

## 三维几何约束系统的等价性分析\*

黄学良<sup>+</sup>, 王波兴, 陈立平, 黄正东

(华中科技大学 国家 CAD 支撑软件工程技术研究中心, 湖北 武汉 430074)

### Equivalence Analysis of 3D Geometric Constraint Systems

HUANG Xue-Liang<sup>+</sup>, WANG Bo-Xing, CHEN Li-Ping, HUANG Zheng-Dong

(National CAD Support Software Engineering Research Center, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

+ Corresponding author: E-mail: xueliang.huang@gmail.com

Huang XL, Wang BX, Chen LP, Huang ZD. Equivalence analysis of 3D geometric constraint systems. *Journal of Software*, 2011, 22(5): 1106–1120. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3775.htm>

**Abstract:** This paper proposes a 3D geometric constraint solving method, based on equivalence analysis in graph theory, that can handle over-constrained, well-constrained, and under-constrained configurations naturally and efficiently. The basic idea is that there are equivalent geometric constraint systems with different geometric constraint graphs. If the geometric domain knowledge is exploited to transform a geometric constraint system into an equivalent one that has a better geometric constraint graph structure using equivalent constraint substitution, the decomposition of geometric constraint system can be optimized. Therefore, the proposed approach will not depend on the initial geometric constraint graph structure, but on the inherent characteristic of the geometric constraint system. This proposition can usually find the optimal decomposition of the geometric constraint system. Several typical examples have been given to illustrate the correctness and effectiveness of the proposed method.

**Key words:** geometric constraint solving; geometric constraint graph; geometric domain knowledge; equivalence analysis; equivalent constraint substitution

**摘要:** 针对过约束、完整约束和欠约束三维几何约束系统的求解问题,提出了等价性分析方法.该方法基于三维几何约束系统的内在等价性,充分挖掘几何领域知识,依据拆解约束闭环、缩减约束闭环和析出约束闭环等原则,采用等价约束替换来处理几何约束闭环问题,优化几何约束图的结构,实现几何约束系统的优化分解.最后用多个实例验证了该方法的正确性和有效性.

**关键词:** 几何约束求解;几何约束图;几何领域知识;等价性分析;等价约束替换

**中图法分类号:** TP391      **文献标识码:** A

三维几何约束求解技术作为现代 CAD 系统的关键技术之一,广泛应用于产品造型、装配设计、运动仿真、分子建模等诸多领域<sup>[1]</sup>.从对几何约束系统处理的角度,可以将当前的三维几何约束求解方法分为直接求解方法和分解求解方法.直接求解方法将几何约束系统转换为非线性方程系统,然后采用数值方法或符号方法求解非线性方程系统,实现对几何约束系统的求解.由于三维几何约束系统产生的约束方程系统的规模较大、非线

\* 基金项目: 国家自然科学基金(60736019, 50875092, 60704019, 60874064)

收稿时间: 2009-04-07; 修改时间: 2009-07-06; 定稿时间: 2009-10-22

性强,而数值方法依赖于系统的初始构型,求解稳定性差;符号方法求解速度慢,需要消耗大量的计算空间和时间,无法满足实际应用的要求.因此,目前求解三维几何约束系统通常采用基于分而治之思想的分解求解方法.该方法将整个几何约束系统分解为若干个子系统,然后分别对各个子系统进行求解,最后用各个子系统的解组装成整个约束系统的解<sup>[1]</sup>.当前,采用分解思路的几何约束求解方法主要有3种,分别是面向方程的分解方法<sup>[2]</sup>、面向基本构型的分解方法<sup>[3-5]</sup>和面向广义构造序列的分解方法<sup>[6,7]</sup>.这3种分解方法的本质基础均为方程与变量的依赖关系存在分解,即取决于方程与变量关联二部图的结构或是几何约束图的结构.然而,在实际的几何约束求解过程中,几何约束图的结构与用户的输入有关,用户所选约束组合的多样性和约束分布的多样性往往造成几何约束图的多样性,使得几何约束系统的分解存在多样性,导致求解规模存在较大差异.如何消除用户输入多样性导致约束系统分解多样性的不利影响,使得几何约束系统的分解结果不完全依赖于几何约束图的结构而是取决于几何约束系统的本质特征,是实现几何约束系统最优分解的关键问题.

如图1(a)所示的夹块装配模型,用户在CAD系统中通常定义以下几何约束关系:

- 共轴约束: $CoiLL(2,1)_1, CoiLL(2,1)_2, CoiLL(3,1), CoiLL(4,1), CoiLL(5,3), CoiLL(6,4)$ .
- 共面约束: $Coiff(2,1), Coiff(3,1), Coiff(4,1), Coiff(5,2), Coiff(6,2)$ .

这样,夹块装配模型对应的几何约束图如图1(b)所示,几何约束图中出现几何约束闭环,无法进一步分解,装配模型中的所有约束必须同步迭代求解.事实上,夹块装配模型并不包含运动学闭环,如果添加共轴约束 $CoiLL(5,2), CoiLL(6,2)$ 替换共轴约束 $CoiLL(5,3), CoiLL(6,4)$ ,将得到完全相同的装配结果.但此时的几何约束图如图1(c)所示,不含约束闭环,装配模型中各个部件上的几何约束可依次求解.可见,结构上不同的几何约束图1(b)和图1(c)在几何上完全等价,但几何约束图1(c)的分解结果显然优于几何约束图1(b).

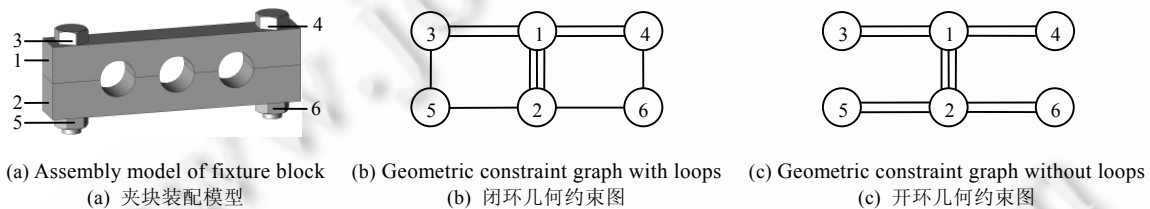


Fig.1 Assembly model of fixture block and its geometric constraint graph

图1 夹块装配模型及其几何约束图

因此,优化几何约束图的结构将有益于几何约束系统的分解.高小山等人<sup>[8]</sup>采用几何变换法将二维几何约束系统中一类循环约束问题转换为序列构造问题,但未对三维几何约束问题做进一步探讨.陈立平等人<sup>[9]</sup>提出了面向欠约束系统求解的二部图匹配优化处理方法,通过优化调整约束强连通分量中约束有向弧的方向实现几何约束系统的优化分解,有效解决了欠约束有向约束图中约束有向弧匹配多样性带来的分解多样性问题,但约束有向弧方向的调整不能改变约束图的结构,所以该方法在处理约束关联对象多样性造成的循环约束问题时存在不足.对于不可分解的几何约束闭环,石志良等人<sup>[10]</sup>针对二维几何约束系统提出了等价迭代方法,通过切除部分约束并添加相应的等价约束,降低了同步迭代求解的规模.对于三维几何约束闭环,夏鸿建等人<sup>[11]</sup>采用切约束的方法处理约束闭环,并引入运动学中的相对坐标建模方法,有效地降低了同步迭代求解的规模,但这两种方法忽略了约束组合的多样性和约束分布的多样性对约束分解的影响,从而将伪约束闭环作为约束闭环处理.为此,刘勇等人<sup>[12]</sup>提出了求解这类装配约束伪闭环问题的等价约束图转换方法,取得了较好的效果,但该方法仅讨论了可拆解的伪约束闭环的分解问题,没有研究不可拆解约束闭环的缩减问题和共边的多约束闭环的分解问题;对于等价约束的判定,他们采用自由度规约和广义坐标扰动方法,但自由度规约的方法求取广义坐标并不完备,而且扰动方法较为复杂并存在数值不稳定的问题;此外,该方法必须对闭环中所有约束的可拆解性进行判定,且每次判定都需要扰动所有广义坐标,效率较低.鉴于此,本文基于约束组合的多样性和约束分布的多样性隐含着几何约束系统存在等价性这一事实,分析三维几何约束系统中几何约束的等价性,通过几何约束等价替

换改变几何约束图中约束的分布,优化几何约束图的结构,实现几何约束系统的优化分解.

### 1 几何约束系统等价性分析的意义

**定义 1.** 对于一组几何实体  $S_g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ , 其变量集合为  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 存在两个不同的几何约束系统  $C_i = \{c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,p}\}$ ,  $C_j = \{c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,q}\}$ , 其中,  $c_{i,k} = c(g_a, g_b)$  为几何实体  $g_a, g_b$  之间的几何约束, 如果对于任何满足几何约束系统  $C_i$  的解  $X_i$  总是满足几何约束系统  $C_j$ , 且对于任何满足几何约束系统  $C_j$  的解  $X_j$  也总是满足几何约束系统  $C_i$ , 则称  $C_i, C_j$  为等价几何约束系统.

**定义 2.** 对于几何约束系统  $C_i = \{c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,p}\}$ , 替换  $C_i$  中的部分几何约束得到新的几何约束系统  $C_j = \{c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,q}\}$ , 如果  $C_i, C_j$  为等价几何约束系统, 则称这种替换为等价替换.

几何约束分解的根本目的是将几何约束系统分解为多个可分别求解的规模较小的子系统. 假定采用相同的几何约束分解方法(比如采用文献[6,7]中基于图论的方法)对两个等价的几何约束系统  $C_i, C_j$  进行分解, 分解的结果分别为  $S_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,p}\}$ ,  $S_j = \{s_{j,1}, s_{j,2}, \dots, s_{j,q}\}$ ; 定义几何约束系统  $C_i, C_j$  的求解规模为

$$MaxSize(S_i) = \max\{\|s_{i,1}\|, \|s_{i,2}\|, \dots, \|s_{i,p}\|\}, MaxSize(S_j) = \max\{\|s_{j,1}\|, \|s_{j,2}\|, \dots, \|s_{j,q}\|\},$$

其中,  $\|s_{i,k}\|, \|s_{j,k}\|$  分别为子系统  $s_{i,k}, s_{j,k}$  的求解规模. 如果  $MaxSize(S_i) < MaxSize(S_j)$ , 则意味着等价的几何约束系统采用相同的分解方法得到求解规模不同的分解结果. 因此, 在求解几何约束系统  $C_j$  时, 通过对其进行等价性分析, 用几何约束系统  $C_i$  等价替换  $C_j$ , 将实现几何约束系统的优化分解.

图 1 说明了几何约束系统的等价替换能够优化基于图论的约束系统分解方法. 下面将讨论等价约束替换对变量几何分解方法的意义. 本文采用文献[7]的刚体位姿描述和基本约束表达, 采用文献[13]的方法剔除冗余约束. 对于两个刚体  $P_1, P_2$  之间的两个等价几何约束系统  $A, B$ , 其中, 几何约束系统  $A$  为 3 个共点约束  $CoiPP(P_1, P_2)_1, CoiPP(P_1, P_2)_2, CoiPP(P_1, P_2)_3$ , 对应的有效基本约束为 6 个坐标分量相等约束, 记为  $\{f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}, f_{1,5}, f_{1,6}\}$ ; 几何约束系统  $B$  为 3 个共面约束  $CoiFF(P_1, P_2)_1, CoiFF(P_1, P_2)_2, CoiFF(P_1, P_2)_3$ , 对应的有效基本约束包括 3 个矢量角度约束和 3 个点面距离约束, 记为  $\{f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{2,4}, f_{2,5}, f_{2,6}\}$ . 假设刚体  $P_1$  固定,  $\{x_1, x_2, x_3\}$  为刚体  $P_2$  的姿态变量,  $\{x_4, x_5, x_6\}$  为刚体  $P_2$  的位置变量, 则几何约束系统  $A, B$  对应的方程与变量关系的二部图如图 2 所示. 从图 2(a) 和图 2(b) 可以看出, 几何约束系统  $A$  内的所有约束方程不可分解, 需要同步迭代求解的方程数为 6; 但几何约束系统  $B$  内的约束方程可分成两部分分别求解, 先求解方程组  $\{f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}\}$  得出  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , 再求解方程组  $\{f_{2,4}, f_{2,5}, f_{2,6}\}$  得出  $\{x_4, x_5, x_6\}$ , 需要同步迭代求解的最大方程数为 3. 显然, 几何约束系统  $B$  的求解规模小于几何约束系统  $A$ .

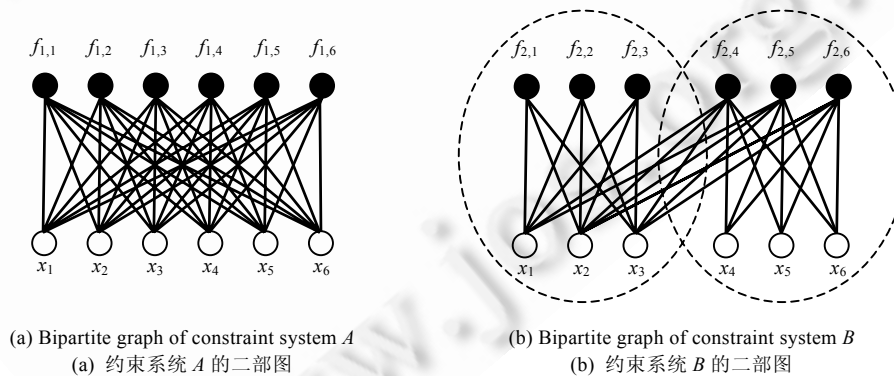


Fig.2 Bipartite graph representation of the relationship between constraint equations and variables

图 2 约束方程与变量关系的二部图表达

总之, 从基于图论的分解角度, 几何约束的等价替换将改变几何约束图的结构; 从变量几何分解的角度, 则是改变方程与变量关联二部图的结构. 几何约束等价替换的目的是使得在原有结构下无法分解的几何约束系统能够进一步分解, 而其关键在于找到可优化分解的等价几何约束系统.

## 2 三维几何约束的等价替换特性

纯粹从数学上寻找欲替换约束所对应的等价约束是十分困难的,但从几何上求取等价约束却是一种可行的方法.通过挖掘三维几何约束系统内蕴的几何知识,可以得出如下性质:

**性质 1.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在几何约束  $c_{i,j}$ ,且几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间完全约束,则可添加几何实体  $g_i$  与  $g_k$  之间的同类几何约束  $c_{i,k}$  等价替换  $g_i$  与  $g_j$  之间的约束  $c_{i,j}$ .

**性质 2.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在面面距离约束  $DisFF(F_i, F_j)$ ,几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间也存在面面距离约束  $DisFF(F'_j, F_k)$ ,如果在几何实体  $g_j$  上平面  $F_j$  和  $F'_j$  满足面面距离约束  $DisFF(F_j, F'_j)$ ,则可添加  $g_i$  与  $g_k$  之间的面面距离约束  $DisFF(F_i, F_k)$  等价替换  $g_j$  与  $g_k$  之间的面面距离  $DisFF(F'_j, F_k)$ .

**性质 3.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在共轴约束  $CoiLL(L_i, L_j)$ ,几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间也存在共轴约束  $CoiLL(L'_j, L_k)$ ,如果在几何实体  $g_j$  上轴线或直线  $L_j$  和  $L'_j$  满足共轴约束  $CoiLL(L_j, L'_j)$ ,则可添加  $g_i$  与  $g_k$  之间的共轴约束  $CoiLL(L_i, L_k)$  等价替换  $g_j$  与  $g_k$  之间的共轴约束  $CoiLL(L'_j, L_k)$ .

**性质 4.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在点点重合约束  $CoiPP(p_i, p_j)$ ,几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间也存在点点重合约束  $CoiPP(p'_j, p_k)$ ,如果在几何实体  $g_j$  上点  $p_j$  和  $p'_j$  满足点点重合约束  $CoiPP(p_j, p'_j)$ ,则可添加  $g_i$  与  $g_k$  之间的点点重合约束  $CoiPP(p_i, p_k)$  等价替换  $g_j$  与  $g_k$  之间的点点重合约束  $CoiPP(p'_j, p_k)$ .

**性质 5.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在矢量平行约束  $ParVV(v_i, v_j)$ ,几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间也存在矢量平行约束  $ParVV(v'_j, v_k)$ ,如果在几何实体  $g_j$  上矢量  $v_j$  和  $v'_j$  满足矢量平行约束  $ParVV(v_j, v'_j)$ ,则可添加  $g_i$  与  $g_k$  之间的矢量平行约束  $ParVV(v_i, v_k)$  等价替换  $g_j$  与  $g_k$  之间的矢量平行约束  $ParVV(v'_j, v_k)$ .

**定义 3.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在约束  $c_{i,j}$ ,几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间存在约束  $c_{j,k}$ ,如果可在几何实体  $g_i$  与  $g_k$  之间的添加约束  $c_{i,k}$  等价替换  $g_i$  与  $g_j$  之间的约束  $c_{i,j}$ ,则称几何约束  $c_{j,k}$  等价传递约束  $c_{i,j}$ ,称几何约束  $c_{j,k}$  为几何约束  $c_{i,j}$  的等价传递约束.

性质 1 表明完全约束可以等价传递任意类型的几何约束;性质 2~性质 5 则指出,在满足适当条件下,点点重合约束、矢量平行约束、面面距离约束和共轴约束能够等价传递相同类型的几何约束.由于几何约束可分解,约束度大的几何约束可分解为多个约束度小的几何约束的组合,比如,面面距离约束可分解为矢量平行约束和点面距离约束的组合,共轴约束可分解为矢量平行约束和点线重合约束的组合,这使得约束度大的几何约束也可能等价传递约束度小的几何约束;反之,多个约束度小的几何约束也可组合成约束度大的几何约束,比如,两个共点约束可组合成转动副约束,两个共面约束可组合成移动副约束,这使得多个约束度小的几何约束的组合也可能等价传递约束度大的几何约束.显然,这种几何约束的分解和组合将增加几何约束系统等价性分析的复杂性.为方便几何约束系统的等价性分析,规范化两个几何实体之间多样性的约束表达,本文采用旋量方法<sup>[14,15]</sup>将两个几何实体之间多个几何约束的组合转换为运动副这类复合几何约束形式,主要有固定副约束、转动副约束、移动副约束、圆柱副约束、平面副约束、球副约束等.由此,可得性质 6.

**性质 6.** 几何实体  $g_i$  与  $g_j$  之间存在约束  $c_{i,j}$ ,几何实体  $g_i$  与  $g_k$  之间的几何约束  $c_{i,k}$ ,有效约束度  $doc(c_{i,j}) \leq doc(c_{i,k})$ ;如果  $c_{i,k}$  可分解为多个几何约束的组合  $\{c_{i,k}^1, c_{i,k}^2, \dots, c_{i,k}^m\}$ ,其中,  $\exists c_{i,k}^p \in \{c_{i,k}^1, c_{i,k}^2, \dots, c_{i,k}^m\}$  能够等价传递几何约束  $c_{i,j}$ ,则几何约束  $c_{i,k}$  等价传递约束  $c_{i,j}$ ,可在几何实体  $g_j$  与  $g_k$  之间的添加几何约束  $c_{j,k}$  等价替换  $g_i$  与  $g_j$  之间的几何约束  $c_{i,j}$ .

因此,在判定几何约束能否被等价传递时,首先判定能否被相同类型的几何约束等价传递,然后判定能否被约束度大的几何约束等价传递.

## 3 三维几何约束系统的等价分解

### 3.1 单个几何约束闭环的分解

本文采用赋权无向图表达三维几何约束系统,记为  $G = \{V, E, W\}$ .其中:

- $V$  为几何实体的顶点集合;
- $E$  为几何约束边集合;
- $W$  为约束边的权值集合, 权值  $w \in W$  为约束边的几何约束度.

为方便叙述, 对于图  $G$  中的几何约束闭环, 采用  $\mathcal{L}_i = \{V_i, E_i, W_i\}$  表示, 如图 3 所示. 其中:

- $V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为该闭环中的几何实体顶点集合;
- $E_i = \{e_{1,2}, e_{2,3}, \dots, e_{n-1,n}, e_{n,1}\}$  为该闭环中的约束边集合,  $e_{k,k+1} \in E_i$  为相邻顶点  $v_k, v_{k+1}$  之间的几何约束  $c_{k,k+1}$  对应的约束边;
- $W_i = \{w_{1,2}, w_{2,3}, \dots, w_{n-1,n}, w_{n,1}\}$  为约束边的权值集合, 权值  $w_{k,k+1} \in W_i$  为  $c_{k,k+1}$  的几何约束度.

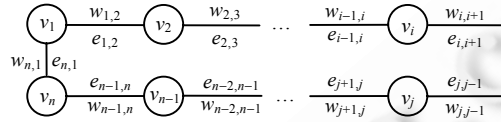


Fig.3 Geometric constraint loop

图 3 几何约束闭环

**定义 4.** 假定约束边  $e_{i-1,i}, e_{i,i+1}$  分别是顶点  $v_i$  与两个不同顶点  $v_{i-1}, v_{i+1}$  关联的约束边,  $c_{i-1,i}, c_{i,i+1}$  为约束边  $e_{i-1,i}, e_{i,i+1}$  对应的约束; 如果约束  $c_{i-1,i}$  能够被约束  $c_{i,i+1}$  等价传递, 则称约束边对  $(e_{i-1,i}, e_{i,i+1})$  为约束  $c_{i-1,i}$  的邻接等价传递边对.

**定义 5.** 假定顶点  $v_p$  到  $v_q$  的连通路程为  $P_{p \rightarrow q} = \{v_p, e_{p,p+1}, v_{p+1}, \dots, v_{q-1}, e_{q-1,q}, v_q\}$ , 如果该路径上的所有邻接约束边对  $(e_{i-1,i}, e_{i,i+1})$  均为约束  $c_{p,p+1}$  的邻接等价传递边对, 则称连通路程  $P_{p \rightarrow q}$  为约束  $c_{p,p+1}$  的等价传递路径; 如果  $v_p$  和  $v_q$  为邻接顶点, 则称等价传递路径  $P_{p \rightarrow q}$  为等价传递回路.

**性质 7.** 对于  $\forall v_i, v_j \in G.V$ , 如果  $v_i, v_j$  之间存在约束  $c_{k,k+1}$  的等价传递路径, 则可在顶点  $v_i, v_j$  之间添加等价约束  $c_{i,j}$  替换等价传递路径上任意传递边对应的几何约束  $c_{k,k+1}$ , 得到的几何约束系统与原系统等价.

等价约束的选取具有多样性, 但等价约束替换的根本目的是实现几何约束系统的进一步分解, 因而等价约束替换的处理对象应为几何约束图中的约束闭环. 通过分析约束闭环内几何约束的等价传递路径, 在等价传递路径上的两个顶点之间添加等价约束替换约束闭环中两个相邻顶点之间的几何约束, 将拆解约束闭环减少约束闭环的数量, 或是析出部分顶点缩减约束闭环. 下面给出求取几何约束等价传递路径的算法.

**算法 1.** 几何约束等价传递路径的求取算法.

输入: 约束闭环  $\mathcal{L} = \{v_1, e_{1,2}, v_2, \dots, e_{n-1,n}, v_n, e_{n,1}, v_1\}$ ; 约束边  $e_{k,k+1}$ ; 几何约束  $c_{k,k+1}$ .

输出: 顶点  $v_i$  和  $v_j$ .

Step 1. 求约束边  $e_{k,k+1}$  的关联顶点  $v_k, v_{k+1}$ , 摘除约束边  $e_{k,k+1}$ .

Step 2. 以  $v_k$  为起点, 求约束  $c_{k,k+1}$  的等价传递路径  $P_{k \rightarrow k+1} = \{v_k, e_{k,k-1}, v_{k-1}, \dots, e_{i-1,i}, v_i\}$ .

Step 3. 以  $v_{k+1}$  为起点, 求约束  $c_{k,k+1}$  的等价传递路径  $P_{k+1 \rightarrow k} = \{v_{k+1}, e_{k+1,k+2}, v_{k+2}, \dots, e_{j-1,j}, v_j\}$ .

Step 4. 恢复约束边  $e_{k,k+1}$ , 输出顶点  $v_i$  和  $v_j$ ; 算法结束.

由于约束闭环内通常具有较多的约束边, 为了提高等价约束替换处理的效率, 需要避免对约束闭环内的所有约束边进行等价性分析. 鉴于约束度小的约束边不能等价传递约束度大的约束边, 可以得出性质 8.

**性质 8.** 对于几何约束闭环内的约束边  $e_{i,i+1}, e_{j,j+1}, e_{k,k+1}$ , 其权值  $w_{i,i+1} \leq w_{j,j+1} \leq w_{k,k+1}$ , 即约束度  $doc(c_{i,i+1}) \leq doc(c_{j,j+1}) \leq doc(c_{k,k+1})$ , 如果约束边  $e_{i,i+1}, e_{j,j+1}$  不存在等价传递路径, 则约束边  $e_{k,k+1}$  不存在等价传递回路.

反证: 假定约束边  $e_{k,k+1}$  存在等价约束回路  $P = \{v_p, e_{p,p+1}, v_{p+1}, \dots, e_{p-2,p-1}, v_{p-1}\}$ , 有  $v_i, v_{i+1} \in P, v_j, v_{j+1} \in P, i \neq j$ . 如果  $i = p-1, v_i = v_{p-1}, v_{i+1} = v_p$ , 则  $j \neq p-1, v_j \neq v_{p-1}, v_{j+1} \neq v_p, e_{j,j+1} \in P$ . 这与约束边  $e_{j,j+1}$  不存在等价传递路径矛盾.  $\square$

这样, 在对约束闭环进行等价性分析之前, 对约束闭环内的约束边依据权值进行排序, 优先分析权值较小约束边的可拆解性, 可避免无效的等价性分析, 提高约束闭环处理的效率. 下面给出单个几何约束闭环的优化分解

算法.

**算法 2.** 单个几何约束闭环的优化分解算法.

输入:无向赋权图  $G$ ,图  $G$  中的几何约束闭环  $\mathcal{L}$ .

输出:分解标志  $\lambda$ .

Step 1. 令  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \leftarrow -0$ .

Step 2. 将约束闭环  $\mathcal{L}$  的约束边集合  $\mathcal{S}_e$  按权值由小到大排序.

Step 3. 如果集合  $\mathcal{S}_e = \emptyset$ , 则转 Step 5; 否则, 取集合  $\mathcal{S}_e$  中权值最小的约束边  $e_{k,k+1}$ , 并将其从集合  $\mathcal{S}_e$  删除.

Step 4. 调用算法 1 求约束边  $e_{k,k+1}$  对应约束  $c_{k,k+1}$  的等价传递路径, 得到顶点  $v_i$  和  $v_j$ .

Step 4.1. 如果  $v_i = v_k$  且  $v_j = v_{k+1}$ , 则标记  $e_{k,k+1}$ , 令  $\kappa_0 \leftarrow \kappa_0 + 1$ , 转 Step 3.

Step 4.2. 如果  $v_i \neq v_k$  或  $v_j \neq v_{k+1}$ , 且  $v_i$  和  $v_j$  为不相邻顶点, 则标记  $e_{k,k+1}, v_i$  和  $v_j$ , 添加等价约束  $c_{i,j}$  替换  $c_{k,k+1}$ , 添加对应边  $e_{i,j}$  替换  $e_{k,k+1}$ , 从约束闭环  $\mathcal{L}$  中析出顶点集合  $\{v_k, v_{k+1}, \dots, v_{i-1}\} \cup \{v_{k-1}, v_{k-2}, \dots, v_{j+1}\}$ , 更新相关约束边的权值, 令  $\kappa_1 \leftarrow \kappa_1 + 1$ , 转 Step 2.

Step 4.3. 如果  $v_i \neq v_k$  或  $v_j \neq v_{k+1}$ , 且  $v_i$  和  $v_j$  为相邻顶点, 则标记  $e_{k,k+1}, v_i$  和  $v_j$ , 添加等价约束  $c_{i,j}$  替换  $c_{k,k+1}$ , 更新对应边  $e_{i,j}$ , 更新相关约束边的权值, 令  $\kappa_2 \leftarrow 1$ , 继续下一步.

Step 5. 如果  $\kappa_2 = 1$ , 则约束闭环  $\mathcal{L}$  被拆解, 令  $\lambda \leftarrow -2$ ; 如果  $\kappa_1 \neq 0$  且  $\kappa_2 \neq 1$ , 则约束闭环  $\mathcal{L}$  被缩减, 令  $\lambda \leftarrow -1$ ; 否则, 约束闭环未能优化处理, 令  $\lambda \leftarrow 0$ ; 算法结束.

在最差的情况下, 几何约束闭环不能被优化处理, 则算法 2 需要求取  $n-1$  ( $n$  为几何约束闭环的约束边数) 条约束边的等价传递路径. 由于此时没有约束边存在等价传递路径, 即几何约束等价传递路径求取算法在访问测试边及其两条邻接边后即终止, 因此访问边的总次数小于  $3n$ , 故算法 2 的复杂度为  $O(n)$ .

### 3.2 几何约束图的闭环分析

按照几何约束图中约束闭环与约束闭环的关系, 可将约束闭环分为独立的单约束闭环、共点的多约束闭环和共边的多约束闭环. 通过摘除几何约束图中不包含在约束闭环内的顶点和约束边, 可将几何约束图可分解为一系列的独立子图, 这些子图可能是独立的单约束闭环子图, 或是共点的多约束闭环子图, 或是共边的多约束闭环子图, 如图 4 所示.

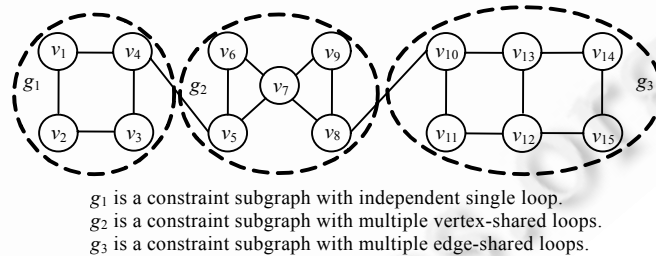


Fig.4 Classification of geometric constraint subgraph with loops

图 4 几何约束闭环子图分类

由于共点的多约束闭环子图可从共享点处分离成多个独立的单约束闭环, 因而其优化处理方式与独立的单约束闭环一致, 可采用算法 2 进行优化处理. 对于共边的多约束闭环子图, 首先, 该子图内的约束闭环较多, 需要避免对其中的每个闭环进行优化处理; 其次, 优化处理该子图内的任何闭环都将影响与其共边的约束闭环, 在优化处理某个闭环时, 必须考虑与其共边的其他约束闭环, 才能有效优化整个子图. 最小约束闭环最小集合是闭环图的不变量之一, 每个共边的约束闭环子图对应着数量不变的最小约束闭环构成的集合, 而共边的多约束闭环子图的分解特性与其最小约束闭环的分解特性密切相关, 下文将作具体阐述.

为简化问题, 我们首先分析两个共边最小约束闭环的情形. 图 5(a) 中的两个共边最小约束闭环分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \{v_i, e_{i,i+1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, e_{j-1,j}, v_j, e_{j,q}, v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}, \dots, v_{p+1}, e_{p+1,p}, v_p, e_{p,i}, v_i\}, \\ \mathcal{L}_2 &= \{v_s, e_{s,s+1}, v_{s+1}, \dots, v_{t-1}, e_{t-1,t}, v_t, e_{t,j}, v_j, e_{j-1,j}, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, e_{i+1,i}, v_i, e_{i,s}, v_s\}, \end{aligned}$$

则  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  的环和形成的约束闭环为

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \{v_i, e_{i,s}, v_s, e_{s,s+1}, v_{s+1}, \dots, v_{t-1}, e_{t-1,t}, v_t, e_{t,j}, v_j, e_{j,q}, v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}, \dots, v_{p+1}, e_{p+1,p}, v_p, e_{p,i}, v_i\}.$$

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  的交形成的子图为

$$g_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{v_i, e_{i,i+1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, e_{j-1,j}, v_j\}.$$

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  和  $g_0$  的差分别为

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathcal{L}_1 - g_0 = \{v_j, e_{j,q}, v_q, e_{q,q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{p+1}, e_{p+1,p}, v_p, e_{p,i}, v_i\}, \\ g_2 &= \mathcal{L}_2 - g_0 = \{v_i, e_{i,s}, v_s, e_{s,s+1}, v_{s+1}, \dots, v_{t-1}, e_{t-1,t}, v_t, e_{t,j}, v_j\}. \end{aligned}$$

由于  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  为最小约束闭环, 而约束闭环的最小约束边数为 3, 用  $N_e(g)$  表示图  $g$  中的约束边数, 则  $g_0, g_1, g_2$  的约束边数存在关系:  $1 \leq N_e(g_0) \leq \min(N_e(g_1), N_e(g_2))$  且  $\min(N_e(g_1), N_e(g_2)) \geq 2$ . 由于等价替换的目标是减少约束闭环的数量, 或是降低约束闭环的规模 (即减少约束闭环内顶点和约束边的数量), 因此在最小约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  不能被拆解和缩减的情形下, 需要分析等价替换处理约束闭环  $\mathcal{L}_0$  对两个最小约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  的影响.

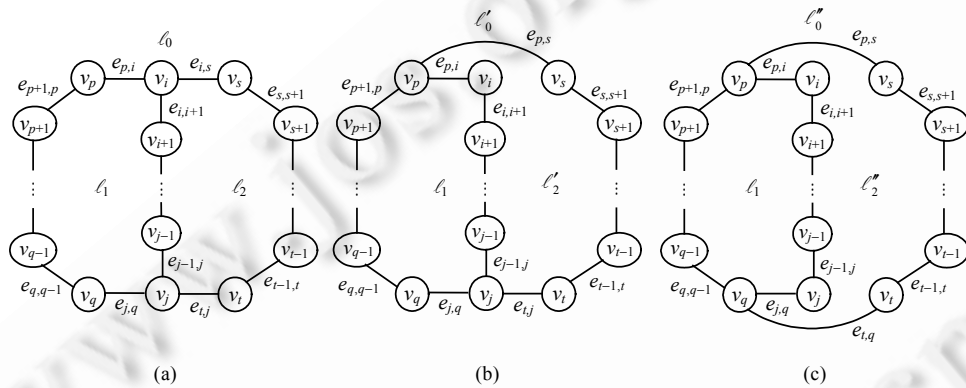


Fig.5 Equivalence analysis of two edge-shared constraint loops  
图 5 两个共边约束闭环的等价性分析

最小约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  不能被拆解和缩减, 意味着约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  内不存在任何等价传递路径, 则对于约束闭环  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ , 如图 5(a), 可能存在的等价传递路径有  $P_{p \rightarrow s} = \{v_p, e_{p,i}, v_i, e_{i,s}, v_s\}, P_{t \rightarrow q} = \{v_t, e_{t,j}, v_j, e_{j,q}, v_q\}$ . 如果只存在 1 条等价传递路径, 比如  $P_{p \rightarrow s}$ , 则等价替换处理约束闭环  $\mathcal{L}_0$ , 如图 5(b), 有  $N_e(\mathcal{L}'_0) = N_e(g_1) + N_e(g_2) - 1$ . 由于  $\min(N_e(g_1), N_e(g_2)) \geq 2$ , 因此  $N_e(\mathcal{L}'_0) = N_e(g_1) + N_e(g_2) - 1 \geq 3$ , 约束闭环  $\mathcal{L}_0$  不能被拆解; 此时有  $N_e(\mathcal{L}'_2) = N_e(g_2) + N_e(g_0) + 1$  或  $N_e(\mathcal{L}'_0) = N_e(g_1) + N_e(g_2) - 1$ . 显然,  $N_e(\mathcal{L}'_2) > N_e(\mathcal{L}_2)$ , 可能存在  $N_e(\mathcal{L}'_0) < N_e(\mathcal{L}_0)$ . 即当  $N_e(g_0) \leq N_e(g_1) < N_e(g_0) + 1$  时, 等价替换才能缩减约束闭环  $\mathcal{L}_2$ . 但由于  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  是共边约束闭环, 这种缩减不会析出简单顶点. 如果存在两条等价传递路径, 则等价替换处理约束闭环  $\mathcal{L}_0$ , 如图 5(c) 所示, 有  $N_e(\mathcal{L}''_0) = N_e(g_1) + N_e(g_2) - 2$ ; 当  $N_e(\mathcal{L}''_0) = N_e(g_1) + N_e(g_2) - 2 < 3$ , 即  $N_e(g_1) = N_e(g_2) = 2$  时, 约束闭环  $\mathcal{L}_0$  可被拆解; 当  $N_e(g_1) = 2$  且  $N_e(g_2) > 2$  时, 缩减约束闭环  $\mathcal{L}_0$  将使得共边约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  转换为可分离的共点约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}''_0$ ; 当  $N_e(g_1) > 2$  且  $N_e(g_2) > 2$  时, 则有  $N_e(\mathcal{L}'_2) = N_e(g_2) + N_e(g_0) + 2$  或  $N_e(\mathcal{L}''_0) = N_e(g_2) + N_e(g_1) - 2$ . 显然有  $N_e(\mathcal{L}'_2) > N_e(\mathcal{L}_2)$ , 可能存在  $N_e(\mathcal{L}''_0) < N_e(\mathcal{L}_0)$ . 即当  $N_e(g_0) \leq N_e(g_1) < N_e(g_0) + 2$  时, 等价替换才能缩减约束闭环. 由于  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  是共边的约束闭环, 这种缩减不会析出简单顶点. 具体的实例分析如下:

- (1) 当  $N_e(g_1) = N_e(g_2) = 2$  且  $N_e(g_0) = 1$  时,  $N_e(\mathcal{L}_1) = N_e(\mathcal{L}_2) = 3$ , 如图 6(a) 所示. 如果同时存在两条等价传递路径  $P_{p \rightarrow s}, P_{s \rightarrow p}$ , 则可添加等价约束边  $e_{p,s}^1, e_{p,s}^2$  分别替换  $e_{i,s}, e_{s,j}$ , 可析出顶点  $v_s$ .
- (2) 当  $N_e(g_1) = 2, N_e(g_2) = 3$  且  $N_e(g_0) = 1$  时,  $N_e(\mathcal{L}_1) = 3, N_e(\mathcal{L}_2) = 4$ , 如图 6(b) 所示. 如果同时存在两条等价传递路径

- $P_{p \rightarrow s}, P_{t \rightarrow p}$ , 则可添加等价约束边  $e_{p,s}, e_{p,t}$  分别替换  $e_{i,s}, e_{t,j}$ , 两个共边约束闭环被分解为两个共点约束闭环.
- (3) 当  $N_e(g_1)=N_e(g_2)=2$  且  $N_e(g_0)=2$  时,  $N_e(l_1)=N_e(l_2)=4$ , 如图 6(c) 所示. 如果同时存在两条等价传递路径  $P_{p \rightarrow s}, P_{s \rightarrow p}$ , 则可添加等价约束边  $e_{p,s}^1, e_{p,s}^2$  分别替换  $e_{i,s}, e_{s,j}$ , 可析出顶点  $v_s$ .
- (4) 当  $N_e(g_1)=N_e(g_2)=2$  且  $N_e(g_0)=1$  时,  $N_e(l_1)=N_e(l_2)=4$ , 如图 6(d) 所示. 如果同时存在两条等价传递路径  $P_{p \rightarrow s}, P_{t \rightarrow p}$ , 则可添加等价约束边  $e_{p,s}, e_{t,q}$  分别替换  $e_{i,s}, e_{t,j}$ , 但约束图的结构不变.

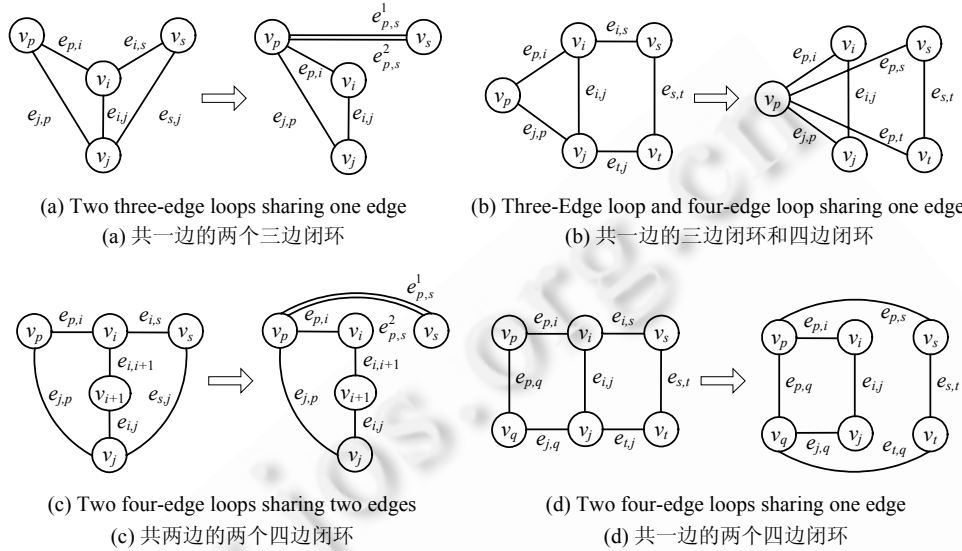


Fig.6 Typical examples of two edge-shared constraint loops

图 6 两个共边约束闭环的典型实例

由以上分析可知,对于两个共边约束闭环,存在如下性质:

**性质 9.** 对于不可拆解和缩减的两个共边约束闭环  $\ell_1, \ell_2$ , 有  $\ell_0 = \ell_1 \oplus \ell_2, g_0 = \ell_1 \cap \ell_2, g_1 = \ell_1 - g_0, g_2 = \ell_2 - g_0$ ; 当  $N_e(g_1)=N_e(g_2)=2$  时, 约束闭环  $\ell_0$  有可能被等价替换拆解; 当  $N_e(g_1)=2$  且  $N_e(g_2)>2$  时, 共边约束闭环  $\ell_1, \ell_2$  有可能被等价替换为共点约束闭环; 当  $N_e(g_1)>2$  且  $N_e(g_2)>2$  时, 等价替换不能拆解约束闭环  $\ell_1, \ell_2$ .

下面进一步分析多个共边最小约束闭环的情形. 假定最小约束闭环  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n (n \geq 3)$  均不能被拆解和缩减, 有约束闭环  $\ell_0 = \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \dots \oplus \ell_n$ , 对于  $\forall \ell_i \in \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}, \ell_0 \cap \ell_i$  可形成若干条连通路程  $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^m$ , 则由  $\ell_0$  和  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  的交形成的连通路程构成的集合为  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , 其中,  $P_i = \{P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^m\}$ .

(1) 如果对于  $\forall P_i^k \in P$  均满足  $N_e(P_i^k)=1$ , 如图 7(a) 所示, 约束闭环  $\ell_0$  中任意两条相邻的约束边均不属于同一最小约束闭环, 则约束闭环  $\ell_0$  中可能存在的等价传递回路, 等价替换处理可能拆解约束闭环  $\ell_0$ .

(2) 如果  $\exists P_i^a \in P$  使得  $N_e(P_i^a)=2$ , 且对于  $\forall P_j^k \in P - \{P_i^a\}$  均满足  $N_e(P_j^k)=1$ , 如图 7(b) 所示, 则有

$$P_i^a = \{v_s, e_{s,r}, v_r, e_{r,q}, v_q\} \subset \ell_i.$$

由于  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  均为不可拆解和缩减的约束闭环, 因此连通路程  $P_i^a$  不是等价传递路径, 且约束闭环  $\ell_0$  中所有包含  $P_i^a$  的连通路程均不是等价传递回路, 所以可能存在的等价传递回路为

$$P_{q \rightarrow r} = \{v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}, \dots, v_{p+1}, e_{p+1,p}, v_p, e_{p,t}, v_t, e_{t,t-1}, v_{t-1}, \dots, v_{s+1}, e_{s+1,s}, v_s, e_{s,r}, v_r\},$$

或

$$P_{r \rightarrow s} = \{v_r, e_{r,q}, v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}, \dots, v_{p+1}, e_{p+1,p}, v_p, e_{p,t}, v_t, e_{t,t-1}, v_{t-1}, \dots, v_{s+1}, e_{s+1,s}, v_s\}.$$

如果存在等价传递回路  $P_{q \rightarrow r}$  或  $P_{r \rightarrow s}$ , 则约束闭环  $\ell_0$  可被拆解.

(3) 如果  $\exists P_i^a \in P$  使得  $N_e(P_i^a)=3$ , 且对于  $\forall P_j^k \in P - \{P_i^a\}$  均满足  $N_e(P_j^k)=1$ , 如图 7(c) 所示, 则有



$$P_i^a = \{v_{s+1}, e_{s+1,s}, v_s, e_{s,r}, v_r, e_{r,q}, v_q\} \subset \mathcal{L}_i.$$

由于  $\mathcal{L}_i$  为不可拆解和缩减的约束闭环,因此连通路经  $P_i^a$  不是等价传递路径,其中的任意两条相邻边均不是等价传递边对.所以,约束闭环  $\mathcal{L}_0$  中所有包含  $P_i^a$  的连通路经均不是等价传递回路,那么可能存在一条等价传递回路为  $P_{r \rightarrow s} = \{v_r, e_{r,q}, v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}, \dots, v_{p+1}, e_{p+1,p}, v_p, e_{p,t}, v_t, e_{t,t-1}, v_{t-1}, \dots, v_{s+1}, e_{s+1,s}, v_s\}$ ,如果等价传递回路  $P_{r \rightarrow s}$  存在,则约束闭环  $\mathcal{L}_0$  可被拆解.

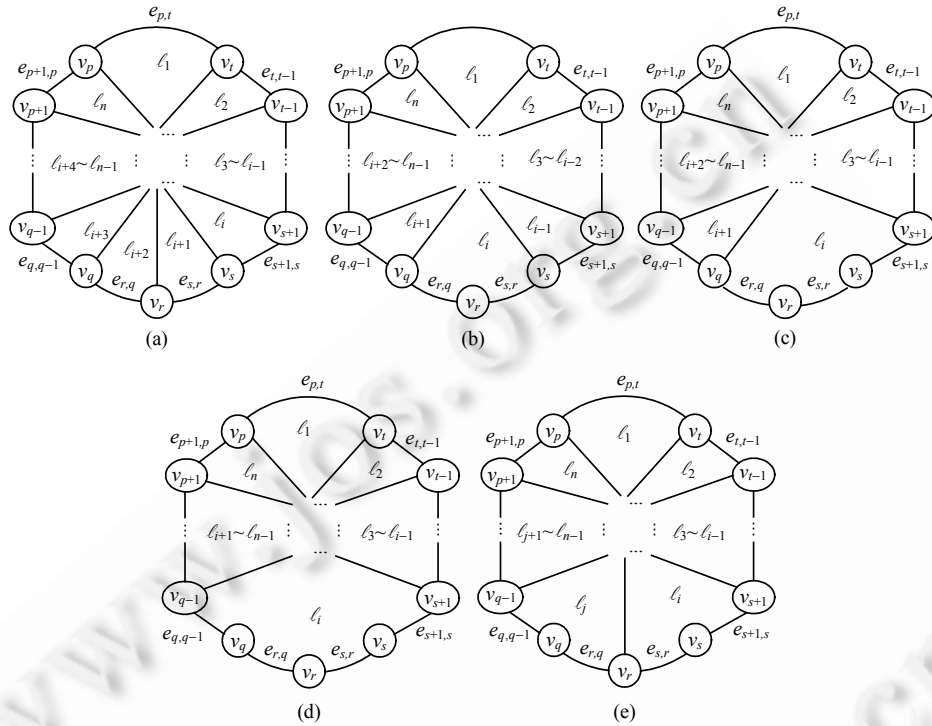


Fig.7 Equivalence analysis of multiple edge-shared constraint loops

图 7 多个共边约束闭环的等价性分析

(4) 如果  $\exists P_i^a \in \mathbf{P}$  满足  $N_e(P_i^a) \geq 4$ ,如图 7(d)所示,则有  $P_i^a = \{v_{s+1}, e_{s+1,s}, v_s, e_{s,r}, v_r, e_{r,q}, v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}\} \subset \mathcal{L}_i$ .由于  $\mathcal{L}_i$  为不可拆解和缩减的约束闭环,因此连通路经  $P_i^a$  不是等价传递路径,其中的任意两条相邻边均不是等价传递边对.那么,约束闭环  $\mathcal{L}_0$  中所有包含  $P_i^a$  的任意两条相邻边的连通路经均不是等价传递回路,即约束闭环  $\mathcal{L}_0$  中不存在等价传递回路,等价替换处理不能拆解约束闭环  $\mathcal{L}_0$ .

(5) 如果  $\exists P_i^a, P_j^b \in \mathbf{P} (P_i^a \neq P_j^b)$ ,满足  $N_e(P_i^a) \geq 2$  且  $N_e(P_j^b) \geq 2$ ,如图 7(e)所示,则有  $P_i^a = \{v_{s+1}, e_{s+1,s}, v_s, e_{s,r}, v_r\} \subset \mathcal{L}_i$ ,  $P_j^b = \{v_r, e_{r,q}, v_q, e_{q,q-1}, v_{q-1}\} \subset \mathcal{L}_j$ .由于  $\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j$  均为不可拆解和缩减的约束闭环,连通路经  $P_i^a, P_j^b$  都不是等价传递路径,因此约束闭环  $\mathcal{L}_0$  中所有包含  $P_i^a$  或  $P_j^b$  的连通路经均不是等价传递回路,则约束闭环  $\mathcal{L}_0$  中不存在等价传递回路,等价替换处理不能拆解约束闭环  $\mathcal{L}_0$ .

由以上分析可知,对于多个共边的约束闭环,存在如下性质:

**性质 10.** 对于不可拆解和缩减的多个共边的约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ ,有  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n$ ;取  $\forall \mathcal{L}_i \in \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n\}$ ,  $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_0$  由若干条连通路经  $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^m$  组成,则  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$  和  $\mathcal{L}_0$  的交所形成的连通路经构成的集合为  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ,其中,  $P_i = \{P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^m\}$ .如果  $\exists P_i^a \in \mathbf{P}$  使得  $1 \leq N_e(P_i^a) < 4$ ,且对于  $\forall P_j^b \in \mathbf{P} - \{P_i^a\}$  均满足  $N_e(P_j^b) = 1$ ,则等价替

换处理可能拆解约束闭环 $\mathcal{C}_0$ ;如果 $\exists P_i^k \in \mathbf{P}$ 使得 $N_e(P_i^k) \geq 4$ ,则等价替换处理不能拆解约束闭环 $\mathcal{C}_0$ ;如果 $\exists P_i^a, P_j^b \in \mathbf{P}(P_i^a \neq P_j^b)$ ,满足 $N_e(P_i^a) \geq 2$ 且 $N_e(P_j^b) \geq 2$ ,则等价替换处理不能拆解约束闭环 $\mathcal{C}_0$ .

性质 9 和性质 10 表明,约束闭环的可拆解性可以通过分析形成该闭环的最小约束闭环的可缩减性来确定.由于最小约束闭环最小集是几何约束图的不变量,约束图中的任意约束闭环均可表达为某些最小约束闭环的环和,因此,几何约束图的最小约束闭环最小集是等价分析的主要对象.

### 3.3 几何约束图的等价分解

几何约束图分解的关键是实现共边约束闭环子图的最大分解,其手段是通过等价替换拆解和缩减约束子图中的约束闭环,不断析出约束边、刚性约束闭环和共点约束闭环.由最小约束闭环最小集的性质可知,共边约束闭环子图内任意约束闭环均可表达为多个最小约束闭环的环和;而性质 9 和性质 10 指出,约束闭环的可拆解性与其最小约束闭环的可缩减性密切相关.当共边约束闭环子图的所有最小约束闭环均不可拆解和缩减时,对于这些最小约束闭环的不同组合的环和所形成的约束闭环,其可拆解的概率通常很小,而这类约束闭环的数量可能很大.为了提高算法在实际应用中的效率,本文只优化处理最小约束闭环以及两个最小约束闭环的环和所形成的约束闭环.同时,在某个共边约束闭环内,约束边可分为共享约束边和非共享约束边.由于替换共享约束边可能造成两个共享约束边闭环的合并,而替换非共享约束边却不影响其他的约束闭环,因此在处理约束闭环时,应优先处理非共享约束边.为此,修改约束边权值的定义,令其为 $w=w_c+m\mu$ .其中, $w_c$ 为该约束边的几何约束度; $m$ 为该约束边被最小约束闭环引用的次数; $\mu$ 为给定的常数,通常取 $\mu=0.01$ .在优化处理约束闭环的过程中,为快速降低共边约束闭环子图的规模,应在拆解和缩减约束闭环的过程中析出不再包含在约束闭环内的顶点和约束边,以及可单独求解的刚性约束闭环和可分别求解的共点约束闭环.此外,由于拆解和缩减约束闭环会改变约束闭环子图的结构,而结构改变的约束闭环子图有可能被进一步分解,因而需要多次求取最小约束闭环的最小集合并进行等价性分析,直到不能通过改变约束闭环子图的结构降低求解规模为止.依据上述分析,下面给出共边约束闭环子图的等价替换优化分解算法.

**算法 3.** 共边约束闭环子图的等价替换优化分解算法.

输入:初始几何约束子图  $g_{in}$ .

输出:等价几何约束子图  $g_{out}$ .

- Step 1. 求出几何约束子图  $g_{in}$  的最小约束闭环的最小集合  $I=\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n\}$ , 计算约束闭环内约束边的权值,并按约束闭环内共享约束边占总约束边数的百分比对集合  $I$  进行降序排序,同时令  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \leftarrow 0$ .
- Step 2. 如果  $I=\emptyset$  且  $\kappa_1+\kappa_2=0$ ,则转 Step 6;如果  $I=\emptyset$  且  $\kappa_1+\kappa_2 \neq 0$ ,则转 Step 1;否则,取约束闭环  $\mathcal{C} \in I$ ,并将其从集合  $I$  中删除.
- Step 3. 备份约束闭环  $\mathcal{C}_0 \leftarrow \mathcal{C}$ ,调用算法 2 处理约束闭环  $\mathcal{C}$ ,得到分解标志  $\lambda$ .
- Step 4. 判定分解标志  $\lambda$ .
- Step 4.1. 如果  $\lambda=2$ ,则闭环  $\mathcal{C}$  被拆解,从子图  $g_{in}$  摘除  $\mathcal{C}_0$  内不被其他约束闭环引用的约束边及相关顶点;若摘除的约束边为共享约束边,则从集合  $I$  删除共享该边的闭环,令  $\kappa_2 \leftarrow \kappa_2+1$ ,转 Step 2.
- Step 4.2. 如果  $\lambda=1$ ,则闭环  $\mathcal{C}$  被缩减,从子图  $g_{in}$  摘除  $\mathcal{C}_0$  内不被其他约束闭环引用的约束边及相关顶点,若摘除的约束边为共享约束边,则从集合  $I$  删除共享该边的闭环,令  $\kappa_1 \leftarrow \kappa_1+1$ ,转 Step 5.
- Step 4.3. 如果  $\lambda=0$ ,则闭环  $\mathcal{C}$  不能被优化处理,令  $\kappa_0 \leftarrow \kappa_0+1$ ,转 Step 5.
- Step 5. 判定闭环  $\mathcal{C}$  的类型.
- Step 5.1. 如果处理后的约束闭环  $\mathcal{C}$  为共点约束闭环或独立的单约束闭环,则从图  $g_{in}$  摘除  $\mathcal{C}$  内不被其他约束闭环引用的约束边及相关顶点,令  $\kappa_2 \leftarrow \kappa_2+1$ ,转 Step 2.
- Step 5.2. 如果处理后的约束闭环  $\mathcal{C}$  为刚性约束闭环,若此时闭环  $\mathcal{C}$  内含有共享约束边,则将闭环  $\mathcal{C}$  内各个顶点的外部约束边等价替换到其中某个顶点  $v$ ,并从图  $g_{in}$  中摘除闭环  $\mathcal{C}$  的所有约束边及除

$v$  之外的所有顶点,令  $\kappa_2 \leftarrow \kappa_2 + 1$ ,转 Step 2.

Step 6. 如果子图  $g_{in}$  为空图,则转 Step 9;否则,求子图  $g_{in}$  的最小约束闭环的最小集合  $I = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ ,计算约束闭环内的约束边的权值,并按约束闭环中约束边的数量对集合  $I$  进行排序.

Step 7. 令  $\kappa \leftarrow 0, i, j \leftarrow 1$ ,集合  $I' = \emptyset$ .

Step 7.1. 如果  $i \geq n$  或  $N_e(\ell_i) > 4$ ,则转 Step 8;否则,继续.

Step 7.2. 如果  $\ell_i \in I'$ ,则令  $i \leftarrow i + 1$ ,则转 Step 7.1;否则,添加  $\ell_i$  到集合  $I'$ ,令  $j \leftarrow i + 1$ ,继续.

Step 7.3. 如果  $j > n$ ,则令  $i \leftarrow i + 1$ ,则转 Step 7.1;否则,继续.

Step 7.4. 如果  $\ell_j \in I'$ ,则令  $j \leftarrow j + 1$ ,则转 Step 7.3;否则,继续.

Step 7.5. 如果  $N_e(\ell_i) > 3$  且  $N_e(\ell_j) > 4$ ,令  $i \leftarrow i + 1$ ,则转 Step 7.1;否则,求  $g_0 = \ell_i \cap \ell_j$ ,继续.

Step 7.6. 如果  $N_e(g_0) = 0$ ,令  $j \leftarrow j + 1$ ,则转 Step 7.3;否则,求  $g_i = \ell_i - g_0, g_j = \ell_j - g_0$ ,继续.

Step 7.7. 如果  $\ell_0 = g_i \cup g_j$  存在两条等价传递路径,则转 Step 7.8;否则,令  $j \leftarrow j + 1$ ,转 Step 7.3.

Step 7.8. 如果  $N_e(g_i) + N_e(g_j) = 4$  且  $N_e(g_0) = 1$ ,则拆解  $\ell_i$ ;如果  $N_e(g_i) + N_e(g_j) = 4$  且  $N_e(g_0) = 2$ ,则拆解  $\ell_j$ ,令  $\kappa_0 \leftarrow 1$ ;如果  $N_e(g_i) + N_e(g_j) = 5$  且  $N_e(g_0) = 1$ ,则分离  $\ell_i$  和  $\ell_j$ ;如果  $N_e(g_i) = 2$  或  $N_e(g_j) = 2$ ,则分离  $\ell_i$  和  $\ell_j$ .将本次操作破坏的最小约束闭环添加到集合  $I'$ ;如果本次操作能析出约束边、刚性约束闭环或是独立的约束子图,则令  $\kappa \leftarrow \kappa + 1, j \leftarrow j + 1$ ,转 Step 7.3.

Step 8. 如果  $\kappa \neq 0$ ,则转 Step 6;否则,继续.

Step 9. 构造几何等价约束子图  $g_{out}$ ,算法结束.

算法 3 对大多数约束闭环子图可实现最优分解,但不能保证对任意约束闭环子图实现最优分解,与现有的方法相比,算法 3 能够在更大程度上逼近最优分解.算法 3 的效率与几何约束图中约束闭环的数量、约束闭环的耦合程度以及约束闭环内约束边的数量有关.其中,Step 2 求几何约束图最小约束闭环的最小集合的算法参见文献[16].在处理过程中不考虑约束边的权值,其算法复杂度不超过  $O(n^3)$ ,这使得算法 3 的整体复杂度不超过  $O(n^3)$ .下面给出几何约束图的等价替换优化分解算法.

算法 4. 几何约束图的等价替换优化分解算法.

输入:初始几何约束图  $G_{in}$ .

输出:等价几何约束图  $G_{out}$ .

Step 1. 摘除图  $G_{in}$  中不包含在闭环内的顶点和约束边,得到分离的约束闭环子图集合  $C_g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ .

Step 2. 如果  $C_g = \emptyset$ ,则转 Step 4;否则,  $g_i$  取  $\in C_g$ ,并从  $C_g$  中删除  $g_i$ .

Step 3. 如果  $g_i$  为独立约束闭环子图,则采用算法 2 处理  $g_i$ ;如果  $g_i$  为共边约束闭环子图,则采用算法 3 处理  $g_i$ ;如果  $g_i$  为共点约束闭环子图,则求  $g_i$  的基本闭环集合  $I = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ ,采用算法 2 分别处理集合  $I$  内的闭环;转 Step 2.

Step 4. 构造等价几何约束图  $G_{out}$ ,算法结束.

由于几何约束图中共边约束闭环子图的复杂程度决定几何约束图等价替换优化分解的复杂度,即算法 4 复杂度取决于算法 3,因此,算法 4 的复杂度也不超过  $O(n^3)$ .

## 4 实例分析

为了验证本文方法的有效性,下面用 3 个应用实例分别对可拆解的约束闭环、可缩减的约束闭环和可分离的共边约束闭环进行分析.

### 4.1 调节阀装配模型

如图 8(a)所示的调节阀装配模型由阀体  $A$ 、焊颈法兰( $C_1, C_2$ )、密封垫圈( $B_1, B_2$ )、螺钉( $D_1, D_2, \dots, D_8$ )、螺母( $F_1, F_2, \dots, F_8$ )和垫片( $E_1, E_2, \dots, E_8$ )组成,其中被遮挡零件的编号没有标出.图 8(b)给出了调节阀装配模型的几何约束图,该几何约束图中存在多个约束闭环,比如  $\ell_1 = \{D_1, E_1, F_1, D_1\}$ ,  $\ell_2 = \{A, B_1, C_1, D_2, E_2, A\}$ ,  $\ell_3 = \{A, B_1, C_1, D_1, E_1, A\}$ ,

这使得同步迭代求解不可避免.但是,调节阀装配模型本质上是开环结构,并不存在运动学闭环,这说明约束图中的约束闭环是可拆解的约束闭环.通过对图 8(b)进行等价性分析和等价约束替换处理,可得到如图 8(c)所示的不含任何约束闭环的等价几何约束图,图中各个顶点可分别进行求解,从而极大地提高了约束求解的效率.

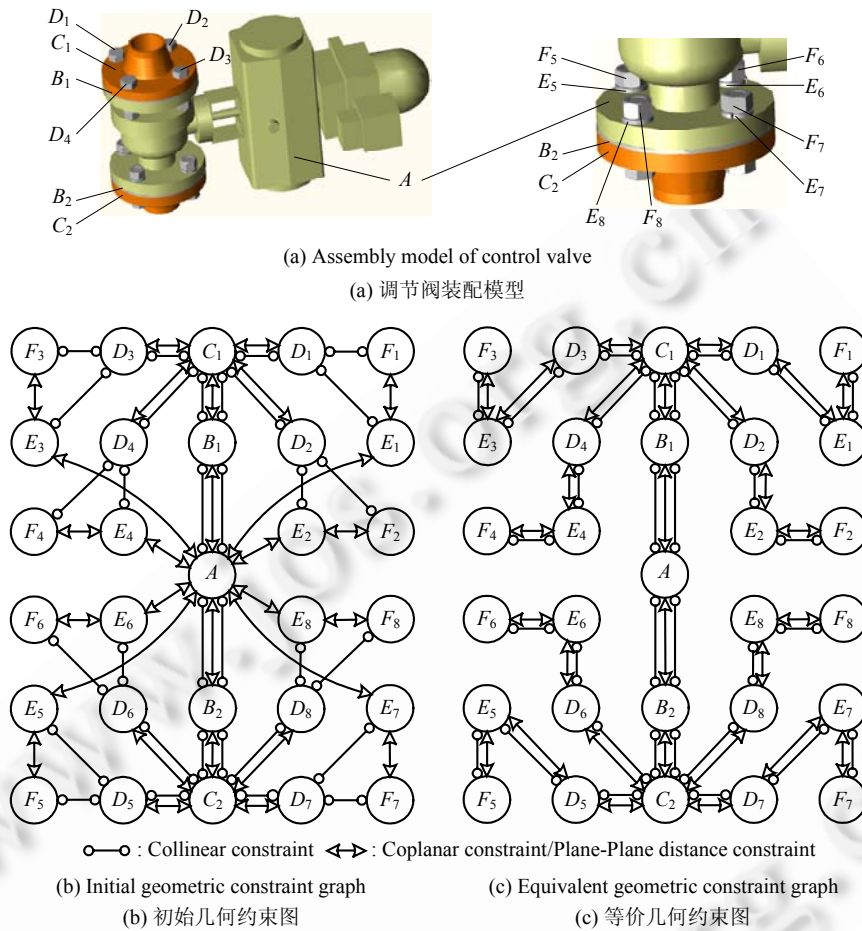


Fig.8 Assembly model of control valve and its geometric constraint graph  
图 8 调节阀装配模型及其几何约束图

#### 4.2 曲柄滑块机构装配模型

如图 9(a)所示的曲柄滑块机构装配模型由机架 1、曲柄 3、连杆 5、滑块 7 和连接件 2、连接件 4、连接件 6 组成,其几何约束图如图 9(b)所示,图中含有 3 个共边的最小约束闭环,分别为  $\mathcal{L}_1=\{1,2,3,1\}$ ,  $\mathcal{L}_2=\{3,4,5,3\}$ ,  $\mathcal{L}_3=\{1,3,5,6,7,1\}$ .通过对几何约束图 9(b)进行等价性分析发现,约束闭环  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  为可拆解的约束闭环,  $\mathcal{L}_3$  为可缩减的约束闭环,可以通过析出顶点 6 缩减约束闭环  $\mathcal{L}_3$  的规模.通过对初始几何约束图进行等价性分析和等价约束替换处理,处理过程如图 9(c)~图 9(e)所示,最终可得到如图 9(f)所示的等价几何约束图.在顶点 1 固定的情形下,只需同步迭代求解顶点 3、顶点 5、顶点 7,其他顶点可分别进行求解.

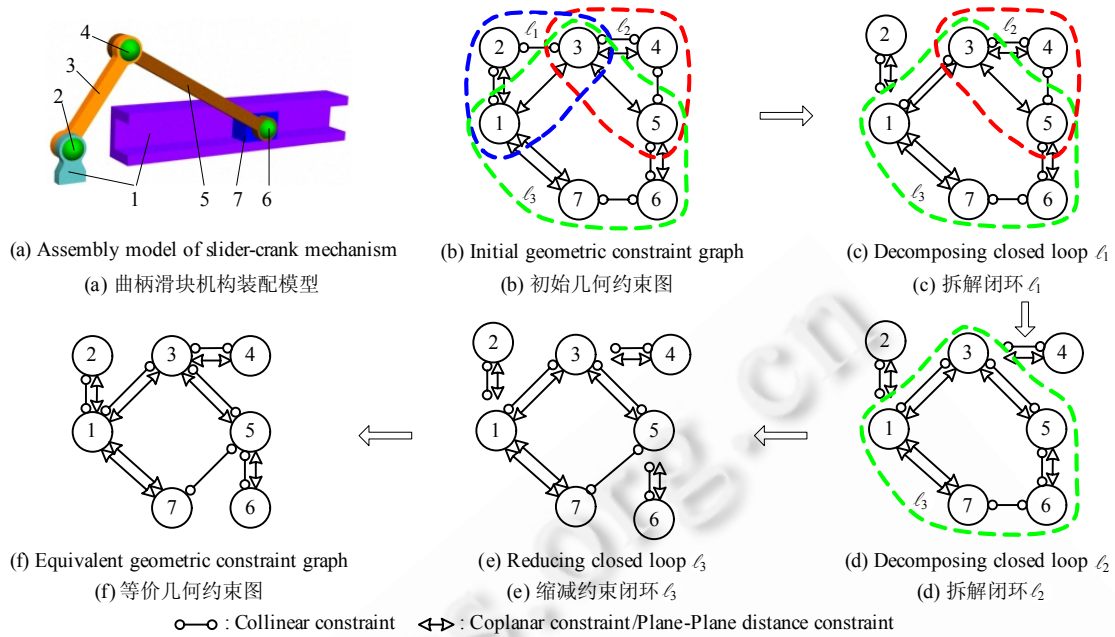


Fig.9 Assembly model of slider-crank mechanism and its geometric constraint graph  
图 9 曲柄滑块机构装配模型及其几何约束图

4.3 桁架结构装配模型

如图 10(a)所示的桁架结构装配模型由多根杆组成,杆与杆之间没有相对运动,表现为刚性结构.依据杆之间的接触关系,其几何约束图如图 10(b)所示,图中含有多个共边的最小约束闭环,比如  $\mathcal{L}_1=\{1,2,3,5,1\}$ ,  $\mathcal{L}_2=\{2,3,5,8,4,6,2\}$ ,  $\mathcal{L}_3=\{4,6,7,8,4\}$ ,  $\mathcal{L}_4=\{6,7,8,9,6\}$ .通过对几何约束图 10(b)进行等价性分析发现,各个闭环均不可拆解,但可通过等价替换处理析出部分顶点缩减约束闭环的规模,得到的等价几何约束图如图 10(c)所示,其中的约束闭环  $\mathcal{L}'_1=\{1,2,3,1\}$ ,  $\mathcal{L}'_2=\{3,4,5,3\}$ ,  $\mathcal{L}'_3=\{4,6,7,4\}$ ,  $\mathcal{L}'_4=\{7,8,9,7\}$  为可分离的刚性约束闭环.因此,在顶点 1 固定的情形下,可依次对各个刚性约束闭环进行求解.与整体迭代求解相比,迭代求解的规模大为降低.

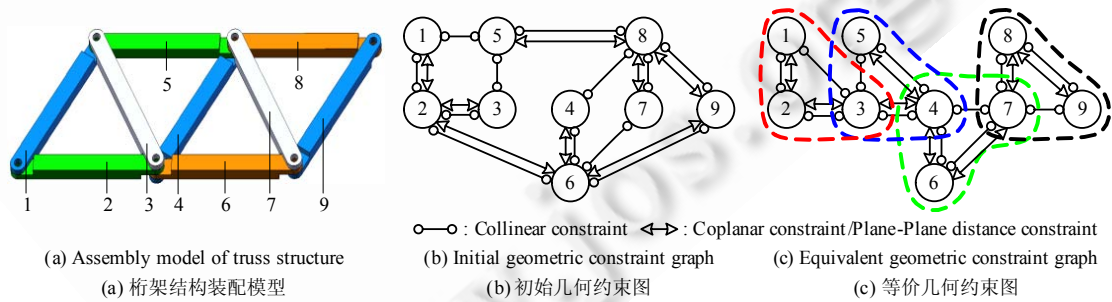


Fig.10 Assembly model of truss structure and its geometric constraint graph  
图 10 桁架结构装配模型及其几何约束图

5 结 论

本文针对三维几何约束系统的求解问题,基于优化几何约束图结构的思路提出了等价性分析方法.该方法充分挖掘三维几何约束系统内蕴的几何知识,依据拆解约束闭环、缩减约束闭环和析出约束闭环等原则对几何

约束图进行等价约束替换处理,实现现有方法无法分解的几何约束系统的进一步分解.在处理范围上,本文方法不仅能够拆解伪约束闭环,而且能够处理可缩减的约束闭环和可分离的共边约束闭环,同时能够自然地处理过约束、完整约束和欠约束的几何约束系统.在处理效率上,本文方法无须对约束闭环的每条约束边的可拆解性进行分析,只需判定闭环内有限条约束边的不可拆解性即可判定约束闭环的不可拆解性,同时采用图论和几何推理相结合的方法判定等价约束的存在性,效率更高.实例分析表明,本文方法能够大大降低约束求解的规模,显著提高约束求解的效率和稳定性.此外,本文方法对几何约束系统的奇异性分析、几何约束系统的相对坐标求解以及装配约束模型向运动学约束模型的转换具有重要意义.

#### References:

- [1] Gao XS, Jiang K. Survey on geometric constraint solving. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2004,16(4): 385–396 (in Chinese with English abstract).
- [2] Lin VC, Gossard DC, Light RA. Variational geometry in computer-aided design. *Computer Graphics*, 1981,15(3):171–177. [doi: 10.1145/965161.806803]
- [3] Hoffmann CM, Lomonosov A, Sitharam M. Decomposition plans for geometric constraint system, I: Performance measures for CAD. *Journal of Symbolic Computation*, 2001,31(4):367–408. [doi: 10.1006/jsco.2000.0402]
- [4] Hoffmann CM, Lomonosov A, Sitharam M. Decomposition plans for geometric constraint system, II: New algorithms. *Journal of Symbolic Computation*, 2001,31(4):409–427. [doi: 10.1006/jsco.2000.0403]
- [5] Li YT, Hu SM, Sun JG. A constructive approach to solving 3D geometric constraint systems using dependence analysis. *Computer-Aided Design*, 2002,34(2):97–108. [doi: 10.1016/S0010-4485(01)00054-9]
- [6] Gao XS, Lin Q, Zhang GF. A C-tree decomposition algorithm for 2D and 3D geometric constraint solving. *Computer-Aided Design*, 2006,38(1):1–13. [doi: 10.1016/j.cad.2005.03.002]
- [7] Peng XB, Lee KW, Chen LP. A geometric constraint solver for 3D assembly modeling. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2005,28(5-6):561–570. [doi: 10.1007/s00170-004-2391-1]
- [8] Gao XS, Huang LD, Jiang K. Geometric constraint solving with geometric transformation. *Science in China (Series F): Information Sciences*, 2001,44(1):50–59. [doi: 10.1007/BF02713939]
- [9] Chen LP, Wang BX, Peng XB, Zhou J. An optimal method of bipartite graph matching for under-constrained geometry solving. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(5):523–530 (in Chinese with English abstract).
- [10] Shi ZL, Chen LP. On equivalence relation and iteration of geometric constraints. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2007,9(26):1207–1211 (in Chinese with English abstract).
- [11] Xia HJ, Wang BX, Chen LP, Huang ZD. 3D geometric constraint solving using the method of kinematic analysis. *Int'l Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2008,35(7-8):711–722. [doi: 10.1007/s00170-006-0748-3]
- [12] Liu Y, Yong YH, Wang B. Solving 3D geometric constraints for a class of closed-loop assemblies. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2008,20(9):1171–1175 (in Chinese with English abstract).
- [13] Peng XB, Chen LP, Zhou FL, Zhou J. Singularity analysis of geometric constraint systems. *Journal of Computer Science and Technology*, 2002,17(3):314–323 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1007/BF02947309]
- [14] Adams JD, Whitney DE. Application of screw theory to constraint analysis of mechanical assemblies joined by features. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2001,123(1):26–32. [doi: 10.1115/1.1334858]
- [15] Li MH, Huang ZD. Instantaneous mobility analysis of parts in an assembly using screw theory. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2008,27(10):1169–1176 (in Chinese with English abstract).
- [16] Kavitha T, Liebchen C, Mehlhorn K, Michail D, Rizzi R, Ueckerdt T, Zweig K. Cycle bases in graphs characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*, 2009,3(4):199–243. [doi: 10.1016/j.cosrev.2009.08.001]

#### 附中文参考文献:

- [1] 高小山,蒋鲲.几何约束求解研究综述. *计算机辅助设计与图形学学报*,2004,16(4):385–396.
- [9] 陈立平,王波兴,彭小波,周济.一种面向欠约束几何系统求解的二部图匹配优化处理方法. *计算机学报*,2000,23(5):523–530.
- [10] 石志良,陈立平.几何约束等价性及等价迭代研究. *机械科学与技术*,2007,9(26):1207–1211.



- [12] 刘勇,雍俊海,王斌.一类闭环约束的装配约束问题求解.计算机辅助设计与图形学学报,2008,20(9):1171-1175.  
 [15] 李明浩,黄正东.基于旋量理论的装配模型中零件瞬时运动分析.机械科学与技术,2008,27(10):1169-1176.



黄学良(1983-),男,江西崇仁人,博士,CCF 学生会员,主要研究领域为几何约束求解,参数化设计,无历史特征造型,智能 CAD.



陈立平(1964-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为几何约束求解,参数化设计,多体系统动力学,多领域建模与仿真.



王波兴(1969-),男,博士,副教授,主要研究领域为变量几何,智能参数化设计,几何约束求解,多体系统动力学.



黄正东(1961-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为三维几何造型,曲面造型与加工,计算机辅助工艺规划,三维模型检索与设计重用.

### 2011 年全国软件与应用学术会议(NASAC 2011)

#### 征文通知

中国计算机学会主办,软件工程专委、系统软件专委和吉林大学承办的“2011 年全国软件与应用学术会议(NASAC 2011)”,将于 2011 年 10 月 28 日-30 日在长春举行。大会将设置特邀报告、论文大会报告、专题 workshop、张贴论文、软件系统原型和产品展示等多种学术交流形式,会议还将与《软件学报》和《计算机学报》合作组织专题特约报告,为与会代表提供丰富的交流平台。会议将出版论文集,并拟将评选出的优秀论文推荐到《电子学报》等杂志。

#### 一、征文范围(包括但不限于)

- |                  |                |              |
|------------------|----------------|--------------|
| 1. 需求工程          | 7. 软件质量、测试与验证  | 13. 分布式系统及应用 |
| 2. 构件技术与软件复用     | 8. 软件再工程       | 14. 软件语言与编译  |
| 3. 面向对象与软件 Agent | 9. 软件工具与环境     | 15. 软件标准与规范  |
| 4. 软件体系结构与设计模式   | 10. 软件理论与形式化方法 | 16. 软件技术教育   |
| 5. 软件开发方法及自动化    | 11. 操作系统       | 17. 计算机应用软件  |
| 6. 软件过程管理与改进     | 12. 软件中间件与应用集成 |              |

#### 二、论文要求

1. 论文必须未在杂志和会议上发表和录用过。
2. 论文篇幅限定 8 页(A4 纸)内。
3. 会议只接受电子文档 PDF 格式提交论文。论文格式的详细要求请参照软件学报投稿文章格式。软件学报网站:

<http://www.jos.org.cn>

4. 投稿方式采用在线投稿: <http://www.easychair.org/conferences/?conf=nasac2011>

#### 三、重要日期

论文征稿截止日期: 2011 年 7 月 5 日

论文录用通知日期: 2011 年 8 月 15 日

#### 四、联系方式

联系人: 王剑飏 鲍锋

通信地址: 130012 吉林大学计算机科学与技术学院

联系电话: 0431-85166269, 0431-85159420

NASAC 2011 会议网址: <http://csw.jlu.edu.cn/NASAC2011>