ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.21, No.1, January 2010, pp.47−54
doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03463

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

有缺指派下的信念修正逻辑*

肖文洁+, 朱朝晖

(南京航空航天大学 信息科学与技术学院,江苏 南京 210016)

Belief Revision Based on Incomplete Valuations

XIAO Wen-Jie+, ZHU Zhao-Hui

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

+ Corresponding author: E-mail: xiaowj_1981@hotmail.com

Xiao WJ, Zhu ZH. Belief revision based on incomplete valuations. *Journal of Software*, 2010,21(1):47−54. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3463.htm

Abstract: Classical belief revision theory and iterated belief revision theory are both developed in the framework of complete valuations. This paper extends the research to the incomplete valuation. Different from complete valuation, incomplete valuation may assign the unknown state to some atomic propositions. Adopting incomplete valuation as possible world, this paper establishes a model-based representation theorem which characterizes the proposed postulates and constrains.
Key words: incomplete valuation; belief revision; representation theorem

摘 要: 经典的 AGM 信念修正理论和以 D-P 假设为代表的迭代信念修正理论都是以完全指派为可能世界而进行的理论研究.把这些研究推广到有缺指派的领域中与完全指派为每个原子命题符号都指派真假值不同,有缺指派是一个三值指派,它可以为每个原子命题符号指派真、假和不确定三值之一.以有缺指派为可能世界,对 D-P 系统进行了推广,证明了相应的表示定理.
关键词: 有缺指派;信念修正;表示定理
中图法分类号: TP18　　**文献标识码**: A

自 20 世纪 80 年代起,信念修正(belief revision)就是人工智能研究领域的热点之一.信念修正主要研究的是 Agent 在接受新知识时,信念集是如何变化的.Alchourrón,Gardenfors 和 Makinson 等人共同创立了信念修正理论[1,2],简写为AGM,是形成较早、影响最大的信念修正理论.同样以公理化结果示人的还有Katsuno和Mendelzon 给出的KM性质[3]等.这些工作的着眼点都在于研究一次信念修正的结果.到 20 世纪 90 年代中期,学者Nayak和Boutilier等人开始探讨多次信念改变即迭代信念修正问题[4−6].其中,Darwiche和Pearl在KM公理的基础上增加了相关假设[7],并基于一种比信念集更复杂的结构——认知态(epistemic state)建立了表示定理.以文献[7]为基础,继续深入研究迭代修正问题的文献还有文献[8−10].近年来,对迭代修正的关注更多地集中到另一种修正算

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60573070, 60496327 (国家自然科学基金); the Jiangsu Provincial Natural Science Foundation of China under Grant No.BK2007191 (江苏省自然科学基金); the Fok Ying-Tung Education Foundation of China under Grant No.101070 (霍英东教育基金)

Received 2008-03-25; Revised 2008-06-11; Accepted 2008-08-11

子——收缩上,相关工作可见文献[11,12].

与相关文献一致,本文所用语言是经典的有限命题逻辑语言$\mathcal{L}$,其中,原子命题符号集合$Atom(\mathcal{L})=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$.依惯例,希腊字母$\alpha,\beta,\mu$等表示合式公式,$Form(\mathcal{L})$是语言$\mathcal{L}$上所有合式公式组成的集合.下面着重介绍 Darwiche 和 Pearl 的工作,本文将要对该工作进行推广.他们研究的对象是认知态,每个认知态Ψ均有一个公式$Bel(\Psi)$与之对应.下文中,$\Psi\vDash\alpha,\Psi\wedge\alpha$和$w\vDash\Psi$分别是$Bel(\Psi)\vDash\alpha,Bel(\Psi)\wedge\alpha$和$w\vDash Bel(\Psi)$的简写.我们把所有认知态组成的集合记为 ES.一般地,大家把信念修正看成是一个算子$\circ$:ES$\times Form(\mathcal{L})\rightarrow$ES.KM 性质包括以下 6 条:

(R*1) $\Psi\circ\mu\vDash\mu$.

(R*2) 如果$\Psi\wedge\mu$可满足,则$\Psi\wedge\mu\equiv\Psi\circ\mu$.

(R*3) 如果μ可满足,则$\Psi\circ\mu$可满足.

(R*4) 如果$\mu_1\equiv\mu_2$,则$\Psi\circ\mu_1\equiv\Psi\circ\mu_2$.

(R*5) $(\Psi\circ\mu)\wedge\phi\vDash\Psi\circ(\mu\wedge\phi)$.

(R*6) 如果$(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$可满足,则$\Psi\circ(\mu\wedge\phi)\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$.

定义 1[7]. 一个把任意认知态Ψ映射到完全指派上全前序(total pre-order)$\preceq_\Psi$的函数被称为是可靠映射(faithful assignment)当且仅当其满足以下两个条件:

(1) 如果$v_1,v_2\vDash\Psi$,则$v_1=_\Psi v_2$;

(2) 如果$v_1\vDash\Psi$且$v_2\nvDash\Psi$,则$v_1\prec_\Psi v_2$,

其中,全前序是指满足连通、自反及传递性的二元关系;$v_1=_\Psi v_2$当且仅当$v_1\preceq_\Psi v_2$且$v_2\preceq_\Psi v_1$;$v_1\prec_\Psi v_2$当且仅当$v_1\preceq_\Psi v_2$但$v_2\preceq_\Psi v_1$不成立.

Darwiche 和 Pearl 工作的一个主要贡献是建立了如下的表示定理:

定理 1[7]. 修正算子$\circ$满足KM性质(R*1)~(R*6)当且仅当存在一个可靠映射$\Psi\mapsto\preceq_\Psi$使得$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(Mods(\mu),\preceq_\Psi)$成立.其中,$\min(Mods(\mu),\preceq_\Psi)$表示序结构$(Mods(\mu),\preceq_\Psi)$中的极小元所组成的集合.

值得一提的是,上述的研究是以完全指派(在此指派下,每个原子命题均被赋予真假值)为可能世界进行的.在实际生活中,由于技术水平和认识工具的限制,人类对事物的认知不可能面面俱到.所以,有缺指派即每个原子命题符号可以被赋予真、假和不确定三值之一的指派是大量存在的.一个很自然的问题就是:能否把已有成果推广到有缺指派的领域中?本文做了一些有益的尝试.我们以有缺指派为可能世界,基于认知态建立了满足 KM 性质的表示定理.

1 有缺指派及性质

一个有缺指派w是$Atom(\mathcal{L})$到集合$\{0,1,u\}$的一个函数.直观上,$w(p)=u$表示在指派w下,p的真值缺省.本文用$W(\mathcal{L})$表示语言$\mathcal{L}$上的有缺指派集合,其中元素以$w_1,w_2,\ldots$表示.表 1 是有缺指派对应的各连接词真值表,其源自 Strong Kleene逻辑[13].

Table 1 Table of the true value

表 1 真值表

α	$\neg\alpha$
0	1
u	u
1	0

$\vee$	0	u	1
0	0	u	1
u	u	u	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	u	1
0	0	0	0
u	0	u	u
1	0	u	1

可以验证,以上 3 个连接词满足德·摩根律、吸收律和分配律.利用上述真值表,对给定$w\in W(\mathcal{L})$,与经典逻辑类似,我们可以将w延拓到整个公式集合上.若$w(\alpha)=1$,则称公式α在w下可满足,以$w\vDash\alpha$表示;称α推出β(用符号$\alpha\vDash\beta$表示)当且仅当对任意$w\in W(\mathcal{L})$,若$w\vDash\alpha$则$w\vDash\beta$;$Mods(\alpha)=_{def}\{w\in W(\mathcal{L}):w\vDash\alpha\}$;$\alpha\equiv\beta$当且仅当$\alpha\vDash\beta$且$\beta\vDash\alpha$.对任意$w\in W(\mathcal{L})$,我们定义$w^{-1}(0)=_{def}\{p_i:p_i\in Atom(\mathcal{L})$且$w(p_i)=0\}$,同理可定义集合$w^{-1}(1)$和$w^{-1}(u)$.对任意$w\in W(\mathcal{L})$,

$form(w)=_{def}(\bigwedge_{p_i\in w^{-1}(1)} p_i)\wedge(\bigwedge_{p_j\in w^{-1}(0)} p_j)$;设$W\subseteq W(\mathcal{L})$,$form(W)=_{def}\bigvee_{w\in W} form(w)$,若$W=\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$,$form(W)$记为

$$form(w_1,w_2,\ldots,w_k).$$

定义 2. 设$w_1,w_2\in W(\mathcal{L})$.若 $w_1^{-1}(0)\subseteq w_2^{-1}(0)$并且 $w_1^{-1}(1)\subseteq w_2^{-1}(1)$,则称$w_2$是$w_1$的补充指派并以符号$w_1\subseteq w_2$表示之.$w_1\subset w_2$当且仅当$w_1\subseteq w_2$但$w_2\subseteq w_1$不成立.集合$\uparrow w=_{def}\{w'\in W(\mathcal{L}):w\subseteq w'\}$.

直观上说,如果$w_1\subseteq w_2$,则表示在w_2下,那些在w_1中已被指派成 0 或 1 的原子命题保持不变,而那些在w_1中被指派为u的原子命题可能会被重新赋值为 0 或 1.自然地,w_2可以看成是w_1的一种拓展,所以称其为w_1的补充指派.有了补充指派的概念,下面我们来介绍如下一些性质.

命题 1. 如果$w_1\subseteq w_2$,则

1.1. $w_1\vDash\alpha$蕴涵$w_2\vDash\alpha$.

1.2. $w_1(\alpha)=0$ 蕴涵$w_2(\alpha)=0$.

证明:只需按公式α的结构复杂度同时归纳证明结论(1.1)和结论(1.2)即可. □

命题 2. 设 $W\subseteq W(\mathcal{L})$.$w\vDash form(W)$当且仅当存在 $w'\in W$ 使得 $w'\subseteq w$.

证明:(⇐)设$w'\in W$并且$w'\subseteq w$.由$w'\in W$,$form(w)=_{def}(\bigwedge_{p_i\in w^{-1}(1)} p_i)\wedge(\bigwedge_{p_j\in w^{-1}(0)}\neg p_j)$和$form(W)=_{def}\bigvee_{w\in W} form(w)$可知$w'\vDash form(W)$.根据命题 1 和$w'\subseteq w$,$w\vDash form(W)$成立.

(⇒)设$w\vDash form(W)$即$w\vDash\bigvee_{w\in W} form(w)$.根据真值表可知,至少存在一个$w'\in W$使得$w\vDash form(w')$,故$(w')^{-1}(1)\subseteq w^{-1}(1)$且$(w')^{-1}(0)\subseteq w^{-1}(0)$.否则,若存在$i\in(w')^{-1}(1)$但$i\notin w^{-1}(1)$,由$form(w')$的结构可知$w\nvDash form(w')$与$w\vDash form(w')$矛盾.可类似证明$(w')^{-1}(0)\subseteq w^{-1}(0)$.根据定义 2,$w'\subseteq w$成立. □

2 表示定理

本节是全文的核心部分,我们将以有缺指派为可能世界,建立与定理 1 类似的表示定理.因为完全指派是有缺指派的特例,所以在语义层面仅有可靠映射的条件是不够的.需要通过适当加强对其上序的限制,来解决这个问题.根据定义 2,有缺指派间存在一种补充关系“$\subseteq$”,这也是有缺指派区别于完全指派的一个显著特点.利用这一特点,可以得到如下的定义 3:

定义 3. 一个把任意认知态Ψ映射到$W(\mathcal{L})$上全前序$\preceq_\Psi$的函数被称为是强可靠映射(strong faithful assignment)当且仅当其满足以下 3 个条件:

(1) 如果$w_1,w_2\vDash\Psi$,则$w_1=_\Psi w_2$;

(2) 如果$w_1\vDash\Psi$且$w_2\nvDash\Psi$,则$w_1\prec_\Psi w_2$;

(3) 对任意$\Psi\in$ES,如果$w_1\subseteq w_2$,则$w_2\preceq_\Psi w_1$.

对任意$W\subseteq W(\mathcal{L})$,$\min(W,\preceq_\Psi)=_{def}\{w\in W:\neg\exists w'(w'\in W\wedge w'\prec_\Psi w)\}$.在不会引起上下文歧义的情况下,我们把$\min(Mods(\mu),\preceq_\Psi)$简记为$\min(\mu,\preceq_\Psi)$.

定义 4. 设$w_1\subseteq w_2$,w_1和w_2的契合度(用符号$\|w_1,w_2\|$表示)定义如下:$\|w_1,w_2\|=_{def}|w_1^{-1}(u)|-|w_2^{-1}(u)|$,其中,$|A|$表示集合 A 的势.

因为本文所用语言$\mathcal{L}$是有限的,所以$|w_1^{-1}(u)|$和$|w_2^{-1}(u)|$就是集合 $w_1^{-1}(u)$ 和 $w_2^{-1}(u)$ 的元素个数.由定义 1 和$w_1\subseteq w_2$可知,$w_1^{-1}(0)\subseteq w_2^{-1}(0)$并且 $w_1^{-1}(1)\subseteq w_2^{-1}(1)$.故有 $w_2^{-1}(u)\subseteq w_1^{-1}(u)$,从而$|w_1^{-1}(u)|\geq|w_2^{-1}(u)|$.由此可知,定义 4 是合理的.

下面我们要证明表示定理,即对任意认知态Ψ,修正算子$\circ$满足 6 条 KM 性质当且仅当存在有缺指派上的强可靠映射:$\Psi\rightarrow\preceq_\Psi$使得$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(Mods(\mu),\preceq_\Psi)$成立.

定义 5. 给定修正算子$\circ$,对任意$\Psi\in$ES,定义$W(\mathcal{L})$上的序$\preceq_\Psi$:$w_1\preceq_\Psi w_2$当且仅当存在 $w_1'\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))$

$\cap\uparrow w_1$对任意 $w_2'\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_2$都有$\| w_1,w_1'\|\le\| w_2,w_2'\|$.

引理 1. 已知修正算子$\circ$满足 6 条KM性质,由定义 5 得到的序$\preceq_\Psi$是$W(\ell)$上的全前序.

证明:根据定义,先给出两个有用的结论.

结论 1. 若$Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_1\neq\varnothing$但$Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_2=\varnothing$,则$w_1\prec_\Psi w_2$.

结论 2. 如果$w_1\vDash\Psi$,则$w_1\preceq_\Psi w_2$.

根据命题 2 和$w_1\vDash\Psi$,有$w_1\vDash\Psi\wedge form(w_1,w_2)$.故$w_1\vDash\Psi\circ form(w_1,w_2)$可由性质(R*2)推出.又因为$\|w_1,w_1\|=0$,所以对任意 $w_2'\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_2$,必然有$\|w_1,w_1\|\le\| w_2,w_2'\|$ (若$Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_2=\varnothing$,由结论 1 可知$w_1\prec_\Psi w_2$).根据$\preceq_\Psi$的定义可知,$w_1\preceq_\Psi w_2$.

因为要证明$\preceq_\Psi$是全前序,所以只需证明$\preceq_\Psi$是连通的、自反的和传递的关系即可.

结论 3. $\preceq_\Psi$是连通的.

根据序的连通性定义,我们需要证明对任意$w_1,w_2\in W(\ell)$,要么$w_1\preceq_\Psi w_2$,要么$w_2\preceq_\Psi w_1$.设$\delta=form(w_1,w_2)$,根据$w_1\vDash\delta$和性质(R*3)可知,$Mods(\Psi\circ\delta)\neq\varnothing$,不妨设$w'\vDash\Psi\circ\delta$.根据性质(R*1),有$w'\vDash\delta$.进而由命题 2 可知:存在$w_i$($i$=1 或 2)使得$w_i\subseteq w'$.故$Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_i\neq\varnothing$(因为集合中有元素$w'$).令$w_j$表示$w_1$和$w_2$中除去$w_i$剩下的可能世界,若$Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_j=\varnothing$,由结论 1 可知$w_i\preceq_\Psi w_j$.若$Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_j\neq\varnothing$,因为语言$\ell$是有限的,所以可以取到集合$Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_i$中与$w_i$的契合度最小的元素和$Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_j$中与$w_j$的契合度最小的元素,不妨分别设为 w_i' 和 w_j' .取$\| w_i,w_i'\|$与$\| w_j,w_j'\|$中较小的一个,不妨设为$\| w_j,w_j'\|$.根据$\preceq_\Psi$的定义可知,$w_j\preceq_\Psi w_i$

结论 4. $\preceq_\Psi$是自反的.

对任意 $w\in W(\ell)$,由 $w\vDash form(w)$和(R*3)可得,$Mods(\Psi\circ form(w))\neq\varnothing$,不妨设 $w'\vDash\Psi\circ form(w)$.根据性质(R*1),有$w'\vDash form(w)$.进而由命题 2 可知,$w\subseteq w'$.综上,$Mods(\Psi\circ form(w))\cap\uparrow w\neq\varnothing$(因为集合中有元素 w').因为语言ℓ是有限的,所以可以取到集合 $Mods(\Psi\circ form(w))\cap\uparrow w$ 中与 w 的契合度最小的元素,不妨假设为 w''.进而,根据 w''的存在性和$\preceq_\Psi$的定义可知,$w\preceq_\Psi w$.

结论 5. $\preceq_\Psi$是传递的.

设$w_1\preceq_\Psi w_2$并且$w_2\preceq_\Psi w_3$,要证明$w_1\preceq_\Psi w_3$.根据$\preceq_\Psi$的定义可知:存在 $w_1^*\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_1$满足:对任意 $w_2'\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_2$,都有

$$\| w_1,w_1^*\|\le\| w_2,w_2'\| \tag{1}$$

存在 $w_2^*\in Mods(\Psi\circ form(w_2,w_3))\cap\uparrow w_2$满足:对任意 $w_3'\in Mods(\Psi\circ form(w_2,w_3))\cap\uparrow w_3$,都有

$$\| w_2,w_2^*\|\le\| w_3,w_3'\| \tag{2}$$

令$\mu=_{def} form(w_1,w_2,w_3)$且$I=_{def}\{i\in\{1,2,3\}:Mods(\Psi\circ\mu)\cap\uparrow w_i\neq\varnothing\}$.我们来证明两个有用的结果.

结果 1. 若$i\in I$,则$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_i,w_j)\equiv\Psi\circ form(w_i,w_j)$并且对任意 $w_i'\in Mods(\Psi\circ form(w_i,w_j))\cap\uparrow w_i$,均有 $w_i'\vDash\Psi\circ form(w_i,w_k)$.其中,$i\neq j\neq k$且$i,j,k\in\{1,2,3\}$.

因为$i\in I$,所以存在 $w_i''\vDash\Psi\circ\mu$且$w_i\subseteq w_i''$.故 $w_i''\vDash form(w_i,w_j)$可由命题 2 和$w_i\subseteq w_i''$推出.进而 $w_i''\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_i,w_j)$.根据性质(R*5)和性质(R*6),等式$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_i,w_j)\equiv\Psi\circ(\mu\wedge form(w_i,w_j))$成立.由吸收律可知$\mu\wedge form(w_i,w_j)\equiv form(w_i,w_j)$.故$\Psi\circ(\mu\wedge form(w_i,w_j))\equiv\Psi\circ form(w_i,w_j)$可由性质(R*4)推出.由此可知,

$$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_i,w_j)\equiv\Psi\circ form(w_i,w_j) \tag{3}$$

设 $w_i'\in Mods(\Psi\circ form(w_i,w_j)\cap\uparrow w_i$,则根据式(3),有 $w_i'\vDash\Psi\circ\mu$.又因为 $w_i'\in\uparrow w_i$,所以由引理 2 可知, $w_i'\vDash form(w_i,w_k)$,故 $w_i'\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_i,w_k)$.根据等式(3),有 $w_i'\vDash\Psi\circ form(w_i,w_k)$.

结果 2. $1\in I$.

如果证明了$I\neq\varnothing$和若$i\in I$则$i-1\in I$(i=2 或 3),那么结果 $1\in I$自然成立.因为$w_2\vDash\mu$,所以根据性质(R*3)有

$Mods(\Psi\circ\mu)\neq\varnothing$.不妨设$w\vDash\Psi\circ\mu$,由性质(R*1)可知$w\vDash\mu$,即$w\vDash form(w_1,w_2,w_3)$.根据命题 2 可知,存在$i\in\{1,2,3\}$使得$w\in\uparrow w_i$.综上,$I\neq\varnothing$.下面证明:若$i\in I$,则$i-1\in I(i=2$ 或$i=3)$.根据公式(1)和公式(2)可知,存在 w_{i-1}^* 使得$w_{i-1}\subseteq w_{i-1}^*$ 且 $w_{i-1}^*\vDash\Psi\circ form(w_{i-1},w_i)(i=2$ 或 3).由结果 1 和$i\in I(i=2$ 或$i=3)$可得,$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_{i-1},w_i)\equiv\Psi\circ form(w_{i-1},w_i)$.故 $w_{i-1}^*\vDash\Psi\circ\mu$ $(i=2$ 或 3)由等式和 $w_{i-1}^*\vDash\Psi\circ form(w_{i-1},w_i)$推出.另外,$w_{i-1}\subseteq w_{i-1}^*$,根据集合$I$的定义,有$i-1\in I$.综上,$1\in I$成立.

由公式(1)可知:存在 $w_1^*\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_1$.进一步地,根绝结果 1 和结果 2,有如下结论成立:

$$w_1^*\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_1 \tag{4}$$

下面分情况继续加以讨论.

情形 1. $Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_3=\varnothing$.

根据结论 1,$w_1\preceq_\Psi w_3$成立.

情形 2. $Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_3\neq\varnothing$.

不妨设 $w_3'\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_3$.根据结果 1 和结果 2,我们有$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_1,w_3)\equiv\Psi\circ form(w_1,w_3)$.故 $w_3'\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w_1,w_3)$.又因为 $w_3'\in\uparrow w_3$,所以根据集合I的定义可得 $3\in I$.进而,由结果 2 的第 2 个命题可知$I=\{1,2,3\}$.由结果 1 和 $I=\{1,2,3\}$,对任意的 $i,j,k\in\{1,2,3\}$且 $i\neq j\neq k$,我们有如下结果:

若 $w_i'\in Mods(\Psi\circ form(w_i,w_j))\cap\uparrow w_i$,则

$$w_i'\vDash\Psi\circ form(w_i,w_k) \tag{5}$$

因为公式(5)和公式(2): $w_2^*\in Mods(\Psi\circ form(w_2,w_3))\cap\uparrow w_2$,所以 $w_2^*\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_2))\cap\uparrow w_2$.进而根据公式 (1) 有 $\|w_1,w_1^*\|\leq\|w_2,w_2^*\|$. 对任意 $w_3''\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_3$, 根据公式 (5) 有 $w_3''\in Mods(\Psi\circ form(w_2,w_3))\cap\uparrow w_3$.再由公式(2)可知,$\|w_2,w_2^*\|\leq\|w_3,w_3''\|$.故$\|w_1,w_1^*\|\leq\|w_2,w_2^*\|\leq\|w_3,w_3''\|$成立.综合之,我们有公式(4):存在 $w_1^*\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_1$ 且对任意 $w_3''\in Mods(\Psi\circ form(w_1,w_3))\cap\uparrow w_3$ 均有$\|w_1,w_1^*\|\leq\|w_3,w_3''\|$.依据$\preceq_\Psi$的定义,可以得到$w_1\preceq_\Psi w_3$.

综上所述,由结论 3~结论 5 可知,$\preceq_\Psi$是$W(\mathcal{L})$上的全前序. □

引理 2. 设$\circ$是一个满足 6 条KM性质的修正算子.对任意$\Psi\in$ES,把其对应到由定义 5 得到的序$\preceq_\Psi$上,这样得到的映射$\Psi\mapsto\preceq_\Psi$是强可靠映射.

证明:我们证明此映射满足下面 3 个性质即可:

(1) 如果$w_1,w_2\vDash\Psi$,则$w_1=_\Psi w_2$.

根据$w_1,w_2\vDash\Psi$和引理 1 的结论 2,可知$w_1=_\Psi w_2$.

(2) 如果$w_1\vDash\Psi$且$w_2\nvDash\Psi$,则$w_1\prec_\Psi w_2$.

令$\delta=_{def}form(w_1,w_2)$.根据引理 1 的结论 2 和$w_1\vDash\Psi$可知,$w_1\preceq_\Psi w_2$.因为$w_1\vDash\Psi\wedge\delta$和性质(R*2),所以$\Psi\wedge\delta\equiv\Psi\circ\delta$.进而有$w_1\vDash\Psi\circ\delta$且$w_2\nvDash\Psi\circ\delta$(否则,由前面的等式可得$w_2\vDash\Psi$与前提$w_2\nvDash\Psi$矛盾).下面证明$w_2\preceq_\Psi w_1$不成立.假设$w_2\preceq_\Psi w_1$,由定义可知,存在 $w_2'\in Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_2$,对任意 $w_1'\in Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_1$,都有$\|w_2,w_2'\|\leq\|w_1,w_1'\|$.因为$w_2\nvDash\Psi\circ\delta$,所以$\|w_2,w_2'\|>0$.另一方面,由$w_1\vDash\Psi\circ\delta$可知,$w_1\in Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_1$并且$\|w_1,w_1\|=0$.比较两者的契合度,有$\|w_1,w_1\|<\|w_2,w_2'\|$,这与$\|w_2,w_2'\|\leq\|w_1,w_1'\|$矛盾.故$w_1\preceq_\Psi w_2$且$w_2\preceq_\Psi w_1$不成立,由此可知$w_1\prec_\Psi w_2$.

(3) 对任意$\Psi\in$ES,如果$w_1\subseteq w_2$,则$w_2\preceq_\Psi w_1$.

设$w_1\subseteq w_2$并且令$\delta=_{def}form(w_1,w_2)$.首先说明

$$Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_1=Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_2=Mods(\Psi\circ\delta)\neq\varnothing \tag{6}$$

因为命题 2,所以$w_2\vDash\delta$.根据性质(R*3),有$Mods(\Psi\circ\delta)\neq\varnothing$.由$w_1\subseteq w_2$和$form(\cdot)$的定义可知,$\delta=form(w_2)$.设$w'\in Mods(\Psi\circ\delta)$,由性质(R*1)可得$w'\vDash\delta$.进而,$w'\in\uparrow w_2$可由命题 2 推出.综上,$Mods(\Psi\circ\delta)\subseteq\uparrow w_2$成立.另一方面,因为$w_1\subseteq w_2$,所以$\uparrow w_2\subseteq\uparrow w_1$.根据$Mods(\Psi\circ\delta)\subseteq\uparrow w_2\subseteq\uparrow w_1$和$Mods(\Psi\circ\delta)\neq\varnothing$,可知公式(6)成立.

根据公式(6)和$w_1\subseteq w_2$,有:对任意$w'\in Mods(\Psi\circ\delta)$,均有

$$w_1\subseteq w_2\subseteq w' \tag{7}$$

由$Mods(\Psi\circ\delta)\neq\varnothing$、语言$\mathcal{L}$的有限性以及公式(7),可以取定集合$Mods(\Psi\circ\delta)$中与$w_1$契合度最小的元素,设为$w^*$.对任意$w'\in Mods(\Psi\circ\delta)$,均有$\|w_1,w^*\|\le\|w_1,w'\|$.根据$w^*\in Mods(\Psi\circ\delta)$和公式(7),自然有$w_1\subseteq w_2\subseteq w^*$,故$\|w_2,w^*\|\le\|w_1,w^*\|$.根据两个契合度不等式可知,对任意$w'\in Mods(\Psi\circ\delta)=Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_1$,均有$\|w_2,w^*\|\le\|w_1,w'\|$.综上,存在$w^*\in Mods(\Psi\circ\delta)=Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_2$,对任意$w'\in Mods(\Psi\circ\delta)\cap\uparrow w_1$,均有$\|w_2,w^*\|\le\|w_1,w'\|$.根据$\preceq_\Psi$的定义,可得$w_2\preceq_\Psi w_1$.

综上所述,此映射是强可靠映射. □

定理 2. 设$\circ$是一个满足 6 条KM性质的修正算子,存在一个强可靠映射$\Psi\mapsto\preceq_\Psi$使得$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi)$.

证明:我们构造如下映射:对任意$\Psi\in$ES,把其对应到由定义 5 得到的序$\preceq_\Psi$上.根据引理 1 和引理 2 可知,这样构造的映射就是强可靠映射.我们从两个方向来证明等式成立.

1. $Mods(\Psi\circ\mu)\subseteq\min(\mu,\preceq_\Psi)$.

设$w\in Mods(\Psi\circ\mu)$,即$w\vDash\Psi\circ\mu$.根据性质(R*1)有$w\vDash\mu$,即$w\in Mods(\mu)$.故只需证明对任意$w'\vDash\mu$,均有$w\preceq_\Psi w'$.根据命题 2 可知,$w\vDash form(w,w')$.故$w\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w')$.进而,由性质(R*5)和性质(R*6)可知

$$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w')\equiv\Psi\circ(\mu\wedge form(w,w')) \tag{8}$$

下面将证明$\mu\wedge form(w,w')\equiv form(w,w')$.由左边公式可以推出右边公式是显然成立的.设$w^*\vDash form(w,w')$,由命题 2 可知,$w\subseteq w^*$或者$w'\subseteq w^*$.因为$w\vDash\mu$且$w'\vDash\mu$,所以根据命题 1 有$w^*\vDash\mu$.故$\mu\wedge form(w,w')\equiv form(w,w')$成立.

进而,由性质(R*4)可得$\Psi\circ(\mu\wedge form(w,w'))\equiv\Psi\circ form(w,w')$.根据等式(8)可知,$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w')\equiv\Psi\circ form(w,w')$.由$w\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w')$可以推出$w\vDash\Psi\circ form(w,w')$.故存在$w\in Mods(\Psi\circ form(w,w'))\cap\uparrow w$且$\|w,w\|=0$.对任意$w''\in Mods(\Psi\circ form(w,w'))\cap\uparrow w'$均有$\|w,w\|\le\|w',w''\|$(若集合为空,由引理 1 的结论 1 可知,$w\preceq_\Psi w'$).符合$w\preceq_\Psi w'$的定义,故$w\preceq_\Psi w'$得证.

2. $\min(\mu,\preceq_\Psi)\subseteq Mods(\Psi\circ\mu)$.

设$w\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$,于是可知$w\vDash\mu$且对任意$w^*\vDash\mu$均有$w\preceq_\Psi w^*$,故存在$w'\in Mods(\Psi\circ form(w,w^*))\cap\uparrow w$满足:对任意$(w^*)'\in Mods(\Psi\circ form(w,w^*))\cap\uparrow w^*$,都有

$$\|w,w'\|\le\|w^*,(w^*)'\| \tag{9}$$

因为$w\vDash\mu$和性质(R*3),所以$Mods(\Psi\circ\mu)\neq\varnothing$.不妨设$w_1\vDash\Psi\circ\mu$,由性质(R*1)可知,$w_1\vDash\mu$.根据命题 2 可知,$w_1\vDash form(w,w_1)$.故$w_1\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w_1)$,进而,根据性质(R*5)和性质(R*6),有

$$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w_1)\equiv\Psi\circ(\mu\wedge form(w,w_1)) \tag{10}$$

下面将证明$\mu\wedge form(w,w_1)\equiv form(w,w_1)$.由左边公式可以推出右边公式是显然成立的.设$w_0\vDash form(w,w_1)$,由引理 2 可知$w\subseteq w_0$或者$w_1\subseteq w_0$.因为$w\vDash\mu$且$w_1\vDash\mu$和命题 1,所以$w_0\vDash\mu$.故$\mu\wedge form(w,w_1)\equiv form(w,w_1)$.进而,由性质(R*4)可得$\Psi\circ(\mu\wedge form(w,w_1))\equiv\Psi\circ form(w,w_1)$.根据等式(10),如下等式成立:

$$(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w_1)\equiv\Psi\circ form(w,w_1) \tag{11}$$

故由$w_1\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge form(w,w_1)$可以推出$w_1\vDash\Psi\circ form(w,w_1)$且$\|w_1,w_1\|=0$.根据公式(9),存在$w'\in Mods(\Psi\circ form(w,w_1))\cap\uparrow w$使得$\|w,w'\|\le\|w_1,w_1\|=0$.故必然有$w=w'$,即$w\vDash\Psi\circ form(w,w_1)$.由公式(11)可知,$w\vDash\Psi\circ\mu$. □

定理 2 告诉我们,可以从给定的满足 KM 性质的修正算子出发,构造一个从认知态到有缺指派的强可靠映射并且两者满足$\min(\mu,\preceq_\Psi)=Mods(\Psi\circ\mu)$.下面需要证明另一个方向即从强可靠映射出发,找到一个满足KM性质的修正算子使得$\min(\mu,\preceq_\Psi)=Mods(\Psi\circ\mu)$成立.在证明这个结论之前,先来介绍一个有用的引理.

引理 3. 设有一个强可靠映射:$\Psi\mapsto\preceq_\Psi$,则对任意$\mu\in Form(\mathcal{L})$均有$Mods(form(\min(\mu,\preceq_\Psi)))=\min(\mu,\preceq_\Psi)$.

证明:($\subseteq$)设$w\vDash form(\min(\mu,\preceq_\Psi))$.根据命题 2 可知,存在$w'\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$使得$w'\subseteq w$.由$w'\vDash\mu$和引理 1 可得,$w\vDash\mu$.又因为强可靠映射的条件(3)和$w'\subseteq w$,所以$w\preceq_\Psi w'$.进而,由$w'\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$,$w\preceq_\Psi w'$和$w\vDash\mu$可得$w\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$.

($\supseteq$)设$w\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$.由命题 2 可知,$w\vDash form(\min(\mu,\preceq_\Psi))$. □

定理 3. 设有一个强可靠映射:$\Psi\mapsto\preceq_\Psi$.我们定义$\Psi\circ\mu=_{def}form(\min(\mu,\preceq_\Psi))$,则$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi)$,并且这样定义的修正算子$\circ$满足 KM 性质(R*1)~性质(R*6).

证明:因为$\Psi\circ\mu=_{def}form(\min(\mu,\preceq_\Psi))$和引理 3,所以我们有

$$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi) \tag{12}$$

下面分别证明修正算子$\circ$满足 KM 的 6 条性质.

(R*1) $\Psi\circ\mu\vdash\mu$.

设$w\vDash\Psi\circ\mu$,由等式$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi)$,易知$w\vDash\mu$.

(R*2) 如果$\Psi\wedge\mu$可满足,则$\Psi\wedge\mu\equiv\Psi\circ\mu$.

设$w\vDash\Psi\wedge\mu$.根据强可靠映射的条件(1)和条件(2),有$w\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$.故$Mods(\Psi\wedge\mu)\subseteq Mods(\Psi\circ\mu)$成立.下面证明$Mods(\Psi\circ\mu)\subseteq Mods(\Psi\wedge\mu)$.用反证法,假设存在$w_1\vDash\Psi\circ\mu$但$w_1\nvDash\Psi\wedge\mu$.由$w_1\vDash\Psi\circ\mu$和性质(R*1)可知,$w_1\vDash\mu$.进而,由$w_1\nvDash\Psi\wedge\mu$可以推出$w_1\nvDash\Psi$.因为$\Psi\wedge\mu$可满足,所以不妨设$w_2\vDash\Psi\wedge\mu$.根据强可靠映射的条件(2)、$w_1\nvDash\Psi$和$w_2\vDash\Psi$可知,$w_2\prec_\Psi w_1$.这与$w_1\in Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi)$矛盾.综上,我们有$\Psi\wedge\mu\equiv\Psi\circ\mu$.

(R*3) 如果μ可满足,则$\Psi\circ\mu$可满足.

因为μ可满足,所以$Mods(\mu)\neq\varnothing$.进而由语言$\mathcal{L}$的有限性可知,$\min(\mu,\preceq_\Psi)\neq\varnothing$.根据$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi)$,有$Mods(\Psi\circ\mu)\neq\varnothing$.

(R*4) 如果$\mu_1\equiv\mu_2$,则$\Psi\circ\mu_1\equiv\Psi\circ\mu_2$.

设$\mu_1\equiv\mu_2$即$Mods(\mu_1)=Mods(\mu_2)$.根据$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi)$,易知$\Psi\circ\mu_1\equiv\Psi\circ\mu_2$.

(R*5) $(\Psi\circ\mu)\wedge\phi\vdash\Psi\circ(\mu\wedge\phi)$.

用反证法证明.假设存在$w\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$但$w\nvDash\Psi\circ(\mu\wedge\phi)$.根据公式(12),有$w\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$.进而,由$w\vDash\Psi\circ\mu$和性质(R*1)可知,$w\vDash\mu$,故$w\in Mods(\mu\wedge\phi)$.另一方面,因为$w\nvDash\Psi\circ(\mu\wedge\phi)$,所以$w\notin\min(\mu\wedge\phi,\preceq_\Psi)$可由公式(12)推出.根据$w\in Mods(\mu\wedge\phi)$可知,存在$w'\vDash\mu\wedge\phi$且$w'\prec_\Psi w$.这与$w\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$矛盾.

(R*6) 如果$(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$可满足,则$\Psi\circ(\mu\wedge\phi)\vdash(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$.

因为$(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$可满足,所以不妨设$w_1\vDash(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$.故$w_1\vDash\phi$且$w_1\vDash\Psi\circ\mu$,进而根据公式(12),我们有$w_1\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$.用反证法证明,假设存在$w\vDash\Psi\circ(\mu\wedge\phi)$但$w\nvDash(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$.由公式(12)可知,$w\in\min(\mu\wedge\phi,\preceq_\Psi)$).因为$w\nvDash(\Psi\circ\mu)\wedge\phi$和$w\vDash\phi$,所以$w\nvDash\Psi\circ\mu$.根据公式(12)可知,$w\notin\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$).进而,由$w_1\in\min(\mu,\preceq_\Psi)$和$\preceq_\Psi$是全前序,我们有$w_1\prec_\Psi w$.这与$w_1\vDash\mu\wedge\phi$和$w\in\min(\mu\wedge\phi,\preceq_\Psi)$)矛盾,故假设不正确. □

定理 4. 设$\circ$是一个修正算子,它满足KM性质(R*1)~性质(R*6)当且仅当存在一个强可靠映射$\Psi\mapsto\preceq_\Psi$,使得

$$Mods(\Psi\circ\mu)=\min(\mu,\preceq_\Psi).$$

证明:由定理 2 和定理 3 可得. □

3 结束语及相关工作比较

针对当前大部分信念修正研究工作均是以完全指派为可能世界,而现实生活中又确实存在有缺指派的情形,本文把信念修正的研究推广到有缺指派的领域中.我们挖掘出有缺指派与完全指派相比独有的补充关系,并以此对有缺指派上的序加以限制,得到如下的表示定理:对任意认知态Ψ,修正算子$\circ$满足 6 条 KM 假设当且仅当

存在有缺指派上的强可靠映射$\Psi \rightarrow \preceq_{\Psi}$,使得等式$Mods(\Psi \circ \mu)=\min(Mods(\mu), \preceq_{\Psi})$成立.

本文有缺指派遵循Strong Kleene逻辑的真值表规定[13],同样以此逻辑系统为模型框架研究信念修正理论的还有西班牙学者Matias Alvarado和墨西哥学者Gustavo Nunez[14,15].本文与文献[14,15]相比有以下几点不同:首先,本文工作是对DP系统的推广,侧重于迭代信念修正,文献[14,15]旨在探讨如何找到一系列演化的框架从而消灭三值中那个不确定的状态;其次,不同的研究目标决定了两个工作中语义结构的区别,本文基于带序结构的所有有缺指派的集合开展表示定理的证明,而文献[14,15]并不要求所有的解释都在其语义结构中;最后,本文通过表示定理的建立,从理论上说明了以带序结构的有缺指派作为信念修正逻辑基础的合理性,而文献[14,15]更侧重于基本思想的阐述,通过直观的例子对其引入的概念加以说明,而理论上并未深入展开.

References:

[1] Alchourron C, Gardenfors P, Makinson D. On the logic of theory change: Partial meet functions for contraction and revision. Journal of Symbolic Logic, 1985,50(2):510−530.

[2] Alchourron C, Makinson D. On the logic of theory change: Safe contraction. Studia Logica, 1985,44(4):405−422.

[3] Katsuno H, Mendelzon AO. Propositional knowledge base revision and minimal change. Artificial Intelligence, 1991,52(3): 263−294.

[4] Williams MA. Transmutations of knowledge systems. In: Doyle J, Sandewall E, Torasso P, eds. Proc. of the 4th Int'l Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Bonn: Morgan Kaufmann Publishers, 1994. 619−629.

[5] Nayak AC. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. Erkenntnis, 1994,41(3):353−390.

[6] Boutilier C. Iterated revision and minimal change of conditional beliefs. Journal of Philosophical Logic, 1996,25(3):262−304.

[7] Darwixhe A, Pearl J. On the logic of iterated belief revision. Artificial Intelligence, 1997,89(1):1−29.

[8] Konieczny S, Pérez RP. A framework for iterated revision. Journal of Applied Non-Classical Logics, 2000,10(3-4):339−367.

[9] Yi J, Thielscher M. Iterated belief revision, revised. Artificial Intelligence, 2007,171(1):1−18.

[10] Rott H. Change, Choice and Inference: A Study of Belief Revision and Nonmonotonic Reasoning. Oxford: Oxford University Press, 2001.

[11] Bochman A. Contraction of epistemic states: A general theory. In: Williams MA, Rott H, eds. Proc. of the Frontiers in Belief Revision. Kluwer, 2001. 195−220.

[12] Nayak AC, Goebel R, Orgun MA, Pham T. Taking Levi identity seriously: A plea for iterated belief contraction. In: Proc. of the 1st Int'l Conf. on Knowledge Science, Engineering and Management. LNAI, Springer-Verlag, 2006. 305−317. http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/db/conf/ksem/ksem2006.html

[13] Kleene SC, Wrote; Mo SC, Trans. Introduction to Meta Mathematics (B). Beijing: Science Press, 1985. 368−390 (in Chinese).

[14] Alvarado M, Nunez G. Belief increasing in SKL model frames. In: Proc. of the 12th Brazilian Symp. on Artificial Intelligence: Advances in Artificial Intelligence. LNCS, Springer-Verlag, 1995. 28−38. http://portal.acm.org/toc.cfm?id=645849&type=proceeding&coll=GUIDE&dl=GUIDE&CFID=68411396&CFTOKEN=94140887

[15] Alvarado M, Nunez G. Change of belief in SKL model frames. In: Wahlster W, ed. Proc. of the 12th European Conf. on Artificial Intelligence. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 1996. 1123−1128.

附中文参考文献:

[13] Kleene SC,著;莫绍揆,译.元数学导论(下册).北京:科学出版社,1985.368−390.

肖文洁(1981－),女,江苏南京人,博士生,主要研究领域为非单调推理,信念修正.

朱朝晖(1970－),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机科学中的逻辑学.