ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.17, No.10, October 2006, pp.2057−2062
DOI: 10.1360/jos172057

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

基于 0-保留扰动的高斯算法平滑复杂度分析*

杨智应[1+], 雷向欣[2], 朱 洪[3]

[1](上海海事大学 计算机科学与工程系,上海 200135)
[2](华东理工大学 计算机科学与工程系,上海 200237)
[3](复旦大学 计算机科学与工程系,上海 200433)

Smoothed Analysis of Gaussian Algorithm Based on Zero-Preserving Perturbations

YANG Zhi-Ying[1+], LEI Xiang-Xin[2], ZHU Hong[3]

[1](Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, China)
[2](Department of Computer Science and Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)
[3](Department of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-21-58855200, E-mail: zyyang@cie.shmtu.edu.cn

Yang ZY, Lei XX, Zhu H. Smoothed analysis of Gaussian algorithm based on zero-preserving perturbations. *Journal of Software*, 2006,17(10):2057−2062. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/2057.htm

Abstract: Smoothed complexity of algorithm can explain the practical performance of algorithm more efficiently. Condition number of matrix is a main root to result in large error in solution during the running of Gaussian algorithm. Sankar, *et al*. performed a smoothed analysis of condition number of symmetric matrix under zero-preserving perturbations. However, the smoothed complexity presented by Sankar, *et al*. was higher and more complicated. To solve this problem, two key inequalities are presented. The inequalities are used to improving the smoothed complexity of condition number of symmetric matrix. The smoothed analysis of bits of precision needed by using Gaussian algorithm is performed and lower smoothed complexity is presented.
Key words: smoothed complexity; zero-preserving perturbations; condition number of matrix; symmetric matrix

摘 要: 算法的平滑复杂度能够更合理地反映算法的实际性能.在运行高斯算法求解线性系统过程中,矩阵条件数是导致求解误差偏大的一个因素.Sankar 等人用 0-保留高斯扰动进行对称矩阵条件数平滑分析.然而,Sankar 等人给出的平滑复杂度过高而且复杂.为了解决这个问题,首先提出了两个关键的不等式;然后将这两个不等式用于对称矩阵条件数的平滑分析,得到更简单、更低的平滑复杂度;并利用该结果对高斯算法求解精度进行平滑分析,从而得到更低的平滑复杂度.
关键词: 平滑复杂度;0-保留扰动;矩阵条件数;对称矩阵
中图法分类号: TP301 文献标识码: A

---

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60496321, 60373021 (国家自然科学基金); the Shanghai Education Council Science and Technology Development Fund of China under Grant No.05FZ14 (上海市教委科技项目); the Shanghai Maritime University Shipping Information Engineering Core Subject Project Fund under Grant No.XL0101-2 (上海海事大学航运信息工程重点学科基金)

Received 2004-12-30; Accepted 2006-03-06

算法的复杂度分析是软件系统设计与分析中一项非常重要的工作.通常仅对算法作最坏情况复杂度分析.有很多算法虽然具有指数阶的最坏情况复杂度,但它们在实际应用中却很奏效.这些算法的一个典型代表是求解线性规划问题的单纯形算法.20 世纪 80 年代初,人们用随机方法分析了单纯形算法,并证明了对输入参数的一系列分布,单纯形算法的平均时间复杂度是多项式的[1].但是,在随后的 20 多年里,很多人的研究指出:这种统计平均的多项式复杂度并不能很好地解释单纯形算法的实际有效性,因为其输入参数的统计分布具有很特殊的性质,在实际应用中非常罕见.另外,算法的平均情况复杂性与输入实例空间上的概率分布有关,不同的分布其相应的平均情况复杂性一般并不相同,况且输入实例空间上的概率分布一般也不容易得到.

麻省理工学院的 Daniel A Spielman 与波士顿大学的滕尚华提出了计算机算法的平滑复杂度(smoothed complexity)概念.Spielman 和 Teng 在 STOC 2001 的论文[2]中提出了一种新的算法复杂度分析方法,即算法的平滑复杂度分析.他们的思路是:在分析一种算法时,对输入实例加上微小幅度的随机扰动,然后分析算法的复杂度与输入规模及扰动的关系,由此得出的复杂度称为算法的平滑复杂度.Spielman 和 Teng 在文献[2]中对“两阶段投影-顶点”单纯形算法的时间复杂度进行平滑分析,证实了“两阶段投影-顶点”单纯形算法具有多项式时间平滑复杂度,对单纯形算法具有指数阶的最坏情况时间复杂度与其在实际应用中很奏效之间的矛盾给出了合理的解释.

众所周知,高斯消元法(以下简称高斯算法)是求解线性系统的常用算法.矩阵条件数和增长因子在求解大规模线性系统 $\overline{A}x=b$ 时是必须要考虑的重要因素.这是因为异常大的条件数和增长因子是引起病态矩阵从而导致求解误差偏大的主要原因.由于在实际的计算环境中存在着这样、那样的随机干扰,在带有随机干扰的情况下,矩阵是否会出现异常大的条件数和增长因子?要求高斯算法输出具有 m 位精度的解需要多少位机器精度?Sankar,Spielman 和 Teng 在文献[3]中采用高斯随机扰动模型对矩阵的条件数及增长因子进行了平滑分析,证实了矩阵 $\overline{A}$ 受到微小幅度的高斯随机扰动得到的随机矩阵 A 不可能有异常大的条件数和异常大的增长因子,并证实了高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器位数的平滑复杂度不超过

$$m+7\log_2 n+3\log_2(1/\sigma)+\log_2\log_2 n+7.$$

实对称矩阵具有很好的性质.为了保证在随机扰动模型下所得到的实例仍为对称矩阵,Sankar,Spielman 和 Teng 在文献[3]中提出 0-保留高斯随机扰动模型并作了对称矩阵条件数和增长因子的平滑分析,但所得到的平滑复杂度太高而且过于复杂.我们首先提出两个重要的不等式,并将文献[3]中给出的关于在 0-保留高斯随机扰动模型下对称矩阵条件数平滑分析结果

$$\Pr[\kappa(A)\ge\alpha]\le\frac{2n^2(1+8\sqrt{\log_2(2\alpha)})}{\alpha\cdot\sigma}$$

改进到

$$\Pr[\kappa(A)\ge\alpha]\le\frac{3\sqrt{2}n^2}{\alpha\cdot\sigma}.$$

其中:α是任意大的正数;$\kappa(A)$是矩阵 A 的条件数;n 是矩阵 A 的阶数;σ^2 是高斯随机变量的方差.然后,在 0-保留高斯扰动模型下,对高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器位数进行平滑分析;证实在 0-保留高斯扰动模型情况下,高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器位数不超过 $m+16\cdot\log_2 n+4\cdot\log_2(1/\sigma)+5$.

本文第 1 节介绍算法平滑复杂度的有关概念、矩阵的高斯随机扰动模型及对称矩阵的 0-保留高斯随机扰动模型的定义.第 2 节简要列出本文所要用到的几个引理.第 3 节给出本文的主要结果及其证明.第 4 节是小结与展望.

1 算法的平滑复杂度及随机扰动模型

给定一个算法Λ,具有给定规模 n 的所有可能输入实例所构成的输入实例空间记为 X_n.对于输入实例 $x\in X_n$,令 $C_\Lambda(x)$表示算法Λ关于输入实例 x 的复杂度.输入实例的规模 n 通常由包含在输入实例中的变量个数二进制表示及各变量取值所需二进制位数之和来表示[2].

算法Λ的最坏情况复杂度为 $f_{\max}(n)=\sup_{x\in X_n}(C_\Lambda(x))$.

算法Λ的平均情况复杂度为 $f_{ave}(n)=\underset{x\xleftarrow{\mu_n}X_n}{E}(C_\Lambda(x))$,其中,μ_n是 X_n 上的一个概率分布.

在文献[2]中,Spielman 和 Teng 将算法Λ的平滑复杂度定义为 $f(n,\sigma)=\sup_{x\in X_n}\underset{g}{E}[C_\Lambda(x+g\cdot\|x\|)]$.其中:g 是一个由均值为 0、方差为σ^2的高斯随机变量所组成的随机向量;$\|x\|$表示 x 的模;$x+g\cdot\|x\|$直观上可以理解为以输入实例 x 为中心的一个随机邻域(记为 $U_\sigma(x)$).该随机邻域是输入实例 x 受到随机扰动而产生的.由高斯分布的性质容易看出,随机邻域 $U_\sigma(x)$的大小主要由σ^2和$\|x\|$的大小决定.当$\sigma^2=0$时,$U_\sigma(x)$就是输入实例x,此时,平滑复杂度就是最坏情况复杂度;当σ^2 取得充分大时,$U_\sigma(x)$就可以认为是输入实例空间 X_n,此时,平滑复杂度就是平均情况复杂度.在实际的计算环境中,通常存在着微小的随机干扰,因此在平滑分析中,一般σ^2取得非常小,表示输入实例x受到微小幅度的随机扰动.由上述的定义可知,算法Λ的平滑复杂度就是算法Λ在 X_n 中的每一输入实例 x 的随机邻域 $U_\sigma(x)$上的平均情况复杂度的上确界.因此,算法的平滑复杂度越低,那么算法在实际应用中就越奏效.

矩阵的高斯随机扰动模型[2]. 设 $\bar{A}$ 是一个矩阵,$\bar{A}$ 的高斯随机扰动记为 A 是指对 $\bar{A}$ 中的每个元素加上相互独立均值为 0、方差为σ^2的高斯随机变量得到的随机矩阵.

矩阵的 0-保留高斯随机扰动模型[4]. 设 $\bar{A}$ 是一个矩阵,$\bar{A}$ 的 0-保留高斯随机扰动记为 A 是指对 $\bar{A}$ 中的每个不为 0 的元素加上相互独立均值为 0、方差为σ^2的高斯随机变量得到的随机矩阵.

设 $\bar{A}=\bar{T}+\bar{D}+\bar{T}^T$,为对称矩阵,其中,$\bar{D}$ 为对角矩阵;$\bar{T}$ 为下三角形矩阵,且其对角线上的元素为 0;$\bar{T}^T$ 是 $\bar{T}$ 的转置.

对称矩阵的 0-保留高斯随机扰动模型[4]. 设 $\bar{A}=\bar{T}+\bar{D}+\bar{T}^T$ 为对称矩阵,$\bar{A}$ 的 0-保留高斯随机扰动记为 $A=T+D+T^T$ 是指对 $\bar{T}$ 中的每个不为 0 的元素及 $\bar{D}$ 的对角线上的每一个元素加上相互独立均值为 0、方差为σ^2的高斯随机变量($\bar{T}^T$ 也随着 $\bar{T}$ 的随机扰动而扰动)得到的随机矩阵.

在下面的讨论中,$\Pr[\omega]$表示事件ω发生的概率;$E[\eta]$表示随机变量η的均值(即期望值);$\|\bar{A}\|_2$ 表示矩阵 $\bar{A}$ 的 2-范数.有关概率论、矩阵条件数及范数的概念见文献[5–7].

2 本文用到的几个引理和定理

引理 **1**. 令$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$是从 R^n 中均匀随机抽取的一个单位向量,则当 $c\le 1$ 时,有 $\Pr[a_1^2\ge c/n]\ge\Pr[u^2>c]$.其中,u 是一个均值为 0、方差为 1 的高斯随机变量.

引理 **2**. 令ζ是一个正随机变量,且存在正数$\alpha\ge 1$,使得对于任给的正数β, $\Pr[\zeta\ge\beta]\le\frac{\alpha}{\beta}$,则 $E[\log_2\zeta]\le 1+\log_2\alpha$.

以上各引理的证明在文献[3]中已给出,在此略去.

引理 **3**. 设ζ是一个正随机变量,且存在正数α,β ($\alpha\ge 1$),使得对于任给的正数$\gamma\ge 1$, $\Pr[\zeta\ge\gamma]\le\frac{\alpha(1+\beta\sqrt{\log_2\gamma})}{\gamma}$,

则 $E[\log_2\zeta]\le\log_2\alpha+1+\beta\sqrt{\log_2\alpha}+\frac{\beta}{2\sqrt{\log_2\alpha}}$.

证明:
$$
\begin{aligned}
E[\log\zeta]&=\int_0^\infty\Pr[\log_2\zeta\ge y]\mathrm{d}y=\int_0^\infty\min\left(1,\frac{\alpha(1+\beta\sqrt{y})}{\mathrm{e}^y}\right)\mathrm{d}y\\
&\le\int_0^{\log_2\alpha}\mathrm{d}y+\int_{\log_2\alpha}^\infty\frac{\alpha(1+\beta\sqrt{y})}{\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y\\
&\le\log_2\alpha+1+\alpha\int_{\log_2\alpha}^\infty\frac{\beta\sqrt{y}}{\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y .
\end{aligned}
$$

注:原文献[3]中因漏掉了 $\int_{\log_2\alpha}^\infty\frac{\beta\sqrt{y}}{\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y$ 前面的系数α而导致错误的结果.

令 $y=\frac{z^2}{2}$, $\int_{\log_2\alpha}^{\infty}\frac{\beta\sqrt{y}}{e^y}dy=\frac{\beta}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2\log_2\alpha}}^{\infty}z^2\cdot e^{-z^2/2}dz=\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2\log_2\alpha}}{\alpha}+\int_{\sqrt{2\log_2\alpha}}^{\infty}e^{-z^2/2}dz\right)$.

上式 $\le\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2\log_2\alpha}}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\sqrt{2\log_2\alpha}}\right)$(利用 $\int_{y}^{\infty}e^{-z^2/2}dz\le\frac{e^{-y^2/2}}{y}$).

即 $E[\log_2\zeta]\le\log\alpha+1+\beta\sqrt{\log_2\alpha}+\frac{\beta}{2\sqrt{\log_2\alpha}}$. □

引理 3 是对文献[3]中的引理 5.3 的纠正.文献[3]中的结果为 $E[\log_2\zeta]\le\log_2\alpha+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\log_2\alpha}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\sqrt{\log_2\alpha}}\right)+1$.

定理 1. 令 $\overline{A}=\overline{T}+\overline{D}+\overline{T}^T$ 是任给的 $n\times n$ 对称矩阵,$\|\overline{A}\|_2\le1$. $\overline{A}$ 的 0-保留高斯随机扰动记为 $A=T+D+T^T$,其中: $D=\overline{D}+G_D$,G_D 是由均值为 0、方差为$\sigma^2<1$ 且相互独立的高斯随机变量所组成的对角矩阵,则有

(1) $\Pr[\|A^{-1}\|_2>\alpha]<\frac{\sqrt{n}}{\alpha\sigma}$.

(2) $\Pr[\kappa(A)\ge\alpha]\le\frac{2n^2(1+8\sqrt{\log_2(2\alpha)})}{\alpha\sigma}$.

(3) $\Pr[\rho_U(A)>1+\alpha]<\frac{(n(n+1))^2}{4\alpha\sigma}$.

(4) $\Pr[\rho_L(A)>1+\alpha]<\frac{(2n^{9/2}+\sqrt{2}n^4+\sqrt{2}n^2)}{\sqrt{\pi}\sigma^2}\cdot\frac{\log_2\alpha}{\alpha}$.

其中,$\alpha>1$ 为任意给定的正数; $\kappa(A)$ 为矩阵的条件数.

定理 1 中的(1)~(4)分别是文献[3]中的引理 6.2、定理 6.6、定理 6.7 和定理 6.10 的结果.

3 本文的主要结果

定理 2. 设 $u\in R^m,v\in R^n$ 是相互独立的随机向量,$X(u,v),Y(u)$都是正随机变量,且存在正数α,使得对于任意给定的正数β, $\Pr[X(u,v)>\beta]\le\frac{\alpha}{\beta}$, 则 $\Pr[X(u,v)\cdot Y(u)>\beta]\le\frac{\alpha}{\beta}E[Y(u)]$.

定理 3. 设 A 为任意 $n\times n$ 矩阵,u,v 是单位向量,且$\|Au\|_2=\|A\|_2$,则$\|Av\|_2\ge\|A\|_2\cdot|\langle u,v\rangle|$.

定理 4(对称矩阵条件数的平滑分析结果的改进). 令 $\overline{A}=\overline{T}+\overline{D}+\overline{T}^T$ 是任意给定的 $n\times n$ 对称矩阵,$\|\overline{A}\|_2\le1$. $\overline{A}$ 的 0-保留高斯随机扰动记为 $A=T+D+T^T$,其中, $D=\overline{D}+G_D$,G_D 为由均值为 0、方差为$\sigma^2<1$ 的相互独立的高斯随机变量所组成的对角矩阵,则 $\Pr[\kappa(A)\ge\alpha]\le\frac{3\sqrt{2}n^2}{\alpha\sigma}$.这里的$\alpha$是可任意大的正数; $\kappa(A)$ 是矩阵 A 的条件数.

定理 2~定理 4 的证明过程由于篇幅所限,在此略去.

定理 5. 令 $\overline{A}=\overline{T}+\overline{D}+\overline{T}^T$ 是任意给定的 $n\times n$ 对称矩阵,$\|\overline{A}\|_2\le1$, $\overline{A}$ 的 0-保留高斯随机扰动记为 $A=T+D+T^T$,其中, $D=\overline{D}+G_D$,G_D 是由均值为 0、方差为$\sigma^2<1$ 的相互独立的高斯随机变量所组成的对角矩阵,则运行高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器位数不超过 $m+16\cdot\log_2 n+4\cdot\log_2(1/\sigma)+5$.

证明:运行高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器精度ε满足以下条件[3]:

$$5\cdot2^m\cdot n\cdot\rho_L(A)\cdot\rho_U(A)\cdot\kappa(A)\cdot\varepsilon\le1.$$

由此可得:$2.33+m+\log_2 n+\log_2(\rho_L(A))+\log_2(\rho_U(A))+\log_2(\kappa(A))\le\log_2(1/\varepsilon)$.

由引理 2 及定理 1 可得:$E[\log_2(\rho_U(A))]\le4\log_2 n+\log_2(1/\sigma)-2$;

由定理 1 可得: $E[\log_2(\rho_L(A))]=\int_0^{\infty}\Pr_A[\log_2(\rho_L(A))\ge x]\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{\infty} \Pr[\log_2(\rho_L(A)) \ge 1+x]\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{-1}^{\infty} \min\left(1, \frac{\Delta \cdot x}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x \\
&\le \int_{-1}^{\log_2 \Delta} \mathrm{d}x + \Delta \int_{\log_2 \Delta}^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \\
&\le 9\log_2 n + 2\log_2(1/\sigma),
\end{aligned}
$$

其中, $\Delta = \dfrac{2n^{\frac{9}{2}} + \sqrt{2}n^4 + \sqrt{2}n^2}{\sqrt{\pi}\sigma^2}$.

由引理 2 及定理 4 可得: $E[\log_2(\kappa(A))] \le 2\log_2 n + \log_2(1/\sigma) + 4.169$.

运行高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器位数的平滑复杂度至多是 $m+16\cdot\log_2 n+4\cdot\log_2(1/\sigma)+5$. □

类似于定理 5 的方法,如果采用 Sankar 等人给出的关于 0-保留高斯扰动对称矩阵条件数的平滑分析结果对高斯算法的求解精度作平滑分析可得:

定理 6. 令 $\overline{A} = \overline{T} + \overline{D} + \overline{T}^T$ 是任意给定的 $n\times n$ 对称矩阵, $\|\overline{A}\|_2 \le 1$, $\overline{A}$ 的 0-保留高斯随机扰动记为 $A=T+D+T^T$, 其中, $D = \overline{D} + G_D$, G_D 是由均值为 0、方差为 $\sigma^2<1$ 的相互独立的高斯随机变量所组成的对角矩阵,则运行高斯算法输出具有 m 位精度的解所需机器位数不超过

$$
m+16\cdot\log_2 n+4\cdot\log_2(1/\sigma)+8\sqrt{2+2\log_2(n)+\log_2(1/\sigma)}+4/\sqrt{2+2\log_2(n)+\log_2(1/\sigma)}+2.33.
$$

定理 5、定理 6 的结果说明:我们所作的改进降低了高斯算法求解精度的平滑复杂度.

4 总 结

本文对文献[3]在 0-保留高斯随机扰动模型下关于对称矩阵条件数的平滑分析结果作了简化,在此基础上,对高斯算法的计算精度进行了平滑复杂性分析.算法的平滑复杂度分析是从新的角度对算法复杂度进行分析的方法.其目的在于通过分析问题的输入实例空间中每一个输入实例的局部邻域上的平均情况复杂度,探索问题输入实例空间中是否存在最坏情况复杂度输入实例的稠密区域.这一研究领域得到理论计算机科学界的关注,并取得了许多成果[4,8,9],但也存在许多问题还有待于研究.

(1) 从已有实验结果来看,有选主元操作的高斯算法的精度比高斯顺序消元算法的精度要高.但从直觉上看,有选主元操作的高斯消元法的平滑复杂度比高斯顺序消元算法要低得多,如何证实这一猜想是值得研究的;

(2) Spielman 和 Teng 在文献[2]中对“两阶段投影-顶点”单纯形算法的时间复杂度进行平滑分析,证实了“两阶段投影-顶点”单纯形算法具有多项式时间平滑复杂度.但他们在分析过程中所用的方法很繁琐,对于一般的读者不易看懂,且给出的时间平滑复杂度上界过大.能否对他们的分析作简化,使得整个分析过程易于理解,且得到的时间平滑复杂度上界比文献[2]中的要低,这也是一项富于挑战性的研究;

(3) 在线调度算法 MLF 是时间共享多任务操作系统使用得很成功的在线调度算法之一.而且在 Windows NT 及 Unix 操作系统中使用在线调度算法 MLF 作为基本的调度策略,其目的在于向用户提供快速的响应.系统的响应时间通常用作业的平均响应时间(等价地就是各作业从发布到完成的总时间)来度量.在线调度算法 MLF 将作业组织到一个队列序列 $Q_0,Q_1,\ldots,Q_m$. Q_i 中的每个作业被执行 2^i 个时间单位后,如果还没有完成,则被提升到队列 Q_{i+1} 中去.设作业的处理时间取值于区间$[1,2^K]$,Motwani 等人已证明了其最坏情况竞争比下界是 $\Omega(2^K)$.但是,在线调度算法 MLF 在实际应用中却非常有效.为了解释这一矛盾,Bechetti 等人在文献[10]中对在线调度算法 MLF 进行了平滑分析.但用 Bechetti 等人的结果来解释上述矛盾还不是很能令人信服,原因是他们得出的平滑复杂度仍然偏高,需要作进一步研究将它降得更低.是否能降低到多项式,这也是一项富于挑战性的研究;

(4) 到目前为止,算法复杂度平滑分析主要针对 P 问题的算法复杂度作分析.对 NP-难问题的计算复杂度作

平滑分析、证实某个 NP-难问题具有多项式时间平滑复杂度,这是一项非常有意义的研究.

以上针对算法复杂度平滑分析领域里的一些主要研究成果进行了讨论和评价.在实际的应用环境中,通常都会有这样那样的随机干扰,我们认为,应用算法的平滑复杂度分析结果对求解实际问题的算法进行评价是一项非常有价值的研究工作.我们相信:随着算法复杂度平滑分析研究的不断深入,人们对算法的平滑复杂度分析意义将有更好的认识.算法的平滑复杂度分析将在软件开发与分析中具有重要的指导意义.

References:

[1] Borgwardt KH. The Simplex Method: A Probabilistic Analysis. Springer-Verlag, 1980.

[2] Spielman DA, Teng SH. Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time. In: SIGACT, ed. Proc. of the 33rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing. ACM Press, 2001. 296−305. http://www-math.mit.edu~spielman/ SmoothedAnalysis/papers.html

[3] Sankar A, Spielman DA, Teng SH. Smoothed analysis of the condition numbers and growth factors of matrices. In: Cucker F, Devore R, Olver P, eds. Proc. of the 2002 Conf. on the Foundations of Computational Mathematics. London: Cambridge University Press, 2002. http://www-math.mit.edu~spielman/SmoothedAnalysis/papers.html

[4] Spielman DA, Teng SH. Smoothed analysis of algorithms. In: LI T, ed. Proc. of the 2002 Int'1 Congress of Mathematicians, Abstracts of Plenary and Ivited Lectures. Beijing: Higher Education Press, 2002. 144−145. http://www-math.mit.edu~spielman/SmoothedAnalysis/papers.html

[5] Guan Z, Lu JF. Basic of Numerical Analysis. Beijing: Higher Education Press, 1998 (in Chinese).

[6] Shi MG, Gu LZ. Basic of Science and Engineering Computation. Beijing: Tsinghua University Press, 1999 (in Chinese).

[7] Fudan University. Basic of Probability Theory. Beijing: People's Education Press, 1979 (in Chinese).

[8] Yang ZY, Zhu H, Song JT. Further study on the smoothed analysis of condition number of matrix and Gaussian algorithm. Journal of Software, 2004,15(5):650−659 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/650.htm

[9] Yang ZY, Zhu H, Lei XX. Achievements and prospects of smoothed analysis of algorithms. Journal of Computer Research and Development, 2005,42(2):286−293 (in Chinese with English abstract).

[10] Bechetti L, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, Schäfer G, Vredeveld T. Average case and smoothed competitive analysis of the multi-level feedback algorithm. In: IEEE, ed. Proc. of the 44th Symp. on Foundations of Computer Science. Cambridge: IEEE Computer Society, 2003. 462−471. http://www.math.mit.edu~spielman/SmoothedAnalysis/papers.html

附中文参考文献:

[5] 关治,陆金甫.数值分析基础.北京:高等教育出版社,1998.

[6] 施妙根,顾丽珍.科学和工程计算基础.北京:清华大学出版社,1999.

[7] 复旦大学.概率论基础.北京:人民教育出版社,1979.

[8] 杨智应,朱洪,宋建涛.矩阵条件数及高斯算法平滑分析的进一步研究.软件学报,2004,15(5):650−659. http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/650.htm

[9] 杨智应,朱洪,雷向欣.算法复杂性平滑分析的研究进展与展望.计算机研究与发展,2005,42(2):286−293.

杨智应(1964－),男,广西钟山人,博士,副教授,CCF 高级会员,主要研究领域为算法设计与分析,网络安全.

朱洪(1939－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为算法与复杂性理论,密码学与电子商务安全,量子计算,计算经济学.

雷向欣(1972－),男,博士,讲师,主要研究领域为知识工程,数据库技术.