ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.18, No.11, November 2007, pp.2728−2739
DOI: 10.1360/jos182728

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

一种基于多类型偏好的偏好逻辑*

张志政[1,2+], 邢汉承[1], 王蓁蓁[1], 倪庆剑[1]

[1](东南大学 计算机科学与工程学院,江苏 南京 210096)

[2](南京大学 计算机软件新技术国家重点实验室,江苏 南京 210093)

A Preference Logic Based on Various Kinds of Preferences

ZHANG Zhi-Zheng[1,2+], XING Han-Cheng[1], WANG Zhen-Zhen[1], NI Qing-Jian[1]

[1](School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

[2](State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

+ Corresponding author: Fax: +86-25-52190880, E-mail: seu_zzz@seu.edu.cn, http://www.seu.edu.cn

Zhang ZZ, Xing HC, Wang ZZ, Ni QJ. A preference logic based on various kinds of preferences. *Journal of Software*, 2007,18(11):2728−2739. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2728.htm

Abstract: Presently, a whole logic system is still absent to represent and reason various kinds of preferences. In this paper, a preference logic MPL (logic of many kinds of preference) is introduced to supply the gap. In addition, recurring to the minimal/maximal specificity principle, a non-monotonic semantics of MPL's language L_{MPL} is defined, and the application and capability of MPL are initially investigated by rewriting preferences expressed by ranked knowledge based into L_{MPL}. Moreover, the conclusion and the prospective are presented in the end.
Key words: preference; preference logic; preference strategy; ranked knowledge base

摘 要: 针对目前缺乏多类型偏好共存的偏好逻辑系统的现状,提出并构造了一个能够描述和推理多种类型偏好的逻辑系统MPL(logic of many kinds of preference).在进一步提出MPL语言L_{MPL}基于最粗糙/最细致描述原则的非单调语义基础上,通过分级知识库这种常用偏好表示方法的L_{MPL}重写,初步考察了L_{MPL}表示能力,最后进行总结并提出需要进一步研究解决的问题.
关键词: 偏好;偏好逻辑;偏好策略;分级知识库
中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

偏好是人工智能领域新的重要的研究内容.人工智能研究人员通常把偏好看作是Agent具有的一种内部状态或者常识,以期采用偏好解释Agent的智能行为,实现快速、有效的偏好处理,并取得初步成果[1−3].偏好研究在哲学逻辑中有长远的历史[4],特别是von Wright提出的偏好逻辑及其定义的强、弱和ceteris paribus这 3 类偏好[5],因其简单、直观的特点,对当前人工智能偏好的逻辑表示和推理研究具有直接和广泛的影响[1].

Souhila Kaci和Leendert van der Torre注意到,当前人工智能偏好研究往往都只是针对在特定应用中von Wright定义的 3 种偏好类型之一,而实际决策问题中 3 种类型偏好往往共存的事实,先后在 2005 年欧洲符号和

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.90412014 (国家自然科学基金); the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China under Grant No.BK2003001 (江苏省自然科学基金)

Received 2006-12-10; Accepted 2007-03-08

定性的不确定推理会议与 2005 年国际人工智能联合大会的偏好研究专题讨论会上明确提出多类型偏好共存情况下的推理和决策问题.例如，当选购汽车时,对汽车的颜色、厂家、造型等属性的偏好可以描述为“只选欧洲生产的,同款中要白色的,尽量是有天窗的”,显然,买家在厂家、颜色、造型上的偏好不同,3 种偏好类型同时存在(根据第 1.1 节的介绍,这 3 个偏好依次是强偏好、ceteris paribus偏好和弱偏好).其基本思路是,基于 4 种Agent选择认知方式划分偏好类型,结合von Wright合取扩展原理和ceteris paribus原理定义 8 种更细致的偏好类型,并提出一种多类型偏好表示语言及其非单调推理方法[6,7].

鉴于偏好扮演角色和根源的多样性导致的偏好种类和表示方法的多样性[1],虽然多类型偏好共存情况下的决策研究刚被明确提出,尚未展开,但是,有些研究人员已经开始注意并接受了多类型偏好同时共存的现状:von Wright提出 3 种类型偏好,实际上是为了弥补von Wright偏好逻辑中一种偏好不能描述实际当中很多偏好认知现象的不足;Johan van Benthem[8]从哲学逻辑公理化和形式化偏好角度,提出 4 种偏好定义偏好现象的想法;从偏好的简洁表示和逻辑程序设计角度出发,Gerhard Brewka[9]提出基于分级知识库的定性偏好表示语言LPD(logical preference description),能够描述多种偏好策略*.

虽然不同学者面对不同的目标提出了不同的偏好划分方法,但是,为实现复杂的实际推理系统,提供良好的基础,当前需要尽快解决的关键问题有:

- 缺乏多类型偏好逻辑,尚无完整的刻画多类型偏好共存情况的逻辑系统;
- 缺乏对当前各个学者的偏好分类合理性的考察,为满足实际需要,分类的合理性可以表现为是否能够尽可能多地表示实际偏好现象,或者从偏好的逻辑表示语言角度出发,多类型偏好逻辑语言的表达能力越强,就越能描述实际偏好现象,表示这种划分方法越合理.

鉴于von Wright的 3 种偏好类型对人工智能偏好研究的重要影响以及文献[6,7]的工作基础,针对上述两个问题,本文首先介绍并分析了von Wright的 3 种类型偏好的定义以及文献[6,7]的工作和存在的问题;其次,通过剔除von Wright合取扩展原理的偏好划分,改进了文献[6,7]的偏好划分方法,并在此基础上,提出能够表示这些偏好的多类型偏好逻辑MPL(logic of many kinds of preference);然后,在定义了MPL语言L_{MPL}的非单调语义基础上,通过分级知识库这种常用偏好表示方法的L_{MPL}重写,初步探讨了L_{MPL}较强的表达能力和应用;最后,总结本文并展望进一步的研究工作.

1 知识背景

1.1 von Wright偏好

von Wright 将偏好作为基本认知现象,提出 3 个基本假设:① 偏好是内在固有的和主观存在的,无须探求其发生的外部原因,所以,偏好逻辑只要描述偏好(集),并基于此提出推理新信息的过程;② 偏好是建立在事件发生状态(states of affairs)上的,也就意味着在偏好逻辑中,偏好是基于现实事件的一阶描述,其他关于行为和方法(actions and instruments)上的偏好都可以采用基于事件的偏好推出;③ 偏好是在“其他情况都相同”基础上的评价,亦即 ceteris paribus 原则.例如,某人喜欢吃中餐,那么当他选择餐馆时,ceteris paribus 原则表示在餐馆的服务、卫生等情况都相同的基础上,他偏好于中餐馆.

在 3 个假设和命题逻辑语言基础上,von Wright 首先尝试通过添加严格偏好算子 $\boldsymbol{P}$ 提出了一个偏好逻辑的形式公理系统,其公理共有 5 条,可以分为两组:第 1 组描述了偏好关系的反对称和传递性,第 2 组 3 条公理描述了偏好关系的在事件状态上的扩展形式.

第 1 组:① $\forall x,y,x\boldsymbol{P}y\to\neg y\boldsymbol{P}x$(反对称公理);② $\forall x,y,z,x\boldsymbol{P}y\wedge y\boldsymbol{P}z\to x\boldsymbol{P}z$(传递公理)

第 2 组:③ $a\boldsymbol{P}b\equiv(a\wedge\neg b)\boldsymbol{P}(b\wedge\neg a)$(合取扩展原理);④ $a\vee b\boldsymbol{P}c\equiv a\boldsymbol{P}c\wedge b\boldsymbol{P}c$(析取分配原理);

⑤ $a\boldsymbol{P}b\equiv(a\wedge c)\boldsymbol{P}(b\wedge c)\wedge(a\wedge\neg c)\boldsymbol{P}(b\wedge\neg c)$(ceteris paribus 原理:其他情况都相同).

* 分级知识库通常被看作是偏好的逻辑表示的主要方法[9−11].在分级知识库上实施不同的偏好策略,就能得到不同的偏好信息,所以从偏好表示的角度可以认为,不同的偏好策略表征了不同的偏好类型.

在上述“逻辑”系统中,von Wright 没有明确指出 x,y,a,b,c 代表什么、事件状态是什么,没有指明 $\boldsymbol{P}$ 算子是什么.因此,这个形式系统受到逻辑学家的批评,合取扩展原理受到广泛质疑.例如,带雨衣表示为命题 p,带雨伞表示为命题 q,对于“喜欢带雨衣胜过雨伞”这样的偏好描述,表示为 $p\boldsymbol{P}q$.在合取扩展公理作用下,表达了 $p\wedge\neg q\boldsymbol{P}q\wedge\neg p$,亦即“喜欢带雨衣不带雨伞胜过带雨伞而不带雨衣”.后来的偏好逻辑研究学者认为“它扭曲了 Agent 表达的意思”.例如,在没有其他约束条件下,“喜欢带雨衣胜过雨伞”包含着“带雨衣和雨伞也胜过只带雨伞而不带雨衣”这样的信息.通常情况下,把第 1 组“公理”作为证明系统的公理,而把第 2 组“公理”作为推理模式.每个事件状态就是所有命题变量上的一个指派,也可以表示为包含所有命题变量的字的合取式(有些文献中称为完全式)或者表示为命题逻辑的模型.为了应对挑战,von Wright 后来又提出将偏好划分为 3 类:

(1) 强偏好:C环境下,s偏好于t,当且仅当C环境下满足s且不满足t的世界都好于C环境下满足t且不满足s的世界.

(2) 弱偏好:在C环境下,s偏好于t,当且仅当C环境下存在满足s的世界好于C环境下某些满足t的世界,而C环境不存在满足t的世界好于C环境下某些满足s的世界.

(3) Ceteris paribus偏好:对任意环境C,C环境下满足s的世界都好于C环境下满足t的世界.

虽然 von Wright 的努力没有达到预期目的,但是他的工作对于后来的人工智能研究人员具有重要影响,Jon Doyle 和 Wellman 将偏好引入人工智能研究领域的开创性工作,就是在 ceteris paribus 原则的基础上进行的.

1.2 Souhila Kaci和Leendert van der Torre偏好

基于命题逻辑语言和von Wright合取扩展原理,Souhila Kaci和Leendert van der Torre提出全前序上的 16 种偏好类型(为了简便,下面称为K-T偏好),本质上,用$[\![\phi]\!]$表示命题公式ϕ的命题逻辑模型集,把“ϕ偏好于ψ”按照Agent的认知情况解释为 16 种$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$和$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$之间的比较方式.首先将Agent的认知情况分为 4 种:

① 有限乐观(locally optimistic):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“好”的和$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“好”的做比较.

② 有限悲观(locally pessimistic):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“差”的和$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“差”的做比较.

③ 投机(opportunistic):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“好”的和$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“差”的做比较.

④ 谨慎(careful):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“差”的和$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“好”的做比较.

据此,首先定义 8 种偏好,形式上,给定命题逻辑语言指派集W上的全前序$\succeq$,定义$M(\phi,\succeq)=\{w\in[\![\phi]\!]\,|\,w'\in[\![\phi]\!]\Rightarrow w\succeq w'\}$,$m(\phi,\succeq)=\{w\in[\![\phi]\!]\,|\,w'\in[\![\phi]\!]\Rightarrow w'\succeq w\}$,偏好类型的定义如下:

① $(W,\succeq)$满足$\phi\,{}^{x}\!\!\geq^{y}\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\neg\psi,\succeq)$,$\forall w'\in y(\neg\phi\wedge\psi,\succeq)$满足$w\succeq w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$;

② $(W,\succeq)$满足$\phi\,{}^{x}\!\!>^{y}\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\neg\psi,\succeq)$,$\forall w'\in y(\neg\phi\wedge\psi,\succeq)$满足$w\succ w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$.

显然,${}^{m}\!\!>^{M}$是全前序上的von Wright强偏好,${}^{m}\!\!>^{m}$,${}^{M}\!\!>^{m}$,${}^{M}\!\!>^{M}$是基于合取扩展公理对全前序上的von Wright弱偏好的进一步划分甚至扩展,${}^{x}\!\!\geq^{y}$是它们的非严格形式.为了表示ceteris paribus偏好,Souhila Kaci和Leendert van der Torre根据Jon Doyle和Wellman[12]对ceteris paribus原则的改进**,设上下文等价函数η,γ满足$\gamma\in\eta(\phi\wedge\neg\psi,\ \neg\phi\wedge\psi)$,新添加了 8 种偏好:

③ $(W,\succeq,\eta)$满足$\phi\,{}^{x}\!\!\geq_{c}^{y}\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\neg\psi\wedge\gamma,\succeq)$,$\forall w'\in y(\neg\phi\wedge\psi\wedge\gamma,\succeq)$满足$w\succeq w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$;

④ $(W,\succeq,\eta)$满足$\phi\,{}^{x}\!\!\geq_{c}^{y}\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\neg\psi\wedge\gamma,\succeq)$,$\forall w'\in y(\neg\phi\wedge\psi\wedge\gamma,\succeq)$满足$w\succ w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$.

显然,${}^{x}\!\!\geq_{c}^{y}$是对von Wright的ceteris paribus偏好的进一步细化.

Souhila Kaci 和 Leendert van der Torre 将最粗/最细描述原则作为非单调推理机制.

定义 1. W上的有序划分.一个形如$(E_1,\ldots,E_n)$候选项集的序列被称作W上的有序划分,当且仅当$\forall i$,E_i非空,$E_1\cup\ldots\cup E_n=W$,$\forall i,j$,如果$i\neq j$,则$E_i\cap E_j=\varnothing$.每一个W上的有序划分都对应着W上的一个全前序$\boldsymbol{R}$满足$\forall w,w'\in W$,如果$w\in E_i$且$w'\in E_j$,则$i\leq j$当且仅当$w\boldsymbol{R}w'$.

** 将ceteris paribus原则的“其他情况都相同”解释为上下文等价.设$\xi(W)$是W上的等价关系集,定义上下文等价函数$\eta:P(P(W))\rightarrow\xi(W)$,其中$P()$表示幂集,那么,$\eta$为每一个命题公式集都指派了一个等价关系.形式上,$\phi>\psi$当且仅当对于$\forall(w,w')\in\eta(\phi\wedge\neg\psi,\neg\phi\wedge\psi)$,如果$w|=\phi\wedge\neg\psi$且$w'|\neq\neg\phi\wedge\psi$,那么$w\succ w'$.

定义 2. 最粗/最细描述原则(minimal/maximal specificity principle).设 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 均是 W 上的全前序,分别以有序划分的形式表示为$(E_1,\ldots,E_n)$和$(E'_1,\ldots,E'_m)$.当且仅当$\forall w\in W$,如果$w\in E_i$且$w\in E'_j$都有$i\leq j$,称$\boldsymbol{R}$至少和$\boldsymbol{R}'$一样细致,记作$\boldsymbol{R}\sqsubseteq\boldsymbol{R}'$.并记$\boldsymbol{R}\sqsubset\boldsymbol{R}'$当且仅当满足$\boldsymbol{R}\sqsubseteq\boldsymbol{R}'$而不满足$\boldsymbol{R}'\sqsubseteq\boldsymbol{R}$.给定全前序集$O$,如果$\forall\boldsymbol{R}'\in O$都有$\boldsymbol{R}\sqsubset\boldsymbol{R}'$,则称$\boldsymbol{R}$是$O$上的最细描述,如果$\forall\boldsymbol{R}'\in O$都有$\boldsymbol{R}'\sqsubset\boldsymbol{R}$,则称$\boldsymbol{R}$ 是O上的最粗描述.

给定偏好集$\{P_1,\ldots,P_n|P_i$是形如$\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}\psi,\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}_{c}\,\psi$的式子$\}$,Souhila Kaci和Leendert van der Torre提出了计算最细致/最粗糙描述的方法.

1.3 小 结

分析和比较 von Wright 以及 Souhila Kaci 和 Leendert van der Torre 的工作:

- 他们都没有就不同类型偏好共存的情况,提出完整的逻辑系统,不利于进一步的研究和应用;
- K-T 偏好对 von Wright 偏好的改进和扩充的思想是基于 4 种偏好认知行为;
- 比较 von Wright 的 3 类偏好和 K-T 偏好,von Wright 为应对疑问,没有将合取扩展原理应用于弱偏好和 ceteris paribus 偏好,而 K-T 偏好的进一步改进方法都是基于受到质疑的合取扩展原理;
- 当前偏好的逻辑表示方法很多,特别是以分级知识库为主要方式的偏好表示,应用和研究非常广泛,将 K-T 偏好和分级知识库偏好表示比较,将对多类型、多表示偏好共存情况下的偏好推理具有重要意义.

2 多类型偏好逻辑 MPL

通过第 1 节讨论,剔除 von Wright 合取扩展原理改进 K-T 偏好,则 Agent 的 4 种认知情况变为:

- 有限乐观(locally optimistic):用$[\![\phi]\!]$中最“好”的和$[\![\psi]\!]$中最“好”的做比较.
- 有限悲观(locally pessimistic):用$[\![\phi]\!]$中最“差”的和$[\![\psi]\!]$中最“差”的做比较.
- 投机(opportunistic):用$[\![\phi]\!]$中最“好”的和$[\![\psi]\!]$中最“差”的做比较.
- 谨慎(careful):用$[\![\phi]\!]$中最“差”的和$[\![\psi]\!]$中最“好”的做比较.

上述定义中,$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$和$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$之间的比较可以通过“$\phi\wedge\neg\psi$偏好于$\neg\phi\wedge\psi$”,所以,该定义实际上是在文献[6,7]的基础上对偏好认知分类的扩充,表达能力进一步增强.

定义 3. 给定全前序$\succeq$,上下文等价函数η,γ满足$\gamma\in\eta(\phi\wedge\neg\psi,\neg\phi\wedge\psi)$,定义:

① $(W,\succeq,\eta)$满足$\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi,\succeq),\forall w'\in y(\psi,\succeq)$满足$w\succeq w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$;

② $(W,\succeq,\eta)$满足$\phi\,{}^{x}{>}^{y}\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi,\succeq),\forall w'\in y(\psi,\succeq)$满足$w\succ w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$;

③ $(W,\succeq,\eta)$满足$\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}_{c}\,\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\gamma,\succeq),\forall w'\in y(\psi\wedge\gamma,\succeq)$满足$w\succeq w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$;

④ $(W,\succeq,\eta)$满足$\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}_{c}\,\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\gamma,\succeq),\forall w'\in y(\psi\wedge\gamma,\succeq)$满足$w\succ w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$.

显然,$\phi\,{}^{x}{>}^{y}\psi$当且仅当满足$\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}\psi$且不满足$\psi\,{}^{y}{\geq}^{x}\phi$.所以,下面的讨论中,只要考察${}^{x}{\geq}^{y}$和${}^{x}{\geq}^{y}_{c}$.由于定义Agent的 4 种认知是K-T偏好的基本思想,下面多类型偏好逻辑的建立将首先立足于由${}^{x}{\geq}^{y}$定义的偏好类型.

2.1 多类型偏好逻辑语言L_{MPL}

基于命题逻辑构造多类型偏好逻辑MPL,首先定义MPL逻辑语言L_{MPL},给定有限布尔变量集$VAR=\{p_1,\ldots,p_n\}$,基于命题逻辑,添加偏好算子${}^{x}{\geq}^{y}$定义逻辑语言如下:

- $p_i\in L_{MPL}$;如果$\phi,\psi\in L_{MPL}$,则$\neg\phi\in L_{MPL},\phi\to\psi\in L_{MPL},\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}\psi\in L_{MPL}$,其中,$x,y\in\{M,m\}$;
- 其他经典命题逻辑联结词如$\vee,\wedge,\leftrightarrow$以及一元逻辑符号$\top,\bot$等可通过算子$\neg$和$\to$来定义,方法与命题逻辑相同,${}^{l}{\geq}^{r}$和$\vee,\wedge$同一优先级,此外,用括号表示优先.

2.2 多类型偏好逻辑的语义

MPL的模型定义为三元组$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,其中,VAR是有限布尔变量集,W是VAR上的指派集,如果记任意$w\in W$为VAR的子集形式使得$p_i\in w$当且仅当p_i为真,那么$W=2^{VAR}$.$\boldsymbol{R}$是定义在W上的全前序.假设任意非永假$\phi\in L_{MPL}$有$\phi\,{}^{x}{\geq}^{y}\bot$无条件成立,表示“有选择项总比没有选择好”.MPL逻辑语义定义如下:

定义 4. MPL逻辑语义:

$M,w\models p$ 当且仅当 $p\in w$;$M,w\models\neg\phi$当且仅当 $M,w\models\phi$不成立;$M,w\models\phi\rightarrow\psi$当且仅当 $M,w\models\neg\phi$或 $M,w\models\psi$.

$M,w\models\phi\,{}^x\!\geq^y\psi$当且仅当如下两种情况之一成立:

① $M,w\models\phi$且不存在$w'\in W$满足$M,w'\models\psi$;② $\forall w_1\in x(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_2\in y(\psi,\boldsymbol{R})$满足$w_1\boldsymbol{R}w_2,x,y\in\{M,m\}$.

其中对任意L_{MPL}公式ϕ定义$M(\phi,\boldsymbol{R})=\{w|M,w\models\phi$,且对于任意$w'\in W$,如果$M,w'\models\phi$,则$w\boldsymbol{R}w'\}$,$m(\phi,\boldsymbol{R})=\{w|M,w\models\phi$,且对于任意$w'\in W$,如果$M,w'\models\phi$,则$w'\boldsymbol{R}w\}$.

定理 1. $\forall w_1\in M(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R}),\forall w_2\in M(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_3\in M(\psi,\boldsymbol{R})$满足:如果$w_3\boldsymbol{R}w_2$,则$M(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq M(\phi,\boldsymbol{R})$;如果$w_2\boldsymbol{R}w_3$,则$M(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq M(\psi,\boldsymbol{R})$.$\forall w_1\in m(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R}),\forall w_2\in m(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_3\in m(\psi,\boldsymbol{R})$ 满足:如果 $w_3\boldsymbol{R}w_2$,则 $m(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq m(\psi,\boldsymbol{R})$;如果$w_2\boldsymbol{R}w_3$,则$m(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq m(\phi,\boldsymbol{R})$.

证明:根据定义,$M(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})=\{w|M,w\models\phi\wedge\psi$,且对于任意$w'\in W$,如果$M,w'\models\phi\wedge\psi$,则$w\boldsymbol{R}w'\}$,又因为$\boldsymbol{R}$是自反、完全、传递的,必定有$\forall w_2\in M(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_3\in M(\phi,\boldsymbol{R})$满足$w_3\boldsymbol{R}w_2$或者$w_2\boldsymbol{R}w_3$并且如果$w_3\boldsymbol{R}w_2$,则$M(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq M(\phi,\boldsymbol{R})$;如果$w_2\boldsymbol{R}w_3$,则$M(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq M(\psi,\boldsymbol{R})$.$m(\phi,\boldsymbol{R})=\{w|M,w\models\phi$,且对于任意$w'\in W$,如果$M,w'\models\phi$,则$w'\boldsymbol{R}w\}$,又因为$\boldsymbol{R}$是自反、完全、传递的,必定有$\forall w_2\in m(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_3\in m(\phi,\boldsymbol{R})$满足$w_3\boldsymbol{R}w_2$或者$w_2\boldsymbol{R}w_3$并且如果$w_3\boldsymbol{R}w_2$,则$m(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq m(\psi,\boldsymbol{R})$;如果$w_2\boldsymbol{R}w_3$,则$m(\phi\wedge\psi,\boldsymbol{R})\subseteq m(\phi,\boldsymbol{R})$. □

2.3 多类型偏好逻辑的证明系统P_{MPL}

2.3.1 基于全前序的偏好关系性质

给定偏好模型$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,把偏好算子${}^x\!\geq^y$看作是命题逻辑合适公式之间的关系,本质上反映了$\boldsymbol{R}$确定的2^W上的关系$\boldsymbol{R}_{xy}$,设$M(A,\boldsymbol{R})=\{w|w'\in A\Rightarrow w\boldsymbol{R}w'\}$,$m(A,\boldsymbol{R})=\{w|w'\in A\Rightarrow w'\boldsymbol{R}w\}$:

对任意$A,B\subseteq W$,$A\boldsymbol{R}_{xy}B$当且仅当$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$,或者$\forall w\in x(A,\boldsymbol{R}),\forall w'\in y(B,\boldsymbol{R})$满足$w\boldsymbol{R}w'$,其中,$x,y\in\{M,m\}$.

通过考察$\boldsymbol{R}_{xy}$的性质,考察偏好算子${}^x\!\geq^y$,用于形式化过程.

显然,给定W上对应全前序$\boldsymbol{R}$的有序划分$(E_1,\ldots,E_n)$,任意$A\subseteq W$且$A\neq\varnothing$,$M(A,\boldsymbol{R})$都对应一个数字$MR(A)$,满足$M(A,\boldsymbol{R})\subseteq E_{MR}$.$m(A,\boldsymbol{R})$都对应一个数字$mR(A)$,满足$m(A,\boldsymbol{R})\subseteq E_{mR}$.所以,任意非空$A,B\subseteq W$,$A\boldsymbol{R}_{xy}B$当且仅当$xR(A)\leq yR(B)$.

定理 2. 给定偏好模型$(W,\boldsymbol{R},VAR)$,$\boldsymbol{R}$是全前序,就有:$\boldsymbol{R}_{MM},\boldsymbol{R}_{Mm},\boldsymbol{R}_{mm}$在 $2^W-\{\varnothing\}$上是自反的;$\boldsymbol{R}_{mM},\boldsymbol{R}_{MM},\boldsymbol{R}_{mm}$是传递的;$\boldsymbol{R}_{MM},\boldsymbol{R}_{Mm},\boldsymbol{R}_{mm}$在 $2^W-\{\varnothing\}$上是完全的.

证明:对任意$A\subseteq W$且$A\neq\varnothing$,必然$MR(A)\leq MR(A)$,$MR(A)\leq mR(A)$,$mR(A)\leq mR(A)$,所以,$\boldsymbol{R}_{MM},\boldsymbol{R}_{Mm},\boldsymbol{R}_{mm}$是自反的.

任意$A,B,C\subseteq W$,$A\boldsymbol{R}_{mM}B$当且仅当$mR(A)\leq MR(B)$,$B\boldsymbol{R}_{mM}C$当且仅当$mR(B)\leq MR(C)$.由于$MR(B)\leq mR(B)$,所以,如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$B\boldsymbol{R}_{mM}C$,就有$mR(A)\leq MR(C)$,所以,$\boldsymbol{R}_{mM}$是传递的;任意$A,B,C\subseteq W$,$A\boldsymbol{R}_{MM}B$当且仅当$MR(A)\leq MR(B)$, $B\boldsymbol{R}_{MM}C$当且仅当$MR(B)\leq MR(C)$.由于$MR(B)\leq MR(B)$,所以,如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$且$B\boldsymbol{R}_{MM}C$,就有$MR(A)\leq MR(C)$,所以,$\boldsymbol{R}_{MM}$是传递的;任意$A,B,C\subseteq W$,$A\boldsymbol{R}_{mm}B$当且仅当$mR(A)\leq mR(B)$,$B\boldsymbol{R}_{mm}C$当且仅当$mR(B)\leq mR(C)$.由于$mR(B)\leq mR(B)$,所以,如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$B\boldsymbol{R}_{mm}C$,就有$mR(A)\leq mR(C)$,所以,$\boldsymbol{R}_{mm}$是传递的.任意$A,B\subseteq W$且$A\neq\varnothing,B\neq\varnothing,A\neq B$,必有$MR(A)\leq MR(B)$,$MR(B)\leq MR(A)$之一成立,$\boldsymbol{R}_{MM}$是完全的;必有$MR(A)\leq mR(B)$,$MR(B)\leq mR(A)$之一成立,$\boldsymbol{R}_{Mm}$是完全的;必有$mR(A)\leq mR(B)$,$mR(B)\leq mR(A)$之一成立,所以$\boldsymbol{R}_{mm}$是完全的. □

2.3.2 基于全前序的偏好操作(推理)性质

把W的一个子集看作一个候选项类(按照通常的定义,一个类是由若干选项组成的集合,候选项类就是候选项集W的子集),那么,2^W就是候选项类的集合(也可以看作是命题公式集合),$\boldsymbol{R}_{xy}$就是候选项类之间的关系,一个候选项类的子集就是更"小"、更"细"的类,它的超集(super set)就是更"大"、更"粗"的类.特别地,将一个候选项看作是最小的候选项类(本质上反映了$\boldsymbol{R}$),如图 1 所示,偏好推理可以看作是给定有限$\boldsymbol{R}_{xy}$推导全部$\boldsymbol{R}_{xy}$的过程.

逻辑算子$\rightarrow,\neg,\wedge,\vee$直观地对应着候选项类的包含、取补、交和并.将$\subseteq,\cap,\cup$和^{c}作为为基本集合定性运算算子,考察偏好操作(推理)的模式有如下 3 种:

(1) $\subseteq$模式:该模式考察候选项类的"大"、"小"变化对$\boldsymbol{R}_{xy}$的影响.

- 如果$C\subseteq A$且$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$C\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ B$;

- 如果$C\subseteq B$且$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$A\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ C$;
- 如果$A\subseteq C$且$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$C\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ B$;
- 如果$B\subseteq C$且$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$A\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ C$.

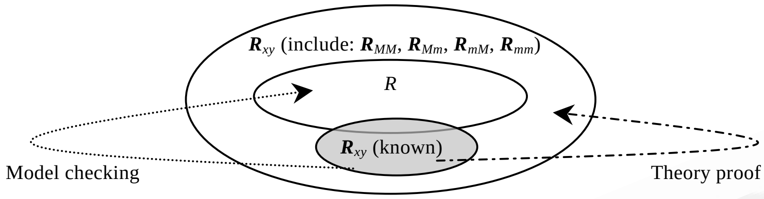


Fig.1 Preference reasoning

图 1 偏好推理

(2) $\cap$模式:该模式考察候选项类通过$\cap$运算的"大"、"小"变化对$\boldsymbol{R}_{xy}$的影响.

- 如果$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$C\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ B$和$A\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{xy}(B\cap C)$,考察$A\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ C$和$A\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$(A\cap C)\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ B$和$(A\cap C^c)\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$A\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ (B\cap C)$和$A\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ (B\cap C^c)$.

(3) $\cup$模式:该模式考察候选项类通过$\cup$运算的"大"、"小"变化对$\boldsymbol{R}_{xy}$的影响

- 如果$(A\cup C)\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$C\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ B$和$A\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{xy}(B\cup C)$,考察$A\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ C$和$A\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$(A\cup C)\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ B$和$(A\cup C^c)\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{xy}B$,考察$A\ \boldsymbol{R}_{x'y'}\ (B\cup C)$和$A\ \boldsymbol{R}_{x''y''}\ (B\cup C^c)$.

由于$\subseteq$,$\cap$,$\cup$和补运算^{c}之间的相关性,上述各类偏好的操作模式下的结论并非独立的,它们之间具有因果关系,可以归结***为仅采用$\subseteq$,$\cap$和补运算^{c}下的几条性质.

定理 3. 给定偏好模型$(W,\boldsymbol{R},VAR)$,$\boldsymbol{R}$ 是全前序,非空集 $A,B,C\subseteq W$,就有:

对于$\boldsymbol{R}_{MM}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$且$A\subseteq C$,则$C\boldsymbol{R}_{MM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$,则$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{MM}B$或$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{MM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$且$B\subseteq C$,则$A\boldsymbol{R}_{Mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$且$C\subseteq B$,则$A\boldsymbol{R}_{MM}C$.

对于$\boldsymbol{R}_{Mm}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$且$A\subseteq C$,则$C\boldsymbol{R}_{Mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$,则$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{Mm}B$或$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{Mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$且$B\subseteq C$,则$A\boldsymbol{R}_{Mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$,则$A\boldsymbol{R}_{Mm}(B\cap C)$或$A\boldsymbol{R}_{Mm}(B\cap C^c)$.

对于$\boldsymbol{R}_{mM}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$C\subseteq A$,则$C\boldsymbol{R}_{mM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$A\subseteq C$,则$C\boldsymbol{R}_{MM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$B\subseteq C$,则$A\boldsymbol{R}_{mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$C\subseteq B$,则$A\boldsymbol{R}_{mM}C$.

*** 在此,归结过程是在按顺序考察 3 种模式的基础上,尽量采用先得到结论推导后面模式的结论,然后把所有能用先前的结论推出的结论去掉,限于篇幅,这里不再赘述.

对于$\boldsymbol{R}_{mm}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$A\subseteq C$,则$C\boldsymbol{R}_{Mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$C\subseteq A$,则$C\boldsymbol{R}_{mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$B\subseteq C$,则$A\boldsymbol{R}_{mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$,则$A\boldsymbol{R}_{mm}(B\cap C)$或$A\boldsymbol{R}_{mm}(B\cap C^c)$.

证明:

(1) 对于$\boldsymbol{R}_{MM}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$且$A\subseteq C$,则必然$MR(A)\le MR(B)$且$MR(C)\le MR(A)$,所以$MR(C)\le MR(B)$,即$C\boldsymbol{R}_{MM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$,则$MR(A)\le MR(B)$,又$M(A,\boldsymbol{R})\cap C\ne\varnothing$或$M(A,\boldsymbol{R})\cap C^c\ne\varnothing$,所以$MR(A\cap C^c)\le MR(A)$或$MR(A\cap C)\le MR(A)$.于是,$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{MM}B$或$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{MM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$,则必然$MR(A)\le MR(B)\le mR(B)$,又因为$B\subseteq C$,所以$MR(A)\le mR(B)\le mR(C)$,即$A\boldsymbol{R}_{Mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{MM}B$,则必然$MR(A)\le MR(B)$,由$C\subseteq B$,所以$MR(B)\le MR(C)$,所以$MR(A)\le MR(C)$,即$A\boldsymbol{R}_{MM}C$.

(2) 对于$\boldsymbol{R}_{Mm}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$且$A\subseteq C$,则必然$MR(A)\le mR(B)$且$MR(C)\le MR(A)$,所以$MR(C)\le mR(B)$,即$C\boldsymbol{R}_{Mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$,则$MR(A)\le mR(B)$,又$M(A,\boldsymbol{R})\cap C\ne\varnothing$或$M(A,\boldsymbol{R})\cap C^c\ne\varnothing$,所以$MR(A\cap C^c)\le MR(A)$或$MR(A\cap C)\le MR(A)$,即$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{Mm}B$或$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{Mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$,则必然$MR(A)\le mR(B)$,又因为$B\subseteq C$,所以$MR(A)\le mR(B)\le mR(C)$,即$A\boldsymbol{R}_{Mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{Mm}B$,则$MR(A)\le mR(B)$,又$m(B,\boldsymbol{R})\cap C\ne\varnothing$或$m(B,\boldsymbol{R})\cap C^c\ne\varnothing$,所以$MR(A)\le mR(B\cap C)$或$MR(A)\le mR(B\cap C^c)$,即$A\boldsymbol{R}_{Mm}(B\cap C)$或$A\boldsymbol{R}_{Mm}(B\cap C^c)$.

(3) 对于$\boldsymbol{R}_{mM}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$C\subseteq A$,则必然$mR(A)\le MR(B)$且$mR(C)\le MR(A)$,所以$mR(C)\le MR(B)$,即$C\boldsymbol{R}_{mM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$且$A\subseteq C$,则必然$mR(A)\le MR(B)$且$MR(C)\le MR(A)$,所以$MR(C)\le mR(A)\le MR(B)$,即$C\boldsymbol{R}_{MM}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$,则$mR(A)\le MR(B)\le mR(B)$,因为$B\subseteq C$,所以$mR(A)\le mR(B)\le mR(C)$,即$A\boldsymbol{R}_{mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mM}B$,则$mR(A)\le MR(B)$,因为$C\subseteq B$,所以$MR(B)\le MR(C)$,则$mR(A)\le MR(C)$,即$A\boldsymbol{R}_{mM}C$.

(4) 对于$\boldsymbol{R}_{mm}$:

- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$A\subseteq C$,则必然$mR(A)\le mR(B)$且$MR(C)\le mR(A)$,所以$MR(C)\le mR(B)$,即$C\boldsymbol{R}_{Mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$C\subseteq A$,则必然$mR(A)\le mR(B)$且$mR(C)\le mR(A)$,所以$mR(C)\le mR(B)$,即$C\boldsymbol{R}_{mm}B$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$且$B\subseteq C$,则必然$mR(A)\le mR(B)$且$mR(B)\le mR(C)$,所以$mR(A)\le mR(C)$,即$A\boldsymbol{R}_{mm}C$;
- 如果$A\boldsymbol{R}_{mm}B$,则$mR(A)\le mR(B)$,又$m(B,\boldsymbol{R})\cap C\ne\varnothing$或$m(B,\boldsymbol{R})\cap C^c\ne\varnothing$,所以$mR(A)\le mR(B\cap C)$或$mR(A)\le mR(B\cap C^c)$,即$A\boldsymbol{R}_{mm}(B\cap C)$或$A\boldsymbol{R}_{mm}(B\cap C^c)$. □

2.3.3 MPL逻辑证明系统P_{MPL}

P_{MPL}由公理和推理规则组成,L_{MPL}描述上述偏好序性质和操作规律为公理,然后证明系统的合理和完备.

引理 1. 给定公式ϕ,定义$\Diamond\phi$表示存在模型满足ϕ,就有$\Diamond\phi\leftrightarrow(\phi^x\ge^y\bot)$;如果$\blacklozenge\phi$表示任意模型都能满足$\phi$,就有$\blacklozenge\phi\leftrightarrow\neg(\neg\phi^x\ge^y\bot)$.

证明:

(1) 设$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$是一个偏好模型,根据定义$M,w\models\Diamond\phi$当且仅当$\exists w'\in W$,满足$M,w'\models\phi$.而因为不存在$w'\in W$满足$M,w\models\bot$,根据语义定义$M,w\models(\phi^x\ge^y\bot)$当且仅当$M,w\models\phi$成立,因此,$\Diamond\phi\leftrightarrow\neg(\bot^x\ge^y\phi)$;

(2) 显然,$\blacklozenge\phi\leftrightarrow\neg\Diamond\neg\phi$,代入(1),易证$\blacklozenge\phi\leftrightarrow\neg(\neg\phi^x\ge^y\bot)$. □

定义 5. 称形如$p_{1l}p_{2l}\ldots p_{nl}$的命题逻辑公式为完全合取式,其中,$p_{il}$表示第$i$个命题变元的字.根据命题逻辑公式化为完全析取范式的过程,给定命题逻辑公式ϕ,很容易判断它是否能够转化为一个完全合取式.定义$\spadesuit\phi$表示ϕ可以转化为完全合取式.

将$\boldsymbol{R}_{xy}$的序性质和操作性质用L_{MPL}描述作为序性质公理和操作公理如下:

(1) 序性质公理

- $\boldsymbol{R}_{MM},\boldsymbol{R}_{Mm},\boldsymbol{R}_{mm}$在 $2^W-\{\varnothing\}$上是自反的.
  (1) $\Diamond\phi\rightarrow\phi^{M}\geq^{M}\phi$
  (2) $\Diamond\phi\rightarrow\phi^{M}\geq^{m}\phi$
  (3) $\Diamond\phi\rightarrow\phi^{m}\geq^{m}\phi$
- $\boldsymbol{R}_{mM},\boldsymbol{R}_{MM},\boldsymbol{R}_{mm}$是传递的.
  (1) $(\phi^{m}\geq^{M}\psi)\wedge(\psi^{m}\geq^{M}\gamma)\rightarrow\phi^{m}\geq^{M}\gamma$
  (2) $(\phi^{M}\geq^{M}\psi)\wedge(\psi^{M}\geq^{M}\gamma)\rightarrow\phi^{M}\geq^{M}\gamma$
  (3) $(\phi^{m}\geq^{m}\psi)\wedge(\psi^{m}\geq^{m}\gamma)\rightarrow\phi^{m}\geq^{m}\gamma$
- $\boldsymbol{R_{MM}},\boldsymbol{R_{Mm}},\boldsymbol{R_{mm}}$在 $2^W-\{\varnothing\}$上是完全的.
  (1) $\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\neg(\phi\leftrightarrow\psi)\rightarrow(\phi^{M}\geq^{M}\psi)\vee(\psi^{M}\geq^{M}\phi)$
  (2) $\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\neg(\phi\leftrightarrow\psi)\rightarrow(\phi^{M}\geq^{m}\psi)\vee(\psi^{M}\geq^{m}\phi)$
  (3) $\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\neg(\phi\leftrightarrow\psi)\rightarrow(\phi^{m}\geq^{m}\psi)\vee(\psi^{m}\geq^{m}\phi)$

(2) 操作公理

- 对于${}^{M}\geq^{M}$:
  (1) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge\blacklozenge(\phi\rightarrow\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{M}\psi)\rightarrow\gamma^{M}\geq^{M}\psi$
  (2) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{M}\psi)\rightarrow((\phi\wedge\gamma)^{M}\geq^{M}\psi)\vee((\phi\wedge\neg\gamma)^{M}\geq^{M}\psi)$
  (3) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{M}\psi)\wedge\blacklozenge(\psi\rightarrow\gamma)\rightarrow\phi^{M}\geq^{m}\gamma$
  (4) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{M}\psi)\wedge\blacklozenge(\gamma\rightarrow\psi)\rightarrow\phi^{M}\geq^{M}\gamma$
- 对于${}^{M}\geq^{m}$:
  (1) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge\blacklozenge(\phi\rightarrow\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{m}\psi)\rightarrow\gamma^{M}\geq^{m}\psi$
  (2) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{m}\psi)\rightarrow((\phi\wedge\gamma)^{M}\geq^{m}\psi)\vee((\phi\wedge\neg\gamma)^{M}\geq^{m}\psi)$
  (3) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{m}\psi)\wedge\blacklozenge(\psi\rightarrow\gamma)\rightarrow\phi^{M}\geq^{m}\gamma$
  (4) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{M}\geq^{m}\psi)\rightarrow(\phi^{M}\geq^{m}(\psi\wedge\gamma))\vee(\phi^{M}\geq^{m}(\psi\wedge\neg\gamma))$
- 对于${}^{m}\geq^{M}$:
  (1) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge\blacklozenge(\gamma\rightarrow\phi)\wedge(\phi^{m}\geq^{M}\psi)\rightarrow\gamma^{m}\geq^{M}\psi$
  (2) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge\blacklozenge(\phi\rightarrow\gamma)\wedge(\phi^{m}\geq^{M}\psi)\rightarrow\gamma^{m}\geq^{M}\psi$
  (3) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{m}\geq^{M}\psi)\wedge\blacklozenge(\psi\rightarrow\gamma)\rightarrow\phi^{m}\geq^{m}\gamma$
  (4) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{m}\geq^{M}\psi)\wedge\blacklozenge(\gamma\rightarrow\psi)\rightarrow\phi^{m}\geq^{M}\gamma$
- 对于${}^{m}\geq^{m}$:
  (1) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge\blacklozenge(\phi\rightarrow\gamma)\wedge(\phi^{m}\geq^{m}\psi)\rightarrow\gamma^{m}\geq^{m}\psi$
  (2) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge\blacklozenge(\gamma\rightarrow\phi)\wedge(\phi^{m}\geq^{m}\psi)\rightarrow\gamma^{m}\geq^{m}\psi$
  (3) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{m}\geq^{m}\psi)\wedge\blacklozenge(\psi\rightarrow\gamma)\rightarrow\phi^{m}\geq^{m}\gamma$
  (4) $(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi\wedge\Diamond\gamma)\wedge(\phi^{m}\geq^{m}\psi)\rightarrow(\phi^{m}\geq^{m}(\psi\wedge\gamma))\vee(\phi^{m}\geq^{m}(\psi\wedge\neg\gamma))$

定义 6. MPL逻辑证明系统P_{MPL}.

公理:

A. 所有命题逻辑重言式.

B. $\phi^{x}\geq^{y}\psi\leftrightarrow\Diamond\phi,x,y\in\{M,m\}$.

C. $\spadesuit\phi\wedge\spadesuit\psi\rightarrow((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\leftrightarrow(\phi^{x'}\geq^{y'}\psi)),x,y,x',y'\in\{M,m\}$.

D. 解套公理 1: $\Diamond\psi\wedge(((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma)^{x'}\geq^{y'}\chi)\leftrightarrow\Diamond\psi\wedge(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi),x,y,x',y'\in\{M,m\}$.

E. 解套公理 2: $\Diamond\psi\wedge((\neg(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma)^{x'}\geq^{y'}\chi)\leftrightarrow\Diamond\psi\wedge\neg(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi),x,y,x',y'\in\{M,m\}$.

F. 解套公理 3: $\Diamond\psi\wedge(\chi^{x'}\geq^{y'}((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma))\leftrightarrow\Diamond\psi\wedge(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\chi^{x'}\geq^{y'}\gamma),x,y,x',y'\in\{M,m\}$.

G. 解套公理 4: $\Diamond\psi\wedge(\chi^{x'}\geq^{y'}(\neg(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma))\leftrightarrow\Diamond\psi\wedge\neg(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\chi^{x'}\geq^{y'}\gamma),x,y,x',y'\in\{M,m\}$.

H. 操作公理.

I. 序性质公理.

分离规则: $\dfrac{\phi,\phi\rightarrow\psi}{\psi}$.

定理 4. MPL 合理且完备.

证明:(1) 合理性证明.只要证明公理在语义下是正确的.基于 MPL 逻辑语义的定义,公理 A、公理 B 显然成立,由定理 1 和定理 2,操作公理和序性质公理也显然成立.下面主要讨论公理 C 和 4 个解套公理的合理性.给定全前序偏好模型 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,

- 当$\spadesuit\phi\wedge\spadesuit\psi$时,存在且仅存在一个 $w\in W$,使得 $M,w\models\phi$,存在且仅存在一个 $w'\in W$,使得 $M,w'\models\psi$.
  因为$MR([\![\{w\}]\!])=mR([\![\{w\}]\!]),MR([\![\{w'\}]\!])=mR([\![\{w'\}]\!])$,所以,
  $MR([\![\{w\}]\!])\leq MR([\![\{w'\}]\!])\Leftrightarrow mR([\![\{w\}]\!])\leq mR([\![\{w'\}]\!])\Leftrightarrow MR([\![\{w\}]\!])\leq mR([\![\{w'\}]\!])\Leftrightarrow mR([\![\{w\}]\!])\leq MR([\![\{w'\}]\!])$,
  即$\{w\}\boldsymbol{R}_{Mm}\{w'\}\Leftrightarrow\{w\}\boldsymbol{R}_{mm}\{w'\}\Leftrightarrow\{w\}\boldsymbol{R}_{mM}\{w'\}\Leftrightarrow\{w\}\boldsymbol{R}_{MM}\{w'\}$,
  所以,$(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\leftrightarrow(\phi^{x'}\geq^{y'}\psi)$.
- 对于解套公理 1:
  a) $M,w\models\Diamond\psi\wedge((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma)^{x'}\geq^{y'}\chi$,当且仅当① $M,w\models(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma$且不存在$w'\in W$满足$M,w'\models\chi$,或者② $\forall w_1\in x'((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma,\boldsymbol{R}),\forall w_2\in y'(\chi,\boldsymbol{R})$满足$w_1\boldsymbol{R}w_2$.在情况①下,因为$M,w\models(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma$,所以$M,w\models(\phi^{x}\geq^{y}\psi)$且$M,w\models\gamma$,显然,$M,w\models\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi$,所以,$M,w\models(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi)$.在情况②下,因为$x'((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma,\boldsymbol{R})\neq\varnothing$,所以$x'((\phi^{x}\geq^{y}\psi),\boldsymbol{R})\neq\varnothing$且$x'(\gamma,\boldsymbol{R})\neq\varnothing$,又由于$\Diamond\psi$,根据${}^{x}\geq^{y}$的语义,所以对任意$w_0\in W$都有$M$, $w_0\models\phi^{x}\geq^{y}\psi$,所以,总有$\forall w_2\in M(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_3\in M(\psi,\boldsymbol{R})$满足$w_2\boldsymbol{R}w_3$,总有$\forall w_2\in m(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_3\in m(\psi,\boldsymbol{R})$满足$w_3\boldsymbol{R}w_2$,根据定理 1 就有$x'((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma,\boldsymbol{R})\subseteq x'(\gamma,\boldsymbol{R})$,于是,$\forall w_1\in x'(\gamma,\boldsymbol{R}),\forall w_2\in y'(\chi,\boldsymbol{R})$满足$w_1\boldsymbol{R}w_2$,所以$M,w\models\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi$,所以$M,w\models\Diamond\psi\wedge(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi)$.
  b) $M,w\models\Diamond\psi\wedge(\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge(\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi)$当且仅当① $M,w\models\Diamond\psi$② $M,w\models\phi^{x}\geq^{y}\psi$③ $M,w\models\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi$同时成立,根据${}^{x}\geq^{y}$的语义和①,②,显然对任意$w_0\in W$都有$M,w_0\models\Diamond\psi\wedge(\phi^{x}\geq^{y}\psi)$.根据③存在两种情况:一是$M,w\models\gamma$且不存在$w'\in W$满足$M,w'\models\chi$,此时,显然得到结论$M,w\models\Diamond\psi\wedge((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma)^{x'}\geq^{y'}\chi$;二是$\forall w_1\in x'(\gamma,\boldsymbol{R})$, $\forall w_2\in y'(\chi,\boldsymbol{R})$满足$w_1\boldsymbol{R}w_2$,根据定理 1,$x'((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma,\boldsymbol{R})\subseteq x'(\gamma,\boldsymbol{R})$,所以$M,w\models\Diamond\psi\wedge((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma)^{x'}\geq^{y'}\chi$.
  c) 总结上述证明,简化解套公理 2~公理 4 的证明:由解套公理 1 的证明,当$\Diamond\psi$成立时,总有任意$w_0\in W,M$, $w_0\models\phi^{x}\geq^{y}\psi$,根据定理 1 就有$x'((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\wedge\gamma,\boldsymbol{R})\subseteq x'(\gamma,\boldsymbol{R})$,于是,证明归结为比较$x'(\gamma,\boldsymbol{R})$和$y'(\chi,\boldsymbol{R})$,即是否$M,w\models\gamma^{x'}\geq^{y'}\chi$.
- 解套公理 2~公理 4 同理可证.

(2) 完备性证明.MPL是完备的当且仅当关于偏好模型有效的公式基于P_{MPL}都是可证的:如果$\models\phi$,则$P_{MPL}\vdash\phi$.为此,只要证明对于每个协调公式ϕ,都存在一个偏好模型,使得ϕ在这个模型中是可满足的.进而只要证明对于极大协调集S_m(有限公式集$\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$是协调的当且仅当$\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n$是协调的,无限公式集是协调的当且仅当它的有限子集都是协调的.当公式集S是协调的,且对所有$\psi\notin S,S\cup\{\psi\}$是不协调的,称$S$是极大协调集.在包含所有命题重言式和分离规则的公理系统中,任何协调公式集都可以扩充为一个极大协调集),可以构造M,w使得$M,w\models\gamma$当且仅当$\gamma\in S_m$.在MPL中,公理是直接建立在命题逻辑重言式和基于全前序性质和操作的基础上的,只要构造模型$M=(W,\boldsymbol{R}, VAR)$,使得$\boldsymbol{R}$是全前序即可.令$S^P=\{\alpha^{x}\geq^{y}\beta\in S_m|\alpha,\beta$是完全合取式$\}$,构造$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$:$W=2^{VAR}$可以表示为完全合取式集合,即$W=\{\gamma|\gamma$是完全合取式$\}$,$\boldsymbol{R}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^{x}\geq^{y}\beta\in S^P\}$,亦即$\alpha\boldsymbol{R}\beta\Leftrightarrow\alpha^{x}\geq^{y}\beta\in S^P$.对于$P_{MPL}$,根据公理C,

$$\spadesuit\phi\wedge\spadesuit\psi\rightarrow((\phi^{x}\geq^{y}\psi)\leftrightarrow(\phi^{x'}\geq^{y'}\psi)),x,y,x',y'\in\{M,m\},$$

有$\boldsymbol{R}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^{M}\geq^{M}\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^{m}\geq^{m}\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^{m}\geq^{M}\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^{M}\geq^{m}\beta\in S^P\}$,再根据序性质公理I,易推出$\boldsymbol{R}$满足自反性、传递性和完全性. □

3 L_{MPL}的非单调语义

定义L_{MPL}基于全前序上最粗糙、最细致描述原则的非单调语义如下:

定义 7(L_{MPL}非单调语义). 给定L_{MPL}公式ϕ,

- $M=(W,\boldsymbol{R},VAR),w$ 是ϕ基于全前序最细致描述原则的模型,记为 $M,w\models_{\sqsubset}\phi$,当且仅当 $M,w\models\phi$且对于任意$M'=(W,\boldsymbol{R}',VAR),M',w\models\phi\Rightarrow\boldsymbol{R}\sqsubset\boldsymbol{R}'$;
- $M=(W,\boldsymbol{R},VAR),w$ 是ϕ基于全前序最粗糙描述原则的模型,记为 $M,w\models_{\sqsupset}\phi$,当且仅当 $M,w\models\phi$且对于任意$M'=(W,\boldsymbol{R}',VAR),M',w\models\phi\Rightarrow\boldsymbol{R}'\sqsubset\boldsymbol{R}$.

4 L_{MPL}表达能力初探

显然,相对于K-T偏好,L_{MPL}具有更强的表达能力.分级知识库是一个具有全前序$\succeq$的有限命题公式集RK,即任意$\phi_1,\phi_2\in RK,\phi_1\succeq\phi_2$或者$\phi_2\succeq\phi_1$.通常表示为二元组$(\phi_i,r_i)$集,其中,$\phi$是一个命题公式,$r$是一个非负整数, $\phi_1\succeq\phi_2$当且仅当$r_1\geq r_2$.不失一般性,约定RK最低级别为 0,而且按照顺序,r通过加 1 递增.分级知识库通过表达决策目标的优先级或约束条件的优先级成为偏好表示主要方法,施与分级知识库不同的偏好策略,就能够得到可能世界集W上不同的偏好.本节通过最大满足策略和最大不满足策略两种主要偏好策略下分级知识库的L_{MPL}重写,说明L_{MPL}较强的表达能力和MPL作为偏好表示和推理较为完整的逻辑基础的应用潜质.

给定分级知识库 $RK=\{(\phi,r)|r=0,\ldots,n\}$,对于任意的可能世界 $w,w'\in W$,定义:

- $\text{max}sat^{RK}(w)=$
  - (1) $-\infty$,如果$\forall(\phi,r)\in RK$,则 $w\not\models\phi$;
  - (2) 否则,$\max\{r|(\phi,r)\in RK,w\models\phi\}$.
- $\text{max}unsat^{RK}(w)=$
  - (1) $-\infty$,如果$\forall(\phi,r)\in RK$,则 $w\models\phi$;
  - (2) 否则,$\max\{r|(\phi,r)\in RK,w\not\models\phi\}$.
- $\boldsymbol{S}_{RK}$是最大满足策略确定的W上偏好关系,满足:$w\boldsymbol{S}_{RK}w'$当且仅当$\text{max}sat^{RK}(w)\geq\text{max}sat^{RK}(w')$.
- $\boldsymbol{US}_{RK}$是最大不满足策略确定的W上偏好关系,满足:$w\boldsymbol{US}_{RK}w'$当且仅当$\text{max}unsat^{RK}(w)\leq\text{max}unsat^{RK}(w')$.

定理 5. 给定分级知识库$RK=\{(\phi,r)|r=0,\ldots,n\}$,令$f_i=\bigwedge_{(\phi,r)\in K,r=i}\phi,g_i=\bigvee_{(\phi,r)\in K,r=i}\phi,f_{-1}=\bot,g_{-1}=\top$,定义$M_1=(W,\boldsymbol{S}_{RK},VAR,v),M_2=(W,\boldsymbol{US}_{RK},VAR),\forall w\in W$,则

(1) $M_1,w\models_{\sqsubset}\bigwedge_{i=0}^{n}\left(\left(\left(g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(g_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}\neg g_k\right)\right)\right)\wedge\neg\left(\left(g_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}\neg g_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)\right)\right)\right)$;

(2) $M_2,w\models_{\sqsupset}\bigwedge_{i=0}^{n}\left(\left(\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}f_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(\neg f_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}f_k\right)\right)\right)\wedge\neg\left(\left(\neg f_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}f_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}f_k\right)\right)\right)\right)$.

证明:

(1) 首先证明

$$M_1,w\models\bigwedge_{i=0}^{n}\left(\left(\left(g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(g_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}\neg g_k\right)\right)\right)\wedge\neg\left(\left(g_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}\neg g_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)\right)\right)\right),$$

然后证明(M_1,w)是该式的最细致模型.假设$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$满足上式.

- 由g_i的构造可知,如果对$i=0,\ldots,n,\forall w\in W,M,w\models g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)$,则$\text{max}sat^{RK}(w_1)\geq i$,如果同时$(M_1,w)\not\models g_{i+1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i+2}^{n}\neg g_k\right)$,则$\text{max}sat^{RK}(w_1)=i$,据${}^m{\geq}^M$的语义,$M,w\models\left(g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)\right){}^m{\geq}^M\left(g_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}\neg g_k\right)\right)$当且仅当:$\forall w_1,w_2\in W$,如果$(M,w_1)\models g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right),(M,w_2)\models g_{i-1}\wedge\left(\bigwedge_{k=i}^{n}\neg g_k\right)$且$(M,w_2)\not\models g_i\wedge\left(\bigwedge_{k=i+1}^{n}\neg g_k\right)$,则$w_1\boldsymbol{R}w_2$.此

时显然有:$\max sat^{RK}(w_1)\ge i,\max sat^{RK}(w_2)=i-1$(或者$-\infty$),则$w_1\boldsymbol{R}w_2$,

再由$\neg\left(\left(g_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}\neg g_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(g_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}\neg g_k\right)\right)\right)$,同理得$\max sat^{RK}(w_1)\ge i,\max sat^{RK}(w_2)=i-1$(或者$-\infty$),则不足$w_2\boldsymbol{R}w_1$.总之,$w_1\boldsymbol{R}w_2$当且仅当$\max sat^{K}(w_1)\ge \max sat^{K}(w_2)$,根据$\boldsymbol{S}_{RK}$的定义,显然第(1)步得证.

- 将$\boldsymbol{S}_{RK}$记为$(E_1,\dots,E_m)$,根据$\boldsymbol{S}_{RK}$的定义,$\forall w\in W$,如果存在最大的i使得$w\models g_i$,则$w\in E_{n+1-i}$.所以$m=n+1$,否则,如果存在w、不存在i使得$w\models g_i$,则$m=n+2$ 且$w\in E_{n+2}$.
  设全序 $\boldsymbol{S}'=(E_1',\dots,E_{m'}')$,定义 $M'=(W,\boldsymbol{S}',VAR,v)$且
  $$(M',w)\models\overset{n}{\underset{i=0}{\wedge}}\left(\left(\left(g_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}\neg g_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(g_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}\neg g_k\right)\right)\right)\wedge\neg\left(\left(g_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}\neg g_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(g_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}\neg g_k\right)\right)\right)\right),$$
  对于任意$w\in W$,如果存在最大的i使得$w\models g_i$,根据全序的性质,显然$w\in E'_{n+1-i}$,如果不存在i,使得$w\models g_i$,则$w\in E_j'$ 且$j\ge n+2$,所以$\boldsymbol{S}_{RK}\sqsubset\boldsymbol{S}'$,$(M_1,w)$是最细致模型.

(2) 首先证明
$$M_2,w\models\overset{n}{\underset{i=0}{\wedge}}\left(\left(\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)\right)\right)\wedge\neg\left(\left(\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)\right)\right)\right),$$
然后证明(M_2,w)是该式的最细致模型.假设$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$满足上式.

- 由f_i的构造,如果对$i=0,\dots,n,\forall w\in W,(M,w)\models\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)$,则$\max unsat^{RK}(w_1)\ge i$,如果同时$(M,w)\not\models\neg f_{i+1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+2}{\wedge}}f_k\right)$,则$\max unsat^{RK}(w_1)=i$.据${}^{m}\!\ge^{M}$的语义,$M,w\models\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)\right)$当且仅当:$\forall w_1,w_2\in W$,如果$(M,w_1)\models\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)$,$(M,w_2)\models\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)$且$(M,w_2)\not\models\neg f_{i+1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+2}{\wedge}}f_k\right)$,则$w_1\boldsymbol{R}w_2$.
  显然,$\max unsat^{RK}(w_1)\ge i-1$(或者$-\infty$),$\max unsat^{RK}(w_2)=I$,则$w_1\boldsymbol{R}w_2$.
  再由$\left(\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)\right)$,同理得$\max unsat^{RK}(w_1)\ge i,\max unsat^{RK}(w_2)=i-1$(或者$-\infty$),则不满足$w_2\boldsymbol{R}w_1$.根据$\boldsymbol{US}_{RK}$的定义,显然第(1)步得证.
- 将$\boldsymbol{US}_{RK}$记为$(E_1,\dots,E_m)$,根据$\boldsymbol{US}_{RK}$的定义,$\forall w\in W$,如果存在最大的i,使得$w\models\neg f_i$,则$m=n+1$ 且$w\in E_i$.否则,如果存在w,不存在i使得$w\models\neg f_i$,则$m=n+2$ 且$w\in E_{n+2}$.
  设全序 $\boldsymbol{S}'=(E_1',\dots,E_{m'}')$,定义 $M'=(W,\boldsymbol{S}',VAR)$且
  $$M',w\models\overset{n}{\underset{i=0}{\wedge}}\left(\left(\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)\right)\right)\wedge\neg\left(\left(\neg f_i\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i+1}{\wedge}}f_k\right)\right){}^{m}\!\ge^{M}\left(\neg f_{i-1}\wedge\left(\overset{n}{\underset{k=i}{\wedge}}f_k\right)\right)\right)\right),$$
  对于任意$w\in W$,如果$w\models\neg f_i$,根据全序的性质,显然$w\in E_i'$,如果不存在i使得$w\models f_i$,则$w\in E_j'$,其中$j\ge n+2$,所以$\boldsymbol{US}_{RK}\sqsubset\boldsymbol{S}'$,故$(M_2,w)$是最细致模型. □

根据定理 5,将分级知识库在最大满足和最大不满足偏好策略下的推理通过L_{MPL}重写,转化为MPL的非单调推理过程.在实际智能决策应用中,VAR通常是有限的,因此W也是有限的,显然,建立在W上的二元关系也是有限的,因此模型数目也是有限的.因此,基于有限L_{MPL}描述的决策问题是可判定的.

5 结论和展望

多类型偏好共存情况下的智能决策是在IJCAI2005 会议上,由Souhila Kaci和Leendert van der Torre提出的人工智能偏好研究的新问题,其研究尚处于起步阶段.本文从人工智能知识表示和推理的角度出发,首先总结偏好类型划分以及多类型偏好共存研究现状,并提出当前缺乏完整逻辑系统和各种划分的合理性比较的缺憾,在此基础上,改进Souhila Kaci和Leendert van der Torre的偏好划分,提出一种能够满足多种类型偏好表示及其推理的偏好逻辑MPL:基于命题逻辑语言通过直接引入 4 个逻辑偏好算子构造了能够表示 4 类偏好的MPL语言

L_{MPL},基于包含、交、补 3 个集合操作,直观地给出了偏好推理的规律.此外,通过定义非单调语义和分级知识库重写,初步考察了MPL的应用前景.本文的工作是以Souhila Kaci和Leendert van der Torre的工作为出发点,围绕合理划分偏好现象和建立多类型偏好逻辑的初步探索,进一步的工作包括:① 用${}^{x}\geq_{c}^{y}$扩充MPL,使之能够表示和推理 ceteris paribus 偏好;② 非单调推理算法;③ K-T 偏好以及本文的 4 种类型偏好都是建立在全前序理性偏好上,如何将 MPL 扩展到偏序、前序等更一般的偏好关系上是有待进一步研究的问题.

References:

[1] Doyle J. Prospects for preferences. Computational Intelligence, 2004,20(2):111−136.

[2] Öztürk M, Tsoukiàs A, Vincke P. Preference modelling. In: Ehrgott M, Greco S, Figueira J, eds. State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 27−72.

[3] Kikuti D, Cozman FG, de Campos CP. Partially ordered preferences in decision trees: computing strategies with imprecision in probabilities. In: Brafman R, Junker U, eds. Proc. of Multidisciplinary IJCAI-05 Workshop on Advances in Preference Handling. Edinburgh, 2005. 118−123. http://wikix.ilog.fr/wiki/bin/view/Preference 05/WsProceedings

[4] Hansson SO. Preference Logic in Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[5] von Wright GH. The logic of preference reconsidered. Theory and Decision, 1972,3(2):140−169.

[6] Kaci S, van der Torre L. Algorithms for a nonmonotonic logic of preferences. In: Godo L, ed. Proc. of the 8th European Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty. 2005. 281−292. http://agamemnon.uni.lu/ILIAS/vandertorre/papers/ecsqaru05.pdf

[7] Kaci S, van der Torre L. Non-Monotonic reasoning with various kinds of preferences. In: Brafman R, Junker U, eds. Proc of the Multidisciplinary IJCAI-05 Workshop on Advances in Preference Handling. 2005. 112−117. http://wikix.ilog.fr/wiki/bin/view/Preference 05/WsProceedings

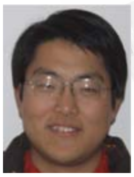
[8] van Benthem J, van Otterloo S, Roy O. Preference logic, conditionals and solution concepts in games. In: Lagerlund H, Lindström S, Sliwinski R, eds. Modality Matters: Twenty-Five Essays in Honour of Krister Segerberg. Uppsala: University of Uppsala, 2006. 61−76.

[9] Brewka G. A rank based description language for qualitative preferences. In: Saitta L, ed. Proc. of the 16th European Conf. on Artificial Intelligence. Valencia: IOS Press, 2004. 303−307.

[10] Lang J. Logic preference representation and combinatorial vote. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2004,42(1-3): 37−71.

[11] Coste-Marquis S, Lang J, Liberatore P, Marquis P. Expressive power and succinctness of propositional languages for preference representation. In: Dubois D, Welty C, Williams MA, eds. Proc. of the 9th Int'l Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2004). Menlo Park: AAAI Press, 2004. 203−212.

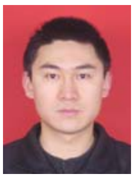
[12] Doyle J, Wellman M. Representing preferences as ceteris paribus comparatives. In: Hanks S, Russel S, Wellman M, eds. Working Notes of the AAAI Spring Symp. on Decision-Theoretic Planning. Menlo Park: AAAI Press, 1994. 69−75.



张志政(1980－),男,江苏南京人,博士,讲师,主要研究领域为人工智能逻辑,知识表示和推理,不确定信息处理.

王蓁蓁(1975－),女,博士生,主要研究领域为强化学习,逻辑程序设计.

邢汉承(1938－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能,逻辑程序设计,不确定信息处理.



倪庆剑(1980－),男,博士生,主要研究领域为群智能,机器学习.