\wedge\varphi_2|\varphi_1\to\varphi_2|\Box\varphi, p\in\Phi,$$

其中,Φ为原子公式集,$\bot$表示矛盾式,并以$\Diamond\varphi$表示$\neg\Box\neg\varphi$,$\varphi\vee\psi$表示$\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$.多值模态逻辑的全体模态公式之集记为 $F(\Phi)$.以下我们总是假设Φ为可数集,即$\Phi=\{p_1,p_2,\dots\}$.

定义 3. 多值模态逻辑的模型是一个四元组 $K=(W,R,e,F_n)$,其中,

- W 是非空的可能世界之集;
- $F_n=\left\{0,\dfrac{1}{n-1},\dots,\dfrac{n-2}{n-1},1\right\}$ $(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$;
- $R:W\times W\to F_n$ 是 W 上的 F_n 值二元关系;
- $e:W\times\Phi\to F_n$ 为映射,

称 F_n 为赋值域,e 为赋值映射,相应的模型简称为 n-值模态模型.

定义 4. 设 $K=(W,R,e,F_n)$是一个 n-值模态模型,则赋值映射 e 可按如下方式扩张为映射 $\overline{e}:W\times F(\Phi)\to F_n$:

$$\overline{e}(w,\neg\varphi)=\neg\overline{e}(w,\varphi),$$
$$\overline{e}(w,\varphi\wedge\psi)=\overline{e}(w,\varphi)\wedge\overline{e}(w,\psi),$$
$$\overline{e}(w,\varphi\to\psi)=\overline{e}(w,\varphi)\to\overline{e}(w,\psi),$$
$$\overline{e}(w,\Box\varphi)=\wedge\{\overline{e}(u,\varphi)\mid R(w,u)>0,u\in W\},$$

其中,$w\in W,\varphi,\psi\in F(\Phi)$.等号右边的$\neg$运算定义为$\neg x=1-x(x\in F_n)$,$\wedge$为实值线上关于通常序的下确界运算,$\to$为单位区间[0,1]上的 Łukasiewicz 蕴含算子[4−6,36]或 R_0 蕴含算子[31,36](即 NM 蕴含算子[32]).

在不引起混淆的情况下,我们将 e 与 $\overline{e}$ 不加区别,均用 e 表示.为了方便,以下用Δ_w表示与 w 具有非零关系的可能世界之集,即$\Delta_w=\{u\in W|R(w,u)>0\}(\forall w\in W)$.此时有,

$$e(w,\Box\varphi)=\bigwedge_{u\in\Delta_w}e(u,\varphi),$$

且由定义 4 易证如下的推论:

推论 1. 设 $K=(W,R,e,F_n)$是一个 n-值模态模型,则

$$e(w,\varphi\vee\psi)=e(w,\varphi)\vee e(w,\psi),$$
$$e(w,\Diamond\varphi)=\bigvee_{u\in\Delta_w}e(u,\varphi),$$

其中,$w\in W,\varphi,\psi\in F(\Phi)$.等号右边的$\vee$为实值线上关于通常序的上确界运算.

例 1:在 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)$中取 $n=2$,则赋值域为 $F_2=\{0,1\}$,且关系 $R:W\times W\to\{0,1\}$退化为 W 上的经典二元关系,即 $R\subseteq W\times W$,赋值映射为 $e:W\times\Phi\to\{0,1\}$.此时,我们可将模型 K 中的$\{0,1\}$省略,记为 $K=(W,R,e)$.需要说明的是,这样的 2-值模态模型 $K=(W,R,e)$中的可能世界集 W 与二元关系 R 已与基本模型 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$中的相同.这里,e 和 V 虽然是表现形式不同的映射,但由以下分析可知,它们的本质是相同的.

事实上,映射 $V:\Phi\to P(W)$可按如下方式诱导出映射 $V^*:W\times\Phi\to\{0,1\}$.

$$V^*(w,p)=\begin{cases}1, & w\in V(p)\\ 0, & w\notin V(p)\end{cases},$$

且映射 V 与 V^*分别按命题 1 与定义 4 中的递归方式进行扩张后,满足(详见命题 3 的证明):

$$V^*(w,\varphi)=1\text{ 当且仅当 }w\in V(\varphi)\text{当且仅当 }\boldsymbol{M},w\vDash\varphi,w\in W,\varphi\in \mathrm{Form}(\Diamond,\Phi).$$

可见,映射 V 与 V^*虽然定义方式不同,但在本质上是一致的.因此,我们将映射 V 与 V^*等同看待.

此外不难看出,映射 $V^*:W\times\Phi\to\{0,1\}$已经具有了 2-值模态模型中赋值映射的形式.故在上述 2-值模态模型 $K=(W,R,e)$中,不妨取 $e=V^*$,则由上文分析知映射 e 与 V 一致,从而 2-值模态模型 $K=(W,R,e)$即成为基本模型.可见,多值模态逻辑的语义是基本模态逻辑语义的推广.

定义 5. 设$\varphi\in F(\Phi)$,如果对每个 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)$及任意 $w\in W$ 均有 $e(w,\varphi)=1$,则称φ为 n-型有效公式.

命题 3. n-型有效公式是有效公式.

证明:令公式ψ为 n-型有效公式.设 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$是任意基本模型,则可作相应的 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)$.这里,W,R 与模型 $\boldsymbol{M}$ 中的一致,且赋值映射 $e:W\times\Phi\to F_n$ 定义为

$$e(w,p)=\begin{cases}1, & w\in V(p)\\ 0, & w\notin V(p)\end{cases}.$$

以下用归纳法证明:若 V 与 e 分别按命题 1 与定义 4 中的递归方式进行扩张后,满足$\forall w\in W,\forall\varphi\in F(\Phi)$均有

$$e(w,\varphi)=1\text{ 当且仅当 }w\in V(\varphi)\tag{3}$$

由映射 e 的定义方式知,当φ为原子公式 p 时,公式(3)成立.设公式(3)对公式$\varphi,\varphi_1,\varphi_2$成立,则由定义 4 及命题 1 可知,对公式$\neg\varphi$,有 $e(w,\neg\varphi)=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi)=0$ 当且仅当 $w\notin V(\varphi)$当且仅当 $w\in W-V(\varphi)=V(\neg\varphi)$.对公式$\varphi_1\wedge\varphi_2$,有 $e(w,\varphi_1\wedge\varphi_2)=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi_1)=e(w,\varphi_2)=1$ 当且仅当 $w\in V(\varphi_1)$且 $w\in V(\varphi_2)$当且仅当 $w\in V(\varphi_1)\cap V(\varphi_2)=V(\varphi_1\wedge\varphi_2)$;对公式$\varphi_1\to\varphi_2$,有 $e(w,\varphi_1\to\varphi_2)=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi_1)\to e(w,\varphi_2)=(1-e(w,\varphi_1))\vee e(w,\varphi_2)=1$ 当且仅当 $w\notin V(\varphi_1)$或 $w\in V(\varphi_2)$当且仅当 $w\in(W-V(\varphi_1))\cup V(\varphi_2)=V(\varphi_1\to\varphi_2)$;对公式$\Box\varphi$,有 $e(w,\Box\varphi)=1$ 当且仅当 $\bigwedge_{u\in\Delta_w}e(u,\varphi)=1$ 当且仅当$\forall u\in\Delta_w$,

$e(u,\varphi)=1$ 当且仅当$\forall u\in\Delta_w,u\in V(\varphi)$当且仅当$\Delta_w\subseteq V(\varphi)$当且仅当 $w\in V(\Box\varphi)$.

综上可知,公式(3)对 $F(\Phi)$中所有公式都成立.

由于ψ是 n-型有效公式,则对上述的 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)$,必有$\forall w\in W,e(w,\psi)=1$.故由公式(3)得知,$\forall w\in W$ 均有 $w\in V(\psi)$,从而 $V(\psi)=W$.因此,由基本模型 $\boldsymbol{M}$ 的任意性及命题 2 知,ψ是有效公式. □

注 1:有效公式不一定是 n-型有效公式,举反例如下:

设$\varphi=p\vee\neg p$,则对任意基本模型 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$均有 $V(\varphi)=V(p)\cup V(\neg p)=V(p)\cup(W-V(p))=W$.可见,$\varphi$是有效公式.但当 $n\geqslant 3$ 时,φ不是 n-型有效公式.事实上,在 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)(n\geqslant 3)$中取赋值映射 e 满足 $e(w,p)=\dfrac{1}{n-1}$ $(w\in W)$,则 $e(w,\varphi)=e(w,p)\vee(1-e(w,p))=\dfrac{1}{n-1}\vee\dfrac{n-2}{n-1}=\dfrac{n-2}{n-1}\neq 1$.可见,$\varphi$不是 n-型有效公式.

推论 2. 设$\varphi\in F(\Phi)$,则φ是有效公式当且仅当φ是 2-型有效公式.

证明:由命题 3 及例 1 易得. □

3 多值模态逻辑中公式的真度

本节尝试将计量化的思想引入到多值模态逻辑中.由上文可以看到,多值模态逻辑的语义具有局部化的特点,即公式φ的赋值是局部化在某个可能世界 $w\in W$ 处定义的.受此启发,在本节中,我们也从局部化着手,先在某个可能世界处定义公式的局部化真度,继而推广为某种全局真度.为了讨论方便,我们只考虑可能世界集为有限集的模态模型,即有限模型.

3.1 模态公式的局部化真度

设 $W\neq\varnothing$为有限可能世界之集,$R:W\times W\to F_n(n\geqslant 2)$是 W 上的 F_n 值二元关系,此时,由 W 与 R 可以得到一族 n-值模态模型:

$$K_{W,R}=\{K=(W,R,e,F_n)|e:W\times\Phi\to F_n\} \tag{4}$$

称 $K_{W,R}$ 为$\langle W,R\rangle_n$-型框架.当模型 K 在框架 $K_{W,R}$ 中变化时,可能世界集 W 与关系 R 均是固定的,而赋值映射 e 则取遍所有可能情况.

类似于一般 n-值命题逻辑,我们也想在多值模态逻辑中构造由公式诱导的映射.然而由引言得知,多值模态逻辑中赋值映射 e 的特点决定了我们无法再利用公式(1)解决这一问题,必须另辟蹊径.值得注意的是,文献[36]指出,在一般 n-值命题逻辑中,当公式$\varphi=\varphi(p_1,p_2,\ldots,p_m)$中含有 m 个原子公式 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 时,φ按公式(1)诱导的映射成为 $\overline{\varphi}:(F_n)^m\to F_n$.这里,$\overline{\varphi}(y_1,\ldots,y_m)$恰为将$\varphi(p_1,\ldots,p_m)$中的原子公式 $p_1,\ldots,p_m$ 分别用 $y_1,\ldots,y_m$ 取代所得,如$\overline{p_1\wedge p_2}(y_1,y_2)=y_1\wedge y_2$.受此启发,我们不妨从模态公式自身的构造出发来定义由模态公式诱导的映射.这里,有 3 个相互制约的因素需要考虑:

首先,多值模态逻辑中的赋值映射 e 由可能世界与模态公式同时决定,具有双重的变化因素.因此,在定义模态公式诱导的映射时,我们当然也要考虑这一点.即任意模态公式所诱导的映射均与某个可能世界 $w\in W$ 相关.所以,本文定义的由模态公式φ所诱导的映射也是局部化的,是相对于某个可能世界 $w\in W$ 而定义的.我们将这个映射记为$\overline{\varphi}_w$,并称其为φ关于 w 的局部化映射.

其次,在赋值域 F_n 中没有与模态词$\Box,\Diamond$配套的语义算子,因此对于一般的模态公式φ,我们当然不能简单地定义φ诱导的映射即为将φ中的原子公式分别用 F_n 中的变元取代所得.然而注意到,由定义 4 可知,多值模态逻辑中的赋值映射 e 虽然不是同态,但它关于第 2 个变量保持除模态词$\Box,\Diamond$外的所有运算,且 e 关于形如$\Box\varphi,\Diamond\varphi$的模态公式的赋值可由 e 关于公式φ的赋值递归所得.因此类似地,在构造模态公式诱导的映射时,我们也采用递归的方法,且这种递归方式必须与赋值映射 e 的递归方式保持统一.对于除模态词$\Box,\Diamond$外的逻辑连接词,这种递归方式是显而易见的:$\overline{(\varphi\wedge\psi)}_w$ 可以递归定义为 $\overline{\varphi}_w\wedge\overline{\psi}_w$;$\overline{(\varphi\to\psi)}_w$ 可以递归定义为 $\overline{\varphi}_w\to\overline{\psi}_w$;$\overline{(\neg\varphi)}_w$ 可以递归定义为 $\neg\overline{\varphi}_w$,即 $1-\overline{\varphi}_w$.对于形如$\Box\varphi$的模态公式,我们不妨通过公式φ关于那些与 w 有非零关系的可能世界的局部化映射来递归定义 $\overline{(\Box\varphi)}_w$,即 $\overline{(\Box\varphi)}_w=\bigwedge_{u\in\Delta_w}\overline{\varphi}_u$.这样,我们便可以通过递归的方式定义所有模态公式在任意可能世界处诱导的

局部化映射.最重要的是,这种递归方式与赋值映射 e 的递归方式保持高度统一.

最后,需要指出的是,对于由上述递归方式定义的局部化映射,我们是在$\langle W,R\rangle_n$-型框架下考虑的,此时,可能世界集 W 与二元关系 R 是固定的,而赋值映射 e 则取遍所有可能情况.相应地,对于某一模态公式φ,我们应该考虑φ关于 W 中所有可能世界的局部化映射;且由上述递归方式得知,我们应该保证同一模态公式关于 W 中每个可能世界的局部化映射都具有共同的定义域.这就必然导致局部化映射中变元个数的增加.事实上,若$|W|=k$ 且φ含 m 个原子公式,则φ诱导的局部化映射将有 $k\cdot m$ 个变元.

根据以上分析,我们引入模态公式诱导的局部化映射的定义.

定义 6. 设 $K_{W,R}$ 为$\langle W,R\rangle_n$-型框架,$w\in W=\{w_1,\dots,w_k\}$,$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$是 $F(\Phi)$中含有 m 个原子公式 $p_1,\dots,p_m$ 的模态公式,则φ可按如下递归方式诱导映射 $\overline{\varphi}_w:(F_n)^{k\cdot m}\to F_n$:

$$\overline{(p_i)}_w(x_{1,1},\dots,x_{1,m},x_{2,1},\dots,x_{2,m},\dots,x_{k,1},\dots,x_{k,m})=x_{j,i},w=w_j,p_i\in\Phi(j=1,\dots,k,i=1,\dots,m),$$
$$\overline{(\neg\varphi)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=1-\overline{\varphi}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m}),$$
$$\overline{(\varphi_1\wedge\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\overline{(\varphi_1)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\wedge\overline{(\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m}),$$
$$\overline{(\varphi_1\to\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\overline{(\varphi_1)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\to\overline{(\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m}),$$
$$\overline{(\Box\varphi)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\begin{cases}\bigwedge\limits_{u\in\Delta_w}\overline{\varphi}_u(x_{1,1},\dots,x_{k,m}), & \Delta_w\neq\varnothing\\ \overline{\varphi}_u(x_{1,1},\dots,x_{k,m}), & \Delta_w=\varnothing\end{cases}.$$

其中,$(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\in(F_n)^{k\cdot m}$.称 $\overline{\varphi}_w$ 为公式φ关于可能世界 w 的局部化映射.

需要指出的是,设公式$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$含有 m 个原子公式,若 $l>m$,则我们也可以认为φ是含有 l 个原子公式的模态公式,即$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_l)$.事实上,可以给$\varphi(p_1,\dots,p_m)$交上 $l-m$ 个形如 $p_i\to p_i(i=m+1,m+2,\dots,l)$的公式而保持局部化映射 $\overline{\varphi}_w$ 的值不变,因为$\overline{(p_i\to p_i)}_w\equiv 1$.

例 2:设 $W=\{w_1,w_2,w_3\}$,且$\Delta_{w_1}=\{w_1,w_2\},\Delta_{w_2}=\{w_3\}$,分别求模态公式 $p_1\wedge p_2,\Box p_2,\Box\Box p_1$ 与$\Diamond p_1$ 关于 w_1 的局部化映射,其中,$p_1,p_2\in\Phi$.

解:

(i) 取 $m=2$,注意到此时 $k=3$,则$\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}:(F_n)^{3\cdot 2}\to F_n$ 为

$$\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}(x_{1,1},x_{1,2},x_{2,1},x_{2,2},x_{3,1},x_{3,2})=\overline{(p_1)}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})\wedge\overline{(p_2)}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})=x_{1,1}\wedge x_{1,2}.$$

(ii) 取 $m=2$,则$\overline{(\Box p_2)}_{w_1}:(F_n)^{3\cdot 2}\to F_n$ 为

$$\overline{(\Box p_2)}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})=\bigwedge_{u\in\Delta_{w_1}}\overline{(p_2)}_u(x_{1,1},\dots,x_{3,2})=\overline{(p_2)}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})\wedge\overline{(p_2)}_{w_2}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})=x_{1,2}\wedge x_{2,2}.$$

(iii) 取 $m=1$,则类似于(ii)可知$\overline{(\Box\Box p_1)}_{w_1}:(F_n)^{3\cdot 1}\to F_n$ 为

$$\overline{(\Box\Box p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=\overline{(p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})\wedge\overline{(p_1)}_{w_2}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})\wedge\overline{(p_1)}_{w_3}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=x_{1,1}\wedge x_{2,1}\wedge x_{3,1}.$$

(iv) 取 $m=1$,则$\overline{(\Diamond p_1)}_{w_1}:(F_n)^{3\cdot 1}\to F_n$ 为

$$\overline{(\Diamond p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=\overline{(\neg\Box\neg p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=1-\bigwedge_{u\in\Delta_{w_1}}(1-\overline{(p_1)}_u(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1}))$$
$$=\overline{(p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})\vee\overline{(p_1)}_{w_2}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=x_{1,1}\vee x_{2,1}.$$

注 2:由定义 6 及例 2 可以看到,原子公式关于 w 的局部化映射实际上只由一个变元决定,且当公式$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$中不含模态词时,$\varphi$关于 w 的局部化映射至多由 m 个变元决定.此外,某一模态公式关于任意可能世界的局部化映射都具有共同的定义域,这正与我们之前所希望的一致.

现在,我们在模态公式诱导的局部化映射的基础之上,定义公式关于某个可能世界的局部化真度.注意到,$|(F_n)^{mk}|=n^{mk}$.

定义 7. 设 $K_{W,R}$ 为$\langle W,R\rangle_n$-型框架,$w\in W=\{w_1,\dots,w_k\}$,$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$是 $F(\Phi)$中含有 m 个原子公式 $p_1,\dots,p_m$ 的模态公式,则φ关于可能世界 w 的局部化真度$\tau_w(\varphi)$定义为

$$\tau_w(\varphi)\frac{1}{n^{mk}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \tag{5}$$

例 3:设赋值域为 $F_3=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$,$W=\{w_1,w_2,w_3\}$,且二元关系 R 满足 $R(w_1,w_1)=1,R(w_1,w_2)=R(w_2,w_3)=\frac{1}{2}$,其他情形 R 恒取 0.分别求模态公式 $p_1\wedge p_2,\Box p_2,\Box\Box p_1$ 与 $\Diamond p_1$ 关于 w_1 的局部化真度,其中,$p_1,p_2\in\Phi$.

解:注意到此时 $n=k=3$,且 $\Delta_{w_1}=\{w_1,w_2\},\Delta_{w_2}=\{w_3\}$,故由例 2 知:

(i) 取 $m=2$,则 $\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}:(F_n)^{3\cdot 2}\to F_n$ 为 $\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})=x_{1,1}\wedge x_{1,2}$,故

$$\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}^{-1}(1)=\left\{(1,1,x_{2,1},\dots,x_{3,2})\,|\,(x_{2,1},\dots,x_{3,2})\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^4\right\},$$

$$\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\left(\frac{1}{2},1,x_{2,1},\dots,x_{3,2}\right),\left(1,\frac{1}{2},x_{2,1},\dots,x_{3,2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},x_{2,1},\dots,x_{3,2}\right)\middle|(x_{2,1},\dots,x_{3,2})\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^4\right\}.$$

可见,$|\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}^{-1}(1)|=3^4,\left|\overline{(p_1\wedge p_2)}_{w_1}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=3\cdot 3^4=3^5$.故

$$\tau_{w_1}(p_1\wedge p_2)=\frac{1}{3^6}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^5+1\cdot 3^4\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}.$$

(ii) 取 $m=2$,则 $\overline{(\Box p_2)}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{3,2})=x_{1,2}\wedge x_{2,2}$.故,类似于情形(i),可得 $\tau_{w_1}(\Box p_2)=\frac{5}{18}$.

(iii) 取 $m=1$,则 $\overline{(\Box\Box p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=x_{1,1}\wedge x_{2,1}\wedge x_{3,1}$.故,类似于情形(i),可得 $\tau_{w_1}(\Box\Box p_1)=\frac{1}{6}$.

(iv) 取 $m=1$,则 $\overline{(\Diamond p_1)}_{w_1}(x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1})=x_{1,1}\vee x_{2,1}$.故,类似于情形(i),可得 $\tau_{w_1}(\Diamond p_1)=\frac{13}{18}$.

命题 4. 设 $K_{W,R}$ 为 $\langle W,R\rangle_n$-型框架,$w\in W=\{w_1,\dots,w_k\}$,$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$是 $F(\Phi)$中不含模态词的公式,则

$$\tau_w(\varphi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\left(\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}\right)^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \tag{6}$$

其中,$\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}$ 为 $\overline{\varphi}_w$ 在$(F_n)^m$上的限制.

证明:由定义 6 及注 2 得知,由于φ中不含模态词,故φ关于 w 的局部化映射 $\overline{\varphi}_w$ 完全由其在$(F_n)^m$ 上的限制 $\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}$ 决定,即

$$\overline{\varphi}_w(x_{1,1},\dots,x_{1,m},\dots,x_{k,1},\dots,x_{k,m})=\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}(y_1,\dots,y_m).$$

这里,存在某个 $j\in\{1,\dots,k\}$使得 $w=w_j$,且对任意 $i\in\{1,\dots,m\}$有 $y_i=x_{j,i}$.故

$$\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|=\left|\left(\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}\right)^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\cdot n^{mk-m}=\left|\left(\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}\right)^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\cdot n^{(k-1)m}(i=1,2,\dots,n-1).$$

因此,

$$\tau_w(\varphi)=\frac{1}{n^{mk}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\cdot\left|\left(\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}\right)^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\cdot n^{(k-1)m}=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\left(\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}\right)^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|. \quad \Box$$

注 3:若$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$不含模态词,则由定义 6 中的递归方式易知,$\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}(y_1,\dots,y_m)$实际上是将$\varphi(p_1,\dots,p_m)$中的 $p_1,\dots,p_m$ 分别用 $y_1,\dots,y_m$ 取代所得.

另一方面,在一般 n-值命题逻辑中,公式φ可按公式(1)诱导一个映射 $\overline{\varphi}:(F_n)^{\omega}\to F_n$,且文献[36]证明了当公式$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$中含 m 个原子公式时,此映射成为 $\overline{\varphi}:(F_n)^m\to F_n$.这里,$\overline{\varphi}(y_1,\dots,y_m)$恰为将$\varphi(p_1,\dots,p_m)$中的 $p_1,\dots,p_m$ 分别用$y_1,\dots,y_m$取代所得.这一点正与 $\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}$ 一致.特别地,文献[36]在一般 n-值命题逻辑中按公式(2)定义了公式φ的真度$\tau(\varphi)$,且证明了此时

$$\tau(\varphi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \tag{7}$$

因此,我们有如下命题:

命题 5. 设 $K_{W,R}$ 为$\langle W,R\rangle_n$-型框架,φ是 $F(\Phi)$中不含模态词的公式,则

$$\tau_w(\varphi)=\tau(\varphi),\forall w\in W.$$

证明:设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$,由于$\varphi$不含模态词,故$\varphi$也是一般 n-值命题逻辑中的公式,且φ分别按定义 6 及公式(1)诱导映射 $\overline{\varphi}_w$ $(\forall w\in W)$与 $\overline{\varphi}$.由注 3 的分析得知,$\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}=\overline{\varphi}$,故由公式(6)与公式(7)得知:

$$\tau_w(\varphi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\left(\overline{\varphi}_w|_{(F_n)^m}\right)^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|=\tau(\varphi).\qquad\square$$

命题 6. 设 $K_{W,R}$ 为$\langle W,R\rangle_n$-型框架,$W=\{w_1,\dots,w_k\}$,则 $F(\Phi)$中任意模态公式$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$及$\forall w\in W$,总存在一个不含模态词的公式$\psi=\psi(p_1,\dots,p_{m'})(m'\geqslant m)$使得$\tau_w(\varphi)=\tau_w(\psi)$.

证明:首先用归纳的方法证明:

对任意模态公式$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$及$\forall w\in W$,总存在一个不含模态词的公式$\psi=\psi(p_1,\dots,p_{m'})(m'\geqslant m)$使得

$$\overline{\varphi}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq\overline{\psi}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'}) \tag{8}$$

其中,$\doteq$是指当不考虑变量名的差别时,公式(8)中等号左右两边具有同样的形式(如 $x_{1,1}\wedge x_{1,2}\doteq x_{2,1}\wedge x_{2,2}$).

对于原子公式 $p_i(1\leqslant i\leqslant m)$,该结论显然成立.设此结论对公式$\varphi,\varphi_1,\varphi_2$成立,不妨设$\varphi,\varphi_1,\varphi_2$均含有 m 个原子公式.则任取 $w\in W$,分别存在不含模态词的公式ψ,ψ_1,ψ_2 使得公式(8)成立.不妨设ψ,ψ_1,ψ_2均含有 m'个原子公式,则对于公式$\neg\varphi,\varphi_1\wedge\varphi_2,\varphi_1\to\varphi_2$分别有,

$$\begin{aligned}
&\overline{(\neg\varphi)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=1-\overline{\varphi}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq1-\overline{\psi}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})=\overline{(\neg\psi)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'}),\\
&\overline{(\varphi_1\wedge\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\overline{(\varphi_1)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\wedge\overline{(\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq\\
&\overline{(\psi_1)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})\wedge\overline{(\psi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})=\overline{(\psi_1\wedge\psi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'}),\\
&\overline{(\varphi_1\to\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\overline{(\varphi_1)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\to\overline{(\varphi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq\\
&\overline{(\psi_1)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})\to\overline{(\psi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})=\overline{(\psi_1\to\psi_2)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m'}).
\end{aligned}$$

对于公式$\Box\varphi$,不妨设$\Delta_w=\{w_1,w_2,\dots,w_t\}\neq\varnothing(t\leqslant k)$,且存在不含模态词的公式$\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_t$(这里,我们仍假设$\psi_1,\dots,\psi_t$均含有 m'个原子公式),使得 $\overline{\varphi}_{w_i}$ $(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq\overline{\psi}_{iw_i}$ $(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})(i=1,2,\dots,t)$.由定义 6 知,$\overline{\psi}_{iw_i}$ 与 $\overline{\psi}_{jw_j}$ $(i\neq j)$不含相同的变元,故

$$\begin{aligned}
&\overline{(\Box\varphi)}_w(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\bigwedge_{u\in\Delta_w}\overline{\varphi}_u(x_{1,1},\dots,x_{k,m})=\overline{\varphi}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\wedge\overline{\varphi}_{w_2}(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\wedge\dots\wedge\overline{\varphi}_{w_t}(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq\\
&\overline{\psi}_{1w_1}(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})\wedge\overline{\psi}_{2w_2}(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})\wedge\dots\wedge\overline{\psi}_{tw_t}(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})\doteq\\
&\overline{\psi_1(p_1,\dots,p_{m'})}_{w_1}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})\wedge\overline{\psi_2(p_{m'+1},\dots,p_{2m'})}_{w_2}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})\wedge\dots\wedge\overline{\psi_t(p_{(t-1)m'+1},\dots,p_{tm'})}_{w_t}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})\doteq\\
&\overline{\psi_1(p_1,\dots,p_{m'})}_{w}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})\wedge\overline{\psi_2(p_{m'+1},\dots,p_{2m'})}_{w}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})\wedge\dots\wedge\overline{\psi_t(p_{(t-1)m'+1},\dots,p_{tm'})}_{w}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})=\\
&\overline{(\psi_1(p_1,\dots,p_{m'})\wedge\psi_2(p_{m'+1},\dots,p_{2m'})\wedge\dots\wedge\psi_t(p_{(t-1)m'+1},\dots,p_{tm'})}_{w}(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'}),
\end{aligned}$$

其中,$(x_{1,1},\dots,x_{k,tm'})$是$(x_{1,1},\dots,x_{1,tm'},\dots,x_{k,1},\dots,x_{k,tm'})$的简写,$\psi_i(p_{(i-1)m'+1},\dots,p_{im'})(2\leqslant i\leqslant t)$为将$\psi_i(p_1,\dots,p_{m'})$中的原子公式 $p_1,\dots,p_{m'}$分别替换为原子公式 $p_{(i-1)m'+1},\dots,p_{im'}$后所得的公式.

注意到,此时我们可以认为$\psi_i(p_{(i-1)m'+1},\dots,p_{im'})(i=1,2,\dots,t)$均是含有 tm'个原子公式 $p_1,\dots,p_{tm'}$的模态公式.

综上可知,公式(8)对任意模态公式成立.

现设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$为任意模态公式,$w\in W$.故由上述结论知,存在一个不含模态词的公式$\psi=\psi(p_1,\dots,p_{m'})(m'\geqslant m)$使得 $\overline{\varphi}_w$ $(x_{1,1},\dots,x_{k,m})\doteq\overline{\psi}_w$ $(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})$.注意到,当不考虑变量名的差别时,$\overline{\varphi}_w$ $(x_{1,1},\dots,x_{k,m})$与 $\overline{\psi}_w$ $(x_{1,1},\dots,x_{k,m'})$具有完全相同的形式.特别地,由于 $m'\geqslant m$,由前文分析知,自然可认为φ也含有 m'个原子公式.故,此时 $\overline{\varphi}_w$ 与 $\overline{\psi}_w$ 有相同

的定义域,且 $\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| = \left|\overline{\psi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|$ (i=1,2,...,n−1).故由定义 7 可知,$\tau_w(\varphi)=\tau_w(\psi)$. □

推论 3. 设 $K_{W,R}$ 为 $\langle W,R\rangle_n$-型框架,$w\in W$,且 φ 是 $F(\Phi)$ 中任意模态公式,则 $\tau_w(\varphi)$ 与 $|W|$ 无关.

证明:设 φ 为任意模态公式,由命题 6 知,存在一个不含模态词的公式 ψ 使得 $\tau_w(\varphi)=\tau_w(\psi)$.又有命题 5 知,由于 ψ 不含模态词,故 $\tau_w(\psi)=\tau(\psi)$.这里,$\tau(\psi)$ 是 ψ 在一般 n-值命题逻辑中的真度,自然与 $|W|$ 无关.

可见,$\tau_w(\varphi)$ 也与 $|W|$ 无关. □

命题 7. 设 $K_{W,R}$ 为 $\langle W,R\rangle_n$-型框架,$\varphi,\psi\in F(\Phi)$,则 $\forall w\in W$ 有:

(i) $0\leqslant\tau_w(\varphi)\leqslant 1$;

(ii) $\tau_w(\neg\varphi)+\tau_w(\varphi)=1$;

(iii) $\tau_w(\varphi\vee\psi)+\tau_w(\varphi\wedge\psi)=\tau_w(\varphi)+\tau_w(\psi)$.

证明:结论(i)显然成立.

结论(ii):不妨设 $|W|=k$ 且 φ 含 m 个原子公式,由于 $\overline{(\neg\varphi)}_w=1-\overline{\varphi}_w$,故 $\left|\overline{\neg\varphi}_w^{-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\right| = \left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|$ (i=0,1,...,n−1),从而有,

$$\begin{aligned}\tau_w(\neg\varphi)+\tau_w(\varphi) &= \frac{1}{n^{mk}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\left|\overline{(\neg\varphi)}_w^{-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\right| + \frac{1}{n^{mk}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \\ &= \frac{1}{n^{mk}}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| + \frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\right] \\ &= \frac{1}{n^{mk}}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \\ &= 1.\end{aligned}$$

结论(iii):不妨设 φ,ψ 均含 m 个原子公式,故由 $\left|\overline{(\varphi\vee\psi)}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| + \left|\overline{(\varphi\wedge\psi)}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| = \left|\overline{\varphi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| + \left|\overline{\psi}_w^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|$ (i=1,2,...,n−1)易知结论(iii)成立. □

定义 8. 设 $\varphi,\psi\in F(\Phi)$.若对任意 $\langle W,R\rangle_n$-型框架 $K_{W,R}$ 及 $\forall w\in W$ 均有 $\overline{\varphi}_w \doteq \overline{\psi}_w$ 恒成立,则称 φ 与 ψ 等价,记为 $\varphi\approx\psi$.

定义 9. 设 $\varphi\in F(\Phi)$.若对任意 $\langle W,R\rangle_n$-型框架 $K_{W,R}$ 及 $\forall w\in W$ 均有 $\overline{\varphi}_w\equiv 1$,则称 φ 为永真公式.

命题 8. n-型有效公式是永真公式.

证明:设 $K_{W,R}$ 为任意 $\langle W,R\rangle_n$-型框架,$W=\{w_1,\ldots,w_k\}$,且 $\varphi=\varphi(p_1,\ldots,p_m)$ 为 $F(\Phi)$ 中任意模态公式,则由命题 6 的证明知,$\forall w\in W$,总存在一个不含模态词的公式 $\psi=\psi(p_1,\ldots,p_{m'})(m'\geqslant m)$,使得 $\overline{\varphi}_w(x_{1,1},\ldots,x_{k,m}) \doteq \overline{\psi}_w(x_{1,1},\ldots,x_{k,m'})$.下面用归纳的方法证明:此时,对 $K_{W,R}$ 中任意赋值映射 e,均有 $e(w,\varphi)=e(w,\psi)$.

对于原子公式 $p_i(1\leqslant i\leqslant m)$,该结论显然成立.设此结论对公式 $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ 成立,则任取 $w\in W$,分别存在不含模态词的公式 ψ,ψ_1,ψ_2,使得 $e(w,\varphi)=e(w,\psi),e(w,\varphi_1)=e(w,\psi_1)$ 且 $e(w,\varphi_2)=e(w,\psi_2)$.则对于公式 $\neg\varphi,\varphi_1\wedge\varphi_2,\varphi_1\to\varphi_2$ 分别有:

$$e(w,\neg\varphi)=1-e(w,\varphi)=1-e(w,\psi)=e(w,\neg\psi),$$

$$e(w,\varphi_1\wedge\varphi_2)=e(w,\varphi_1)\wedge e(w,\varphi_2)=e(w,\psi_1)\wedge e(w,\psi_2)=e(w,\psi_1\wedge\psi_2),$$

$$e(w,\varphi_1\to\varphi_2)=e(w,\varphi_1)\to e(w,\varphi_2)=e(w,\psi_1)\to e(w,\psi_2)=e(w,\psi_1\to\psi_2).$$

对于公式 $\Box\varphi$,不妨仍设 $\Delta_w=\{w_1,w_2,\ldots,w_t\}\neq\varnothing(t\leqslant k)$,且存在不含模态词的公式 $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_t$ 使得 $e(w_i,\varphi)=e(w_i,\psi_i)$ (i=1,2,...,t).故

$$\begin{aligned}e(w,\Box\varphi)&=e(w_1,\varphi)\wedge e(w_2,\varphi)\wedge\ldots\wedge e(w_t,\varphi)\\ &=e(w_1,\psi_1)\wedge e(w_2,\psi_2)\wedge\ldots\wedge e(w_t,\psi_t)\\ &=e(w,\psi_1)\wedge e(w,\psi_2)\wedge\ldots\wedge e(w,\psi_t)\\ &=e(w,\psi_1\wedge\psi_2\wedge\ldots\wedge\psi_t).\end{aligned}$$

综上并结合命题 6 的证明得知,上述结论对任意模态公式成立.

现设$\varphi=\varphi(p_1,...,p_m)$是 n-型有效公式,故对于上述$\langle W,R\rangle_n$-型框架 $K_{W,R}$ 中任意赋值映射 e 及$\forall w\in W$ 均有 $e(w,\varphi)=1$.此时,由上述结论知,存在一个不含模态词的公式$\psi=\psi(p_1,...,p_{m'})(m'\geqslant m)$,使得 $\overline{\varphi}_w \doteq \overline{\psi}_w$ 且 $e(w,\psi)=e(w,\varphi)=1$.设 $e(w,p_i)=y_i(i=1,...,m')$,由注 3 可知,由于ψ不含模态词,$\overline{\psi}_w|_{(F_n)^{m'}}(y_1,...,y_{m'})$实际上是将$\psi(p_1,...,p_{m'})$中的 $p_1,...,p_{m'}$分别用 $y_1,...,y_{m'}$取代所得.故由前文分析可知,存在 $j\in\{1,...,k\}$使得 $x_{j,i}=y_i(i=1,...,m')$且

$$\overline{\psi}_w(x_{1,1},...,x_{k,m'})=\overline{\psi}_w|_{(F_n)^{m'}}(y_1,...,y_{m'})=\overline{\psi}_w|_{(F_n)^{m'}}(e(w,p_1),...,e(w,p_{m'}))=e(w,\psi)=1. \tag{9}$$

注意到,当赋值映射 e 在 $K_{W,R}$ 中取遍所有可能情形时,$(y_1,...,y_{m'})$也取遍整个空间$(F_n)^{m'}$,故$\overline{\psi}_w|_{(F_n)^{m'}}\equiv 1$,从而$\overline{\psi}_w\equiv 1$.再由$\overline{\varphi}_w \doteq \overline{\psi}_w$ 知$\overline{\varphi}_w\equiv 1$,从而由 w 的任意性可知,φ是永真公式. □

注 4:永真公式不一定是 n-型有效公式,举反例如下:

设$\varphi=\Diamond(p\to p)$.取 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)$及 $u\in W$ 满足$\Delta_u=\varnothing$,则 $e(u,\varphi)=\bigvee_{v\in\Delta_u} e(v,p\to p)=\vee\varnothing=0$.可见,$\varphi$不是 n-型有效公式.但φ是永真公式,实际上,设$|W|=k$ 且取 $m=1$,则$\forall w\in W$ 有 $\overline{(\Diamond(p\to p))}_w:F_n^k\to F_n$ 满足:

- 当$\Delta_w=\varnothing$时,$\overline{(\Diamond(p\to p))}_w(x_1,...,x_k)=\overline{(p\to p)}_w(x_1,...,x_k)=1$;
- 当$\Delta_w\neq\varnothing$时,$\overline{(\Diamond(p\to p))}_w(x_1,...,x_k)=\bigvee_{u\in\Delta_w}\overline{(p\to p)}_u(x_1,...,x_k)=1$.故$\overline{(\Diamond(p\to p))}_w\equiv 1$.可见,$\varphi$是永真公式.

命题 9. 设$\varphi,\psi\in F(\Phi)$,则:

(i) 若$\varphi\approx\psi$,则对任意框架 $K_{W,R}$ 及$\forall w\in W$ 有$\tau_w(\varphi)=\tau_w(\psi)$;

(ii) φ是永真公式当且仅当对任意框架 $K_{W,R}$ 及$\forall w\in W$ 有$\tau_w(\varphi)=1$;

(iii) 若φ是 n-型有效公式,则对任意框架 $K_{W,R}$ 及$\forall w\in W$ 有$\tau_w(\varphi)=1$.

证明:

(i) 不妨设φ与ψ含有相同数目的原子公式,则由$\varphi\approx\psi$知,对任意框架 $K_{W,R}$ 及$\forall w\in W$,当不考虑变量名的差别时,$\overline{\varphi}_w$与$\overline{\psi}_w$总具有相同的形式.故结合公式(5)知,$\tau_w(\varphi)=\tau_w(\psi)$.

(ii) φ是永真公式当且仅当对任意框架 $K_{W,R}$ 及$\forall w\in W$ 有$\overline{\varphi}_w\equiv 1$ 当且仅当对任意框架 $K_{W,R}$ 及$\forall w\in W$ 有 $\tau_w(\varphi)=1$.

(iii) 由结论(ii)及命题 8 易证. □

3.2 模态公式的全局真度

若 W 与 W'是两个等势的非空集,则存在一一对应的 $f:W\to W'$,那么,以 W 为可能世界集的 n-值模态模型 $K=(W,R,e,F_n)$自然可以转化为以 W'为可能世界集的 n-值模态模型 $K'=(W',R',e',F_n)$.

这里,$R'(w',u')=R(f^{-1}(w'),f^{-1}(u'))$,且 $e'(w',p)=e(f^{-1}(w'),p)(p\in\Phi)$.

以下我们对这种仅仅是载体不同而结构完全相同的两个 n-值模态模型不加区分.

设 $K_{W,R}=\{K=(W,R,e,F_n)|e:W\times\Phi\to F_n\}$是$\langle W,R\rangle_n$-型框架.令

$$K_W=\{K_{W,R}|R:W\times W\to F_n\} \tag{10}$$

并设$|W|=k$,则由上述分析可知,K_W实际上包含了全体具有 k 个可能世界的 n-值模态模型.

由于关系 $R:W\times W\to F_n$ 为有限定义域上的有限值映射,故$|K_W|$有限.

定义 10. 设 $K_{W,R}$ 是$\langle W,R\rangle_n$-型框架,其中,W 有限,$\varphi\in F(\Phi)$,则定义公式φ关于框架 $K_{W,R}$ 的真度为

$$\tau_{W,R}(\varphi)=\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\tau_w(\varphi) \tag{11}$$

此外,设$|W|=k$,则定义公式φ的 k-全局真度为

$$\tau^{(k)}(\varphi)=\frac{1}{|K_w|}\sum_{K_{W,R}\in K_W}\tau_{W,R}(\varphi) \tag{12}$$

其中,K_W按公式(10)定义.

需要指出的是,由推论 3 及定义 10 可以看到,虽然任意模态公式的局部化真度与可能世界集的势无关,但其 k-全局真度与$|W|=k$ 是相关的,这一点与文献[37]中定义的模态公式的(n)真度一致.但本文定义的 k-全局真度与

文献[37]中定义的(n)真度有着明显的区别:

- (n)真度是基于基本模态逻辑的语义考虑的,而 k-全局真度是基于更一般的多值模态逻辑的语义考虑的;
- 模态公式的 k-全局真度是通过其局部化真度来定义的,而局部化真度又与模态公式诱导的局部化映射密切相关,即 k-全局真度是从模态公式本身的结构出发考虑的;而模态公式的(n)真度是从有限模型中满足该公式的可能世界在整个可能世界集W中所占的比重[37]这个角度来考虑的,二者的定义方式有着本质的区别.

与文献[37]类似,本文定义的 k-全局真度也满足:当某模态公式不含模态词时,其 k-全局真度与其在一般 n-值命题逻辑中的真度一致,即有如下定理:

定理 1(一致性定理). 若φ是$F(\Phi)$中不含模态词的公式,则

$$\tau^{(k)}(\varphi)=\tau(\varphi),k=1,2,\dots$$

证明:设 $K_{W,R}$ 为任意$\langle W,R\rangle_n$-型框架,其中,$|W|=k$.由于φ不含模态词,故由命题 5 可知,$\forall w\in W$ 均有$\tau_w(\varphi)=\tau(\varphi)$,因而 $\tau_{W,R}(\varphi)=\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\tau_w(\varphi)=\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\tau(\varphi)=\tau(\varphi)$.故由 W,R 的任意性可知:

$$\tau^{(k)}(\varphi)=\frac{1}{|K_w|}\sum_{K_{W,R}\in K_W}\tau_{W,R}(\varphi)=\frac{1}{|K_w|}\sum_{K_{W,R}\in K_W}\tau(\varphi)=\tau(\varphi).$$ □

需要注意的是,当我们用公式(11)及公式(12)求模态公式的k-全局真度时,计算过程是比较复杂的.而一致性定理则保证了对于那些不含模态词的公式,其 k-全局真度可以转化为一般 n-值命题逻辑中的真度,从而可以用公式(7)求解,这将大大简化计算过程.

由命题 7 与命题 9 易证下面的结论成立:

命题 10. 设$\varphi,\psi\in F(\Phi)$,则$\forall k=1,2,\dots$,均有:

(i) $0\leqslant\tau^{(k)}(\varphi)\leqslant1$;

(ii) $\tau^{(k)}(\neg\varphi)+\tau^{(k)}(\varphi)=1$;

(iii) $\tau^{(k)}(\varphi\vee\psi)+\tau^{(k)}(\varphi\wedge\psi)=\tau^{(k)}(\varphi)+\tau^{(k)}(\psi)$.

(iv) 若$\varphi\approx\psi$,则$\tau^{(k)}(\varphi)=\tau^{(k)}(\psi)$;

(v) φ是永真公式当且仅当$\tau^{(k)}(\varphi)=1$;

(vi) 若φ是 n-型有效公式,则$\tau^{(k)}(\varphi)=1$.

4 模态公式的真度在时态逻辑中的应用

时态逻辑是模态逻辑的一种特殊形式[19,21].在时态逻辑中,模态词$\Diamond$与$\Box$有了明确的含义,即:

- $\Diamond p$ 表示"在将来某个时刻 p 为真";
- $\Box p$ 表示"在将来的每个时刻 p 都为真".

本文只考虑离散的有限时间系统,并用有限可能世界集表示时间.由前文分析知,我们可以对两个势相同的的可能世界集不加区分,特别是对于有限模型,如果$|W|=k$,则可取 $W=W_k=\{1,2,\dots,k\}$为标准论域.因此在本节中,我们用 $W_k=\{1,2,\dots,k\}$来表示时间.此时,由模态词$\Diamond$与$\Box$的含义可以看出,如果 k 越大,则$\Diamond p$ 成立的可能性越大,而$\Box p$ 成立的可能性越小.比如,用 p 表示"天气很冷",如果 W_k 中以天为计算单位,则当 k 限制为 5 时$\Box p$ 成立的可能性很大;但若将 k 限制为 50 时,$\Box p$ 成立的可能性明显减小.值得一提的是,本文引入的模态公式的真度概念恰好反映了时态逻辑的上述特点.

事实上,我们取赋值域为 $F_2=\{0,1\}$,则在时态逻辑中,对于某个 2-值模态模型 $K=(W_k,R,e,\{0,1\})$,关系 R 是明确的,即

$$R(w,u)=\begin{cases}1, & w<u\\ 0, & w\geqslant u\end{cases} \tag{13}$$

其中,$w,u\in\{1,2,...,k\}$,则此时有如下结论:

命题 11. 设 $K_{W,R}=\{K=(W,R,e,F_n)|e:W\times\Phi\to\{0,1\}\}$是$\langle W,R\rangle_2$-型框架,其中,$W=W_k=\{1,2,...,k\}$,关系 $R:W\times W\to\{0,1\}$按公式(13)定义,$p\in\Phi$,则:

(i) $\tau_{W,R}(\Box p)$的值随 k 的增大而减小,且

$$\lim_{k\to\infty}\tau_{W,R}(\Box p)=0.$$

(ii) $\tau_{W,R}(\Diamond p)$的值随 k 的增大而增大,且

$$\lim_{k\to\infty}\tau_{W,R}(\Diamond p)=1.$$

证明:只证明结论(i),结论(ii)类似可证.取 $m=1$,则$\forall i\in W=\{1,2,...,k\}$, $\overline{(\Box p)}_i:\{0,1\}^k\to\{0,1\}$为

$$\overline{(\Box p)}_i(x_1,x_2,...,x_k)=\bigwedge_{j=i+1}^{k}(\overline{p})_j(x_1,x_2,...,x_k)=x_{i+1}\wedge x_{i+2}\wedge x_k.$$

故$|\overline{(\Box p)}_i^{-1}(1)|=2^i$,从而 $\tau_i(\Box p)=\frac{1}{2^k}\cdot|\overline{(\Box p)}_i^{-1}(1)|=\frac{1}{2^{k-1}}$.因此,

$$\tau_{W,R}(\Box p)=\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\tau_w(\Box p)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\tau_i(\Box p)=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-2}}+...+\frac{1}{2}+1\right)\to 0(k\to\infty).\qquad\Box$$

可以看到,命题 11 精确地反映了前文对时态逻辑中命题成立的可能性分析.

5 结束语

本文首先以 $F_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},...,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$为赋值域,定义了多值模态逻辑的 n-值模态模型的概念,并构建了相应的语义理论,同时指出,这种语义是经典模态逻辑语义的推广;其次,在固定可能世界集W与二元关系R而让赋值映射 e 自由变动的情况下,定义了$\langle W,R\rangle_n$-型框架的概念,并在该框架下用归纳的方法构建了由模态公式诱导的关于某个可能世界$w\in W$的局部化映射,从而给出公式关于w的局部化真度,并指出任意模态公式的局部化真度值与可能世界集的势无关,且证明了任意模态公式的局部化真度都可以转化为另一个不含模态词的公式在同一可能世界处的局部化真度.在局部化真度的基础上,本文定义了模态公式关于$\langle W,R\rangle_n$-型框架的真度与 k-全局真度,讨论了 k-全局真度的若干性质,并证明了一致性定理.即当某模态公式不含模态词时,其 k-全局真度与其在一般命题逻辑中的真度一致;最后,本文将所建立的真度理论应用于时态逻辑中,指出本文定义的公式真度较好地反映了时态逻辑的语义特点.关于模态公式的局部化真度以及全局真度如何诱导公式集 $F(\Phi)$上的伪距离ρ,使得$(F(\Phi),\rho)$构成逻辑度量空间的问题,我们将于另文中讨论.

References:

[1] Blackburn P, Rijke M, Venema Y. Modal Logic. New York: Cambridge University Press, 2001. 1−50.

[2] Cresswell MJ, Hughes GE. A New Introduction to Modal Logic. London: Routledge, 1996. 19−46.

[3] Wang GJ. Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. 2nd ed., Beijing: Science Press, 2008. 224−240 (in Chinese).

[4] Bergmann M. An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic: Semantics, Algebras, and Derivation Systems. New York: Cambridge University Press, 2008. 71−96.

[5] Dudois D, Prade H, Klement EP. Fuzzy Sets, Logics and Reasoning about Knowledge. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 7−17.

[6] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1998. 27−56.

[7] Hájek P. On fuzzy modal logics S_5(C). Fuzzy Sets and Systems, 2010,161:2389−2396. [doi: 10.1016/j.fss.2009.11.011]

[8] Nossum R. A decidable multi-modal logic of context. Journal of Applied Logic, 2003,1:119−133. [doi: 10.1016/S1570-8683(03)00007-7]

[9] Goldblatt R. Mathematical modal logic: A view of its evolution. Journal of Applied Logic, 2003,1:309−392. [doi: 10.1016/S1570-8683(03)00008-9]

[10] Mironov AM. Fuzzy modal logics. Journal of Mathematical Sciences, 2005,128(6):3461−3483. [doi: 10.1007/s10958-005-0281-1]

[11] Radzikowska AM, Kerre EE. Characterization of main classes of fuzzy relations using fuzzy modal operators. Fuzzy Sets and Systems, 2005,152:223−247. [doi: 10.1016/j.fss.2004.09.005]

[12] Bou F, Esteva F, Godo L. Modal systems based on many-valued logics. In: Proc. of the EUSFLAT, Vol.1. 2007. 177−182.

[13] Bou F, Esteva F, Godo L. Exploring a syntactic notion of modal many-valued logics. Mathware & Soft Computing, 2008,15: 175−181.

[14] Chen TY, Wang DG. The semantics of fuzzy modal propositional logic. Journal of Liaoning Normal University (Natural Science Edition), 2003,26(4):341−343 (in Chinese with English abstract).

[15] Wang DG, Gu YD, Li HX. Generalized tautology in fuzzy modal propositional logic. Acta Electronica Sinica, 2007,35(2):261−264 (in Chinese with English abstract).

[16] Huynh VN, Nakamori Y, Ho TB, Resconi G. A context model for fuzzy concept analysis based upon modal logic. Information Sciences, 2004,160:111−129. [doi: 10.1016/j.ins.2003.08.010]

[17] Morikawa O. An extended Gentzen-type formulation of a many-valued modal propositional logic based on Zadeh's similarity relation. Fuzzy Sets and Systems, 1999,101:115−123. [doi: 10.1016/S0165-0114(97)00044-4]

[18] Shi HX, Wang GJ. Lattice-Valued modal propositional logic and its completeness. Science China: Information Sciences, 2010, 53(11):2230−2239. [doi: 10.1007/s11432-010-4098-2]

[19] Kröger F, Merz S. Temporal Logic and State Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 19−63.

[20] Prior AN. Past, Present, and Future. Oxford: Oxford University Press, 1967. 1−32.

[21] Ohrstrom P, Hasle P. Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1995.

[22] Manna Z, Pnueli A. Temporal Verification of Reactive Systems. New York: Springer-Verlag, 1995. 42−54.

[23] Manna Z, Pnueli A. The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification. New York: Springer-Verlag, 1992.

[24] Baier C, Katoen JP. Principles of Model Checking. London: The MIT Press, 2008. 229−252.

[25] Clarke EM, Grumberg O, Peled DA. Model Checking. London: The MIT Press, 2000. 128−153.

[26] Huth M, Ryan M. Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems. 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 175−186.

[27] Sebastiani R, Tonetta S, Vardi MY. Symbolic systems, explicit properties: On hybrid approaches for LTL symbolic model checking. Int'l Journal of Softw Tools Technol Transfer, 2011,13:319−335. [doi: 10.1007/s10009-010-0168-4]

[28] 王国俊,傅丽,宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论.中国科学(A 辑),2001,31(11):998−1008.

[29] 王国俊,李璧镜.Łukasiwicz *n* 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理.中国科学(E 辑:信息科学),2005,35(6):561−569.

[30] Li J, Wang GJ. Theory of α-truth degrees in n-valued Gödel propositional logic. Journal of Software, 2007,18(1):33−39 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/33.htm [doi: 10.1360/jos180033]

[31] 李骏,王国俊.逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论.中国科学(E 辑:信息科学),2006,36(6):631−643.

[32] Pei DW. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL. Fuzzy Sets and Systems, 2003,138:187−195. [doi: S0165-0114(02)00382-2]

[33] Wang GJ. A universal theory of measure and integral on valuation spaces with respect to diverse implication operators. Science in China (Series E), 2000,43(6):586−594.

[34] Wang GJ, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 2003,136:71−91. [doi: S0165-0114(02)00328-7]

[35] Wang GJ, Zhou HJ. Quantitative logic. Information Sciences, 2009,179:226−247. [doi: 10.1016/j.ins.2008.09.008]

[36] Wang GJ, Zhou HJ. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. Beijing: Science Press; Oxford: Alpha Science International Limited, 2009.

[37] Wang GJ, Duan QL. Theory of (n) truth degrees of formulas in modal logic and a consistency theorem. Science in China (Series F): Information Sciences, 2009,52(1):70−83.

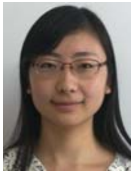
附中文参考文献:

[3] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.第 2 版,北京:科学出版社,2008.

[14] 陈图云,汪德刚.模糊模态命题逻辑的语义.辽宁师范大学学报(自然科学版),2003,26(4):341−343.

[15] 汪德刚,谷云东,李洪兴.模糊模态命题逻辑及其广义重言式.电子学报,2007,35(2):261−264.

[30] 李骏,王国俊.Gödel n-值命题逻辑中命题的α-真度理论.软件学报,2007,18(1):33−39. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/33.htm



时慧娴(1985－),女,甘肃兰州人,博士生,CCF学生会员,主要研究领域为不确定性推理,模态逻辑.

王国俊(1935－),男,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究领域为不确定性推理,计量逻辑学.