

推广 Dirichlet 方法用于 B 样条极小曲面设计*

吴花精灵^{1,2}, 王国瑾^{1,2+}

¹(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

²(浙江大学 数学系 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

Extending Dirichlet Approach to Design B Spline Surface of Minimal Area

WU Hua-Jing-Ling^{1,2}, WANG Guo-Jin^{1,2+}

¹(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

²(Institute of Computer Images and Graphics, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: E-mail: wanggj@zju.edu.cn

Wu HJL, Wang GJ. Extending dirichlet approach to design B spline surface of minimal area. *Journal of Software*, 2011, 22(12): 3015-3022. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4009.htm>

Abstract: The current NURBS system is unable to design a B-spline minimal surface effectively which is required for engineering. This paper extends the Dirichlet approach, constructing Bézier minimal surface to the design of B-spline minimal surfaces successfully. The study also proposes a model of B-spline surface which interpolates its control net at the boundary, applying the derivative formulae and cutting-angle evaluation algorithms of B-spline basis. This approach transforms the problem of computing internal control points of the minimal surface to solving a system of linear equations, avoiding the bewilderment brought by a strong nonlinear problem and advancing operational efficiency greatly. Finally, with a large number of examples, the theory and algorithms are verified.

Key words: computer aided design; Dirichlet approach; B spline surface; surface of minimal area

摘要: 为弥补当前 NURBS 系统无法有效设计工程所急需的 B 样条极小曲面的缺陷,将构造 Bézier 极小曲面的 Dirichlet 方法成功地推广到了 B 样条极小曲面设计.提出了插值控制网格边界的 B 样条曲面模型,运用 B 样条基函数的求导公式及求值割角算法,将计算极小曲面内部控制顶点的问题转化为一个线性方程组的求解,从而避免了强非线性问题所导致的困惑,极大地提高了运算效率.最后,用大量实例对理论和算法进行了验证.

关键词: 计算机辅助设计; Dirichlet 方法; B 样条曲面; 极小曲面

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

给定空间一条可求长(可测)的 Jordan 闭曲线(无重点的连续闭曲线),寻找以此闭曲线为边界的曲面,使得该曲面在所有具有相同边界的曲面中,其面积达到最小,这一问题称为极小曲面问题.由于比利时盲人物理学家 Plateau 对此的研究贡献,人们习惯上也把它叫做 Plateau 问题^[1].这是微分几何领域中的一个经典难题.

对这个问题的研究最早可追溯到 17 世纪.从那时开始历经 3 个多世纪,该研究在拓扑学和微分几何学中有

* 基金项目: 国家自然科学基金(61070065, 60933007)

收稿时间: 2009-09-16; 定稿时间: 2011-03-07

了许多成果,并在现实世界得到了实际应用^[2].极小曲面被广泛应用于建筑与飞机轮船制造业,在结构化学、材料科学、动植物建模等领域也被应用到各种模型.特别地,极小曲面在现代索膜结构体系中占有非常重要的地位,该体系起源于远古时代人类居住的帐篷,而现代索膜结构沿用并发展了其构筑模式^[2].

虽然极小曲面的研究集中在微分几何、偏微分方程等学科,但随着计算机图形对于真实性、实时性和交互性要求的日益增强,几何设计对象向着多样性、特殊性和拓扑结构复杂性靠拢的趋势日益明显,图形工业和制造工业迈向一体化、信息化和网络化步伐的日益加快,计算机辅助几何设计(CAGD)在近年来得到了发展,许多学者转向研究 CAGD 领域的极小曲面.Farin 和 Hansford^[3]针对曲面控制顶点提出了基于离散 Laplacian 算子的有关网格生成法;Monterde 深入研究了 Dirichlet 能量函数^[4],提出了与曲面相应的网格生成法,并与其他网格生成法进行了细致比较^[5].与此同时,国内也开展了温参数极小曲面^[6]与有理 Bézier 极小曲面等^[2]的研究.

尽管极小曲面设计在 CAGD 领域已取得一些成果,但从总体上来说,其研究范围偏窄,与工程需要尚不适应.特别是由于一般 B 样条曲线曲面对于控制网格边界的非插值性,B 样条基及其乘积积分的特殊复杂性,B 样条极小曲面的数学模型尚未建立.这无疑是现行 NURBS 系统的一个严重缺陷.因此,从理论表示及实际算法上将 Dirichlet 方法推广到 B 样条是十分必要的.

本文给出了 Dirichlet 方法^[4]的推广算法,应用于 B 样条极小曲面设计.该算法应用的有效作用是:首次在 CAGD 领域给出 B 样条极小曲面的有效设计,使原本不可能进行的工作变成可行,把这一工作的必要性变成了现实性.Dirichlet 方法是将曲面面积函数近似转化为 Dirichlet 能量函数,从而得到极小曲面有效逼近的一种方法.该方法的重大优势是将计算面积函数极小这个强非线性问题近似转化为线性问题,从而在一定精度的保证之下减少计算量.本文基于构造插值控制网格边界的 B 样条曲面及设计 B 样条乘积积分等算法,将 Dirichlet 方法成功地推广到 B 样条极小曲面,并通过大量实例进行验证,显示了算法的正确性与有效性.

1 B 样条极小曲面的问题描述

记 $\{P_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ 为一张 B 样条曲面的控制顶点网,以 u,v 为参数,以 k,h 为阶数的 B 样条曲面可以表示为

$$x(u,v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,k}(u)N_{j,h}(v)P_{ij}, u_k \leq u \leq u_{n+1}, v_h \leq v \leq v_{m+1}, k \leq n, h \leq m.$$

这里, $\{u_i\}, \{v_j\}$ 为节点向量.

B 样条极小曲面问题可以描述为:已知控制顶点网 $\{P_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ 的 4 条边界的信息 $\{P_{1j}\}_{j=1}^m, \{P_{nj}\}_{j=1}^m, \{P_{i1}\}_{i=1}^n, \{P_{im}\}_{i=1}^n$ 、两个参数方向的节点向量 $\{u_i\}_{i=2}^{n+k-1}, \{v_j\}_{j=2}^{m+h-1}$ 和 B 样条的相应阶数 k,h ,求其余的内部控制顶点 $\{P_{ij}\}_{i=2,j=2}^{n-1,m-1}$,使得 $x(u,v)$ 在所有拥有相同边界控制顶点、相同节点向量和相同阶数的 B 样条曲面中面积达到最小.

2 B 样条极小曲面设计的 Dirichlet 方法

由于从 4 条边生成的曲面必须以这 4 条边为边界,所以运用的 B 样条需要满足端点插值,即需要采用在两个区间端点分别取 $k-1, h-1$ 重节点向量的 k 阶与 h 阶 B 样条;又由于生成的极小曲面需要保证 C^2 连续,同时为了计算和讨论问题较为简洁,本文使用的 B 样条的节点向量在除区间端点以外的中间节点均取为重节点,特别是中间节点取为均匀分割的形式(准均匀节点向量).不过对于一般形式的节点向量,结果也是类似的,只是在每次 B 样条的相关运算时需判断系数的分母是否为 0;而且由于曲面 C^2 连续的限制,所取的区间中间节点至多为 $k-3$ 重.

有鉴于此,节点向量 $\{u_i\}$ 需取为 $u_2=u_3=\dots=u_k < u_{k+1} < \dots < u_{n+1}=u_{n+2}=\dots=u_{n+k-1}, \{v_j\}$ 需取为 $v_2=v_3=\dots=v_h < v_{h+1} < \dots < v_{m+1}=v_{m+2}=\dots=v_{m+h-1}$.特别地,当 $k < n$ 时,可取 $u_{k+i} = \frac{i}{n-k+1}, i=1,2,\dots,n-k$;当 $h < m$ 时,可取 $u_{h+j} = \frac{j}{m-h+1}, j=1,2,\dots,m-h$,即准均匀节点向量.

记 $x(u,v)$ 的面积为 $A(x)$,由微分几何可知,

$$A(\mathbf{x}) = \iint_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv = \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} \, dudv.$$

这里, $R=[u_i, u_{n+1}] \times [v_h, v_{m+1}]$, E, F, G 是 \mathbf{x} 的第一基本形式的系数.

由于 B 样条基函数是无法用一步显式来表示与计算的多项式函数, 以及 $A(\mathbf{x})$ 表达式的复杂性, 直接求 $A(\mathbf{x})$ 的极小值是一个复杂的强非线性问题, 所以需要考虑其他方法. Monterde^[4] 深入地研究了 Dirichlet 能量函数, 并用其解决了 Bézier 极小曲面造型的问题. 我们尝试在构造 B 样条极小曲面时运用类似的方法, 即考虑由式(1)定义的关于曲面的 Dirichlet 能量函数来代替面积函数.

$$D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \iint_R (\|\mathbf{x}_u\|^2 + \|\mathbf{x}_v\|^2) \, dudv = \frac{1}{2} \iint_R (E(u, v) + G(u, v)) \, dudv \tag{1}$$

这个函数曾被 Douglas 用于解决 Plateau 问题, 因为 Dirichlet 函数提供了曲面面积函数的一个上界, 即

$$(EG - F^2)^{1/2} \leq (EG)^{1/2} \leq \frac{E + G}{2}.$$

所以对于任意控制顶点网 $\{P_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, m}$, 均有 $A(\mathbf{x}) \leq D(\mathbf{x})$, 该不等式成立当且仅当 $E=G$ 和 $F=0$ 同时满足, 当且仅当该曲面为等温正则参数曲面.

需要指出的是, Dirichlet 能量函数 $D(\mathbf{x})$ 依赖于曲面的参数化形式; 而面积函数 $A(\mathbf{x})$ 不依赖于曲面的参数化形式, 它是曲面的内蕴几何量. 因此, 前者只能作为后者的一个近似度量.

然而, 以上两种函数都对应于一个 B 样条极小曲面, 因为它们都定义在 $\mathbb{R}^{3(n-2)(m-2)}$ 上, 两个函数的值都依赖于 $(n-2) \times (m-2)$ 个内部控制顶点, 且每个内部控制顶点都有 3 个坐标.

由于这两个函数都是正函数的积分, 均非负, 因而可把它们都限制在一个紧集里. 根据微积分学的一个经典结论可知, 它们的极小值均存在且可被取到.

类似于 Monterde^[4] 处理 Bézier 极小曲面造型时所用的方法, 本文也使用 Dirichlet 能量函数的梯度值为 0 的条件来近似判断 Dirichlet 能量函数在何处取到极小值, 由此可将“求控制顶点网 $\{P_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ 使 Dirichlet 能量函数达到极值”的问题转化为关于控制顶点的一个线性方程组求解.

记 $P_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2, x_{ij}^3)$, 由于 $E(u, v) = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u)$, $G(u, v) = (\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v)$, 所以,

$$\frac{\partial E(u, v)}{\partial x_{ij}^a} = 2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_u}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{x}_u \right\rangle, \quad \frac{\partial G(u, v)}{\partial x_{ij}^a} = 2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_v}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{x}_v \right\rangle.$$

因此, Dirichlet 能量函数(1)的梯度为 0, 即

$$\frac{\partial D(\mathbf{x})}{\partial x_{ij}^a} = \iint_R \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_u}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{x}_u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_v}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{x}_v \right\rangle \right) \, dudv = 0 \tag{2}$$

其中, $a=1, 2, 3, i=2, 3, \dots, n-1, j=2, 3, \dots, m-1$.

我们将应用 B 样条基函数的求导公式:

$$\frac{d}{dt} N_{i,k}(t) = \frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

在这个式子中, 若某项系数的分母为 0, 则整项取为 0. 例如, 当 $t_{i+k-1} - t_i = 0$, 则取 $\frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) = 0$. 从上式可以计算出:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_u}{\partial x_{ij}^a} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial x_{ij}^a} = \frac{d}{du} N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) e^a = (k-1) \left(\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1} - u_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k} - u_{i+1}} \right) N_{j,h}(v) e^a.$$

这里, e^a 是三维基本单位向量, 即 $e^1=(1,0,0), e^2=(0,1,0), e^3=(0,0,1)$.

由于

$$\mathbf{x}_u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{d}{du} N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) P_{ij},$$

可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(u,v)}{\partial x_{ij}^a} &= 2 \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m \frac{d}{du} N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) \frac{d}{du} N_{s,k}(u) N_{t,h}(v) x_{st}^a \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m 2(k-1)^2 \left(\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_{i+1}} \right) \left(\frac{N_{s,k-1}(u)}{u_{s+k-1}-u_s} - \frac{N_{s+1,k-1}(u)}{u_{s+k}-u_{s+1}} \right) N_{j,h}(v) N_{t,h}(v) x_{st}^a. \end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(u,v)}{\partial x_{ij}^a} &= 2 \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m N_{i,k}(u) \frac{d}{dv} N_{j,h}(v) N_{s,k}(u) \frac{d}{dv} N_{t,h}(v) x_{st}^a \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m 2(h-1)^2 N_{i,k}(u) N_{s,k}(u) \left(\frac{N_{j,h-1}(v)}{v_{j+h-1}-v_j} - \frac{N_{j+1,h-1}(v)}{v_{j+h}-v_{j+1}} \right) \left(\frac{N_{t,h-1}(v)}{v_{t+h-1}-v_t} - \frac{N_{t+1,h-1}(v)}{v_{t+h}-v_{t+1}} \right) x_{st}^a. \end{aligned}$$

因此,由公式(1)可知,Dirichlet 能量函数的梯度表达式为

$$\frac{\partial D(\mathbf{x})}{\partial x_{ij}^a} = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m M_{st}^{ij} x_{st}^a.$$

这里,

$$\begin{aligned} M_{st}^{ij} &= \int_{u_h}^{u_{m+1}} \int_{v_k}^{v_{n+1}} \left[(k-1)^2 \left(\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_{i+1}} \right) \left(\frac{N_{s,k-1}(u)}{u_{s+k-1}-u_s} - \frac{N_{s+1,k-1}(u)}{u_{s+k}-u_{s+1}} \right) N_{j,h}(v) N_{t,h}(v) + \right. \\ &\quad \left. (h-1)^2 N_{i,k}(u) N_{s,k}(u) \left(\frac{N_{j,h-1}(v)}{v_{j+h-1}-v_j} - \frac{N_{j+1,h-1}(v)}{v_{j+h}-v_{j+1}} \right) \left(\frac{N_{t,h-1}(v)}{v_{t+h-1}-v_t} - \frac{N_{t+1,h-1}(v)}{v_{t+h}-v_{t+1}} \right) \right] dudv, \end{aligned}$$

其中, $a=1,2,3,i=2,3,\dots,n-1,j=2,3,\dots,m-1$.从而,公式(2)可以简记为

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m M_{st}^{ij} P_{st} = 0, i = 2, 3, \dots, n-1, j = 2, 3, \dots, m-1 \tag{3}$$

这个线性方程组的方程个数为 $(n-2) \times (m-2)$,未知控制顶点数也是 $(n-2) \times (m-2)$ 个,从中即可求出曲面的内部控制顶点.

所以,这个算法的关键是求 M_{st}^{ij} . 从 M_{st}^{ij} 的表达式中可以看出,计算 M_{st}^{ij} 的关键是计算 $\int_{u_h}^{u_{m+1}} N_{i,k}(u) N_{s,k}(u) du$

这类积分.与 Bézier 基函数可以直接精确快速积分不同, $N_{i,k}(u)$ 虽然是 $k-1$ 阶多项式,但其没有简单的显式表达式,所以对于 $N_{i,k}(u)$ 的精确积分是非常困难的,而且由于 B 样条基函数的二重乘积 $N_{i,k}(u)N_{s,k}(u)$ 不能像 Bézier 基函数二重乘积一样直接转化为一个更高阶的 B 样条基函数,一个方案是使用 Mørken^[8]方法将 B 样条基函数的乘积转化为一组 B 样条基函数的线性组合,但由于这种方法在实际应用中计算量过大,导致计算速度极其缓慢、效率过低.因此,本文在计算这类双重乘积的积分时用了数值积分中的复化柯特斯公式,因为柯特斯公式有 5 次代数精度,而由于一般曲面造型都是用双三次曲面或者双四次曲面,所以用这种数值积分方法可以达到很高的精确度.

需要指出的是,在这个算法中需要计算 B 样条基函数很多次,而 B 样条基函数是递归定义的,如果直接按定义进行计算,计算量非常大.所以我们借鉴于 B 样条曲线求值的割角算法,提出如下的 B 样条基函数求值算法,以提高计算速度.

B 样条基函数求值算法. 若 $t \in [t_j, t_{j+1}], k \leq j \leq n$,那么 $N_{i,k}(t) = p_j^{[k-1]}(t)$.这里,

$$\begin{aligned} p_s^{[0]}(t) &= \begin{cases} 1, & s = i \\ 0, & s = j - k + 1, j - k + 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, j \end{cases} \\ p_s^{[r]}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i} p_i^{[r-1]}(t) + \frac{t_{i+k-r} - t}{t_{i+k-r} - t_i} p_{i-1}^{[r-1]}(t), r = 1, 2, \dots, k-1, i = j - k + r + 1, j - k + r + 2, \dots, j. \end{aligned}$$

运用这种方法,我们快速、有效地计算出 M_{st}^{ij} ,然后将方程组(3)改写为

$$\sum_{s=2}^{n-1} \sum_{t=2}^{m-1} M_{st}^{ij} P_{st} = - \left(\sum_{t=1}^m (M_{1t}^{ij} P_{1t} + M_{nt}^{ij} P_{nt}) + \sum_{s=2}^{n-1} (M_{s1}^{ij} P_{s1} + M_{sm}^{ij} P_{sm}) \right), i = 2, 3, \dots, n-1, j = 2, 3, \dots, m-1.$$

这个方程组的右边项都只包含边界控制顶点,而系数矩阵是一个 $(n-2) \times (m-2)$ 的方阵,可以从中解出 $(n-2) \times (m-2)$ 个内部控制顶点,进行有效的近似极小曲面造型.

必须注意,由于 M_{st}^{ij} 仅与 k, h 以及 u, v 两个方向上的节点向量有关,若限定这些变量,例如使用区间为 $[0, 1]$ 的均匀节点向量,取 $k=h=4$,则本方法适用于使用范围最广的双三次曲面, M_{st}^{ij} 是可以进行预计算的.如此即能大幅度缩短实现算法所用的时间.

3 若干实例

以下实例中均使用区间为 $[0, 1]$ 的均匀节点向量,程序由 Matlab2009a 编写运行.

例 1:给定所求曲面的控制顶点矩阵 $(P_{ij})_{3 \times 3}$:

$$\begin{bmatrix} (-1, -1, 0) & (-1, 0, 1) & (-1, 1, 0) \\ (0, -1, 1) & \text{Unknown} & (0, 1, 1) \\ (1, -1, 0) & (1, 0, 1) & (1, 1, 0) \end{bmatrix}.$$

此时, $k=h=n=m=3$, B 样条曲面为控制顶点个数为 3×3 的一张双二次曲面.其中,需要求的内部控制顶点只有一个 P_{22} ,所以公式(1)只包含一个式子.由程序可以计算出未知的内部控制顶点为 $P_{22}=(0, 0, -0.5)$,从而可以画出所求的均匀 B 样条曲面,如图 1 所示.曲面面积为 4.201,曲面平均曲率绝对值的最大值为 1.698,平均值为 0.782.

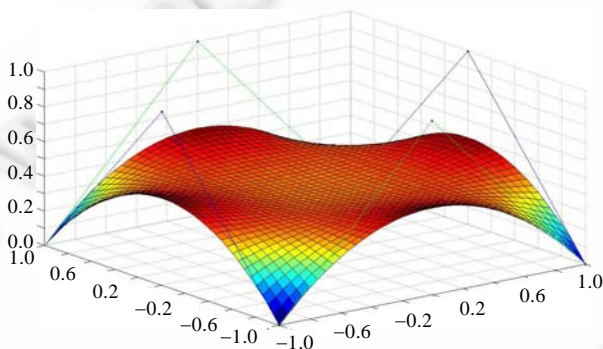


Fig.1 A biquadratic B spline surface of minimal area which has an unknown control point

图 1 只含一个内部控制顶点的双二次 B 样条极小曲面

例 2:给定所求曲面的控制顶点矩阵 $(P_{ij})_{4 \times 4}$:

$$\begin{bmatrix} (-1, -1, 0) & (-1, -0.5, 0.5) & (-1, 0.5, 0.5) & (-1, 1, 0) \\ (-0.5, -1, 0.5) & \text{Unknown} & \text{Unknown} & (-0.5, 1, 0.5) \\ (0.5, -1, 0.5) & \text{Unknown} & \text{Unknown} & (0.5, 1, 0.5) \\ (1, -1, 0) & (1, -0.5, 0.5) & (1, 0.5, 0.5) & (1, 1, 0) \end{bmatrix}.$$

用双二次均匀 B 样条曲面进行造型设计,即 $k=h=3, n=m=4$,控制顶点个数为 4×4 .其中,需求的内部控制顶点有 4 个,所以公式(1)包含 4 个式子,可以计算出这 4 个内部控制顶点为

$$P_{22}=(-0.5, -0.5, 0.375), P_{23}=(-0.5, 0.5, 0.375), \\ P_{32}=(0.5, -0.5, 0.375), P_{33}=(0.5, 0.5, 0.375).$$

求出的 B 样条极小曲面如图 2 所示.曲面面积为 4.201,曲面平均曲率绝对值的最大值为 6,平均值为 1.408.

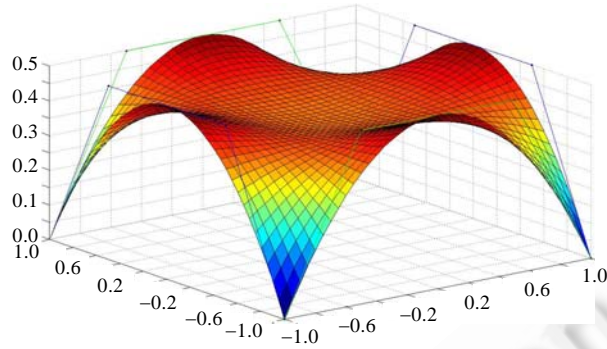


Fig.2 A biquadratic B spline surface of minimal area which has four unknown control points

图 2 含 4 个内部控制顶点的双二次 B 样条极小曲面

例 3:同样运用例 2 中的控制顶点矩阵,在本例中进行双三次均匀 B 样条曲面造型设计,即 $k=h=n=m=4$.与上例一样,B 样条曲面的控制顶点个数为 4×4 .其中,需要求的内部控制顶点有 4 个,可计算得到:

$$P_{22}=(-0.2756,-0.2756,0.1667), P_{23}=(-0.2756,0.2756,0.1667),$$

$$P_{32}=(0.2756,-0.2756,0.1667), P_{33}=(0.2756,0.2756,0.1667).$$

求出的 B 样条极小曲面如图 3 所示,其面积为 4.108,曲面平均曲率绝对值的最大值为 1.100,平均值为 0.524.

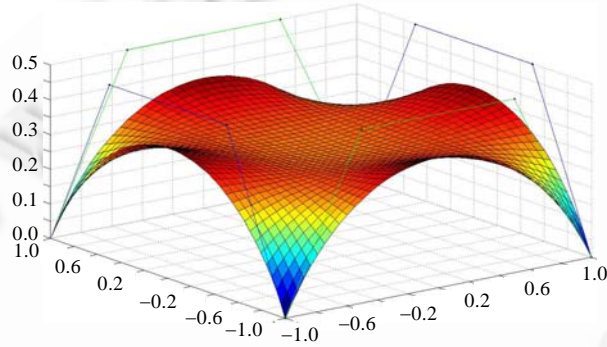


Fig.3 A bicubic B spline surface of minimal area which has four unknown control points

图 3 含 4 个内部控制顶点的双三次 B 样条极小曲面

例 4:本例展示 $n \neq m$ 时的双三次 B 样条极小曲面造型结果.给定所求曲面的控制顶点矩阵 $(P_{ij})_{4 \times 5}$:

$$\begin{bmatrix} (-1,-1,0) & (-1,-3/7,2/7) & (-1,0,1) & (-1,3/7,2/7) & (-1,1,0) \\ (-3/7,-1,2/7) & \text{Unknown} & \text{Unknown} & \text{Unknown} & (-3/7,1,2/7) \\ (3/7,-1,2/7) & \text{Unknown} & \text{Unknown} & \text{Unknown} & (3/7,1,2/7) \\ (1,-1,0) & (1,-3/7,2/7) & (1,0,1) & (1,3/7,2/7) & (1,1,0) \end{bmatrix}$$

本例中, $k=h=4,n=4,m=5$,B 样条曲面的控制顶点个数为 4×5 .其中,需要求的内部控制顶点有 6 个,所以公式 (1)包含 6 个式子,由程序可以计算出:

$$P_{22}=(-0.3372,-0.7491,0.2341), P_{23}=(-0.3481,0,0.1922), P_{24}=(-0.3372,0.7491,0.2341),$$

$$P_{32}=(0.3372,-0.7491,0.2341), P_{33}=(0.3481,0,0.1922), P_{34}=(0.3372,0.7491,0.2341).$$

求出的 B 样条极小曲面如图 4 所示,曲面面积为 4.294,曲面平均曲率绝对值的最大值为 5.960,平均值为 1.613.

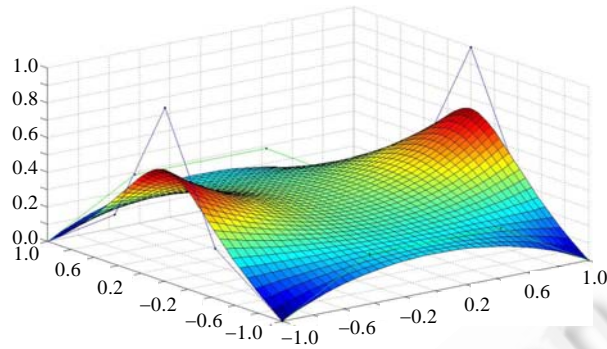


Fig.4 A bicubic B spline surface of minimal area which has six unknown control points

图 4 含 6 个内部控制顶点的双三次 B 样条极小曲面

以上 4 个实例表明,运用 Dirichlet 方法所得到的近似 B 样条极小曲面效果较好,而且通过例 2 和例 3 的对比可以看出,运用双三次 B 样条方法的效果远好于用双二次 B 样条方法的效果.

4 总 结

本文成功地将 Dirichlet 方法推广到 B 样条极小曲面造型设计,通过实例验证了算法的有效性和可行性,而且在实用性最为广泛的双三次 B 样条曲面造型上取得了极好的效果.需要指出的是,虽然用 Dirichlet 方法进行近似 B 样条极小曲面设计快速有效,但其本质上只是一种近似方法,离准确的极小曲面还存在一定的距离.如何求解更准确极小曲面造型方法,是今后仍需要研究的方向.

致谢 我们向对本文的工作给予支持和建议的同行表示感谢.

References:

- [1] Monterde J. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. *Computer Aided Geometric Design*, 2004,21(2):117–136. [doi: 10.1016/j.cagd.2003.07.009]
- [2] Chen X. Design of rational Bézier minimal surface: An extension of Dirichlet approach [MS. Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2006 (in Chinese with English abstract).
- [3] Farin G, Hansford D. Discrete coons patches. *Computer Aided Geometric Design*, 1999,16(7):691–700. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8396(99)00031-X]
- [4] Monterde J. The plateau-Bézier problem. In: *Proc. of the X Conf. on Mathematics of Surfaces*. LNCS 2768, Leeds, Berlin/New York: Springer-Verlag, 2003. 262–273.
- [5] Monterde J, Ugail H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2004,21(7):697–715. [doi: 10.1016/j.cagd.2004.07.003]
- [6] Man JJ, Wang GZ. Approximating to non parameterized minimal surface with B-spline surface. *Journal of Software*, 2003,14(4): 824–829 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/824.htm>
- [7] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. *Computer Aided Geometric Design*. Beijing: China Higher Education Press; Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 2001 (in Chinese).
- [8] Mørken K. Some identities for products and degree raising of splines. *Constructive Approximation*, 1991,7(2):195–208. [doi: 10.1007/BF01888153]
- [9] Cosin C, Monterde J. Bézier surfaces of minimal area. In: *Proc. of the ICCS 2002*. LNCS 2330, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 2002. 72–81.

- [10] Monterde J, Ugail H. A general 4th-order PDE method to generate Bézier surfaces from the boundary. Computer Aided Geometric Design, 2006,23(2):208–225. [doi: 10.1016/j.cagd.2005.09.001]

附中文参考文献:

- [2] 陈笑.有理 Bézier 极小曲面设计:Dirichlet 方法的推广[硕士学位论文].杭州:浙江大学,2006.
 [6] 满家巨,汪国昭.B-样条函数极小曲面造型.软件学报,2003,14(4):824–829. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/824.htm>
 [7] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高等教育出版社;海德堡,柏林:施普林格出版社,2001.



吴花精灵(1986—),男,浙江嵊州人,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



王国瑾(1944—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,数字几何处理,几何逼近.

首届全国信息安全等级保护技术研讨会 (ICSP 2012)

征文通知

首届全国信息安全等级保护技术研讨会拟于 2012 年 4 月在广西桂林召开。本次会议由公安部网络安全保卫局等部门指导,中科院信息安全共性技术国家工程研究中心主办,公安部第三研究所、中国信息安全测评中心和国家信息技术安全研究中心协办。

征文范围

- 1) 等级保护标准支撑技术:包括基于《信息安全等级保护基本要求》、《信息安全等级保护安全设计技术要求》等标准,研究计算环境安全、网络边界安全、通信安全和安全管理平台等技术、标准验证环境构建技术等。
- 2) 等级保护建设整改技术:包括信任体系模型与构建技术、可信计算技术、针对重要行业关键信息基础设施的专用等级保护支撑性技术和方法。
- 3) 等级保护测评技术:包括标准符合性检验技术、安全基准验证技术、无损检测技术、渗透测试技术、逆向工程剖析技术、源代码安全分析技术等。
- 4) 等级保护的监管技术:包括用于支撑安全监管需求的敏感数据保护技术、安全态势评估技术、安全事件关联分析技术、安全绩效评估技术等。
- 5) 新技术应用环境的等级保护技术:包括云计算、物联网、三网融合、新媒体等新技术新环境下的等级保护支撑性技术,等级保护技术体系在新环境下的应用方法等。
- 6) 其他等级保护相关的安全技术和方法。

重要日期

论文提交截止日期: 2012 年 2 月 10 日

录用通知发出日期: 2012 年 3 月 10 日

会议召开日期: 2012 年 4 月 7 日-8 日

联系方式

联系人: 陈恺, 张玲, 石雅辉

联系电话: 010-82486444, 010-82486299

Email: icsp2011@nercis.ac.cn

官方微博: <http://weibo.com/icsp>