

# 基于非均匀 Catmull-Clark 细分方法的曲线插值\*

张景峤<sup>†</sup>, 王国瑾, 郑建民

(浙江大学 计算机图象图形研究所, 浙江 杭州 310027)

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

## Curve Interpolation Based on Non-Uniform Catmull-Clark Subdivision Scheme

ZHANG Jing-Qiao<sup>†</sup>, WANG Guo-Jin, ZHENG Jian-Min

(Institute of Computer Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-21-56332451 ext 806, E-mail: zhangjq@mail.shu.edu.cn

Received 2002-11-14; Accepted 2003-05-08

Zhang JQ, Wang GJ, Zheng JM. Curve interpolation based on non-uniform Catmull-Clark subdivision scheme. *Journal of Software*, 2003,14(12):2082~2091.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/2082.htm>

**Abstract:** Generating subdivision surfaces with complicated curve interpolation constrains is a concerned topic for computer graphics and geometric modeling. In this paper an efficient method that can interpolate cubic NURBS curves is proposed for generating the subdivision surfaces. A 'symmetric zonal mesh' is constructed by designing symmetric quadrilaterals for both sides of the control polygon of the interpolated curve. Applying the non-uniform Catmull-Clark subdivision scheme proposed by Sederberg et al. to the symmetric zonal mesh, it is proved that the mesh can converge to the interpolated curve. As a result, the limit surface of the polygonal mesh containing the symmetric zonal meshes is the subdivision surface satisfying the curve interpolation constrains. This algorithm can interpolate both the single NURBS curve and the curve mesh consisting of several NURBS curves. Therefore it can be widely used for product shape design and graphic software development.

**Key words:** curve interpolation; NURBS; subdivision scheme

**摘要:** 带有复杂型曲线插值约束的细分曲面的生成,是计算机图形学及几何造型技术等领域所关心的一个问题。鉴于此,提出了一种高效的可以插值三次 NURBS 曲线的细分曲面生成方法。只需在被插值曲线的控制多边形两侧构造具有对称性质的四边形,构成对称网格带;证明了对该对称网格带应用 Sederberg 等人提出的非均匀 Catmull-Clark 细分规则以后,它将收敛于这条被插值曲线。因此,含有这种对称网格带的多面体网格的细分极限曲面即为满足曲线插值约束的细分曲面。应用该方法,既可以插值单条 NURBS 曲线,也可以插值由多条 NURBS 曲线组成的曲线网格。因此,该方法广泛适用于产品外形和图形软件设计。

**关键词:** 曲线插值;NURBS;细分方法

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60173034 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2002CB312101 (国家重点基础研究发展规划(973))

第一作者简介: 张景峤(1975—),女,陕西咸阳人,博士,讲师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形。

中图法分类号: TP391

文献标识码: A

20 世纪 70 年代,Chaikin<sup>[1,2]</sup>引入了离散细分曲线的概念,稍后 Catmull 和 Clark<sup>[3]</sup>提出的著名细分方法以及 Doo-Sabin<sup>[4]</sup>关于奇异点处行为的分析理论,标志着细分方法正式成为曲线曲面造型的一种手段.其后的 20 多年间,曲线曲面的离散细分造型方法得到了越来越多的研究,既有新的细分规则的构造<sup>[5-10]</sup>,如 Loop<sup>[5]</sup>细分算法,Dyn,Levin 和 Gregory<sup>[6]</sup>提出的“Butterfly”插值细分算法等,也有对细分过程的收敛性和极限曲面的连续性分析理论研究<sup>[11-13]</sup>.在利用细分曲面解决数据点集的插值问题方面,Nasri<sup>[14]</sup>和 Halstead<sup>[15]</sup>做了开创性的工作.首先是 Nasri 给出了利用 Doo-Sabin 细分曲面解决这个问题的方法.后来,他又将此方法推广到带有法向约束的数据点集的插值问题.1993 年,Halstead 则提出了基于 Catmull-Clark 细分曲面的插值方法.

另一类插值问题即曲线插值,是几何形体造型领域中值得关注的的一个重要问题.用蒙皮法(skinning)设计 B 样条曲面,使其顺序通过一族曲线,是目前常用的一种曲线插值方法.但是,在蒙皮过程中,由于对曲线进行相容性处理会生成海量数据,因此就需要消去一定数量的节点,从而最终生成的 B 样条曲面只是尽可能地逼近而不是插值曲线.随着细分曲面研究的深入,Nasri<sup>[16]</sup>在他以前的研究工作基础上,给出了用 Doo-Sabin 细分规则生成可以对曲线插值的细分曲面造型方法.鉴于该方法只能用于插值均匀二次 B 样条曲线,我们在 Nasri 方法的基础上给出了利用 Catmull-Clark 细分曲面插值均匀三次 B 样条曲线的方法<sup>[17]</sup>.但是,由于 Catmull-Clark 方法和 Doo-Sabin 方法是将双三次和双二次均匀 B 样条曲面推广到任意拓扑网格上的细分算法,因此,该方法及 Nasri 的方法只能插值均匀 B 样条曲线.事实上,在许多造型设计中常会要求设计曲线是  $C^2$ ,  $C^1$  甚至  $C^0$  连续的,由于三次非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线的节点矢量可以是非均匀分布的,所以通过重节点技术可以修改曲线局部的连续性,使其达到设计要求.其次,适当地引入重节点,NURBS 曲线会与 Beziér 曲线一样,具有良好的端点插值性质,便于人们对曲线在端点的行为有较好的控制;权因子的引入也使得 NURBS 曲线在形状设计上具有更多的灵活性,并且能够精确表示圆锥截线.于是提出了构造可插值三次 NURBS 曲线的细分曲面这一研究课题.对此,Levin<sup>[18,19]</sup>提出了一种称为组合细分(combined subdivision)的方法,通过修改被插值曲线附近的细分规则来达到插值的目的,而被插值曲线可以是任意表示形式的.但在他所构造的细分过程中,一些必要量的计算必须依赖于被插值曲线的参数化,无论怎样修改细分规则,都常常需要引进复杂的代数变换,有时甚至是做不到的.

为了最终解决上述细分插值的新课题,我们利用 Sederberg 等人<sup>[20]</sup>提出的非均匀细分曲面算法给出了可插值 NURBS 曲线的非均匀细分曲面造型新方法.该方法从网格拓扑结构的角度出发,只需在被插值曲线的控制多边形两侧构造具有简单对称性质的多边形网格即可,而在细分过程中则无须修改被插值曲线附近的细分规则,因此细分过程是收敛的.应用该方法,既可以插值单条曲线,也可以插值多条曲线组成的曲线网格.该方法无疑拓宽了细分曲面的适用范围,因此在几何形体设计与造型或计算机图形及动画中具有良好的应用前景.

## 1 非均匀的 Catmull-Clark 细分曲面

1998 年,Sederberg 等人通过引入节点距的概念,给出了一种非均匀的细分方法,能够产生 NURBS 曲面.

对于三次周期 B 样条曲线,相应于控制多边形的每条边,赋予一个相应的节点距  $d_i$ .通过插入节点区间中点,由老点  $P_i$  产生的新点可计算如下(如图 1 所示):

$$Q_{2i+1} = \frac{(d_i + 2d_{i+1})P_i + (d_i + 2d_{i-1})P_{i+1}}{2(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})}, \quad (1)$$

$$Q_{2i} = \frac{d_i Q_{2i-1} + (d_{i-1} + d_i)P_i + d_{i-1} Q_{2i+1}}{2(d_{i-1} + d_i)}. \quad (2)$$

对于非均匀 Catmull-Clark 曲面,给它的控制网格的每条边赋予一个节点距.曲面的细分规则包括 3 部分:与节点距有关的新点的产生;节点距更新规则;拓扑结构的构造.在以下的表达式中,用  $d_{ij}^k$  表示和以  $P_i$  为端点的边有关的节点距.用  $d_{ij}^0$  表示边  $P_i P_j$  的节点距;用  $d_{ij}^+$  或  $d_{ij}^-$  表示边  $P_i P_j$  以  $P_i$  为中心按逆时针或顺时针方向旋转所遇到的第  $i$  条边的节点距(如图 2 所示).于是,对于非均匀 Catmull-Clark 曲面情形,每条边有一个节点距,所以

$$d_{ij}^0 = d_{ji}^0.$$

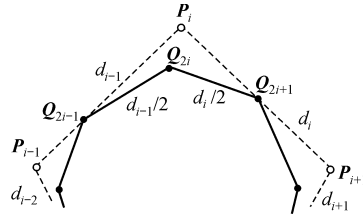


Fig.1 Generating non-uniform cubic B-spline curve by subdivision  
图1 非均匀三次 B 样条曲线的细分生成

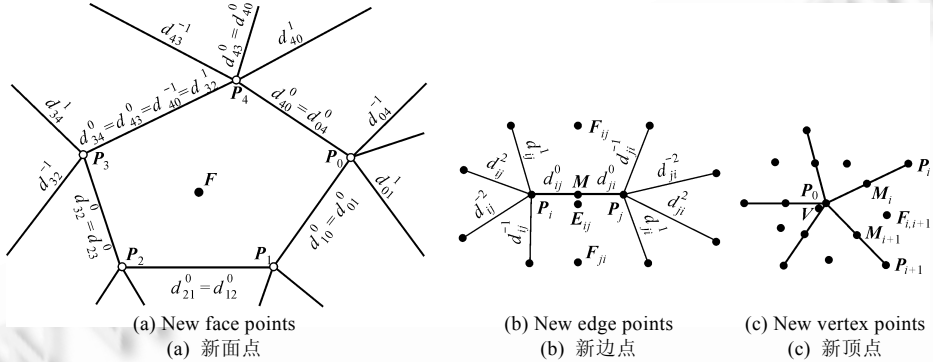


Fig.2  
图2

非均匀 Catmull-Clark 细分规则在拓扑上与均匀 Catmull-Clark 细分规则相一致,其差别在于新点产生的公式和节点距的更新(如图 2 所示).

对于一个  $n$  边面,其新面点为

$$F = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i P_i / \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i, \tag{3}$$

其中

$$\omega_i = (d_{i+1,i}^0 + d_{i+1,i}^2 + d_{i+1,i}^{-2} + d_{i-2,i-1}^0 + d_{i-2,i-1}^2 + d_{i-2,i-1}^{-2}) \times (d_{i-1,i}^0 + d_{i-1,i}^2 + d_{i-1,i}^{-2} + d_{i+2,i+1}^0 + d_{i+2,i+1}^2 + d_{i+2,i+1}^{-2}). \tag{4}$$

新边点由下式计算:

$$E = (1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ji})M + \alpha_{ij}F_{ij} + \alpha_{ji}F_{ji}. \tag{5}$$

其中

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} (d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1}) / [2(d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1} + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1)] & \text{当 } (d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1} + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1) \neq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}. \tag{6}$$

$$M = [(d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2})P_i + (d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2})P_j] / (d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2} + d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2}). \tag{7}$$

对于度数为  $n$  的顶点  $P_0$ ,其新顶点  $V$  为

$$V = cP_0 + 3 \sum_{i=1}^n (m_i M_i + f_{i,i+1} F_{i,i+1}) / (n \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1})). \tag{8}$$

这里,  $M_i$  由式(7)定义,  $F_{ij}$  由式(3)定义,

$$m_i = \frac{(d_{0i}^1 + d_{0i}^{-1})(d_{0i}^2 + d_{0i}^{-2})}{2}, \quad f_{ij} = d_{0i}^1 d_{0i}^{-1}, \tag{9}$$

$$c = \begin{cases} (n-3)/n & \text{当 } \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1}) \neq 0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}. \tag{10}$$

细分后新的节点距的设定可参照图 3.

## 2 对称网格带

基于上一节介绍的细分方法,我们对初始控制网格边的节点距的赋予方式进行下述修改.

首先,对控制网格的每条边附加两个辅助节点距,分别与这条边的两个邻接面相关联.用  $d_{ij}^{0+}$  和  $d_{ji}^{0-}$  表示边  $P_iP_j$  的辅助节点距,  $P_iP_j$  的节点距  $d_{ij}^0 = (d_{ij}^{0+} + d_{ij}^{0-})/2$ ; 用  $d_{ij}^i$  或  $d_{ij}^{-i}$  表示边  $P_iP_j$  以  $P_i$  为中心按逆(顺)时针方向旋转所遇到的第  $i$  条边  $P_iP_k$  的节点距,根据其旋转过程中经过边  $P_iP_k$  的哪一侧的邻接面,有  $d_{ij}^i = d_{ik}^{0+}$  和  $d_{ij}^{-i} = d_{ik}^{0-}$ , 或者  $d_{ij}^i = d_{ik}^{0-}$  和  $d_{ij}^{-i} = d_{ik}^{0+}$  (如图 4 所示).细分一次后,不再对网格边赋予辅助节点距.在后面的叙述中,对于初始控制网格边的节点距,若不特别指出,则与两个辅助节点距不加区别,即三者大小相等.

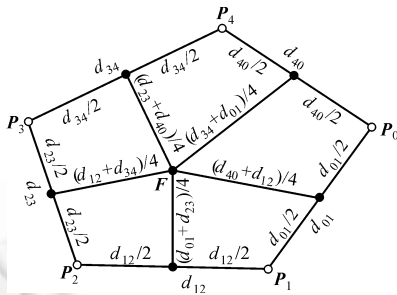


Fig.3 New knot spaces after subdivision

图 3 细分后新的节点距

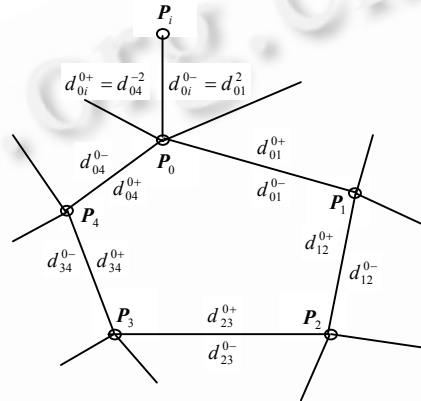


Fig.4 The assistant knot spaces of edges of the initial control mesh

图 4 初始控制网格边的辅助节点距

对于具有边界的网格,我们作如下处理,如图 5 所示,对于边界边  $P_iP_{i+1}$ ,其节点距记为  $d_{i,i+1}^0$ ,且约定  $d_{i,i+1}^2 = d_{i,i-1}^0$ ,  $d_{i+1,i}^{-2} = d_{i+1,i+2}^0$ ,  $d_{ij}^2 = d_{ij}^{-2} = d_{ij}^0$ .将边界边看作一条三次 NURBS 样条曲线的控制多边形,则在细分过程中,边界边所对应的新边点和新顶点可以按曲线细分公式(1)和公式(2)计算.

下面给出对称网格带的相关定义.

**定义 1.** 将一个四边形的一对对边的中点相连,得到一个新的多边形结构,称为对称多边形对,中点连线称为该对称多边形对的对称边,与对称边相交的一对边称为拼接边.如图 6 所示,边  $P_4P_5$  是对称边,边  $P_0P_1$  和  $P_3P_2$  是拼接边.

**定义 2.** 将一个四边形的对边中点分别相连,得到一个新的多边形结构,称为拼接多边形组.如图 7 所示,边  $P_1P_2$  和  $P_2P_3$  称为相邻边,边  $P_1P_2$  和  $P_3P_4$  称为相对边,  $P_0$  称为中心点.

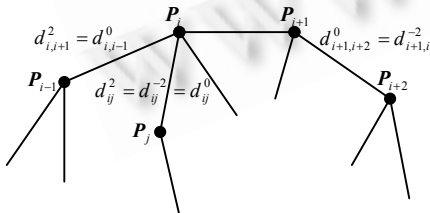


Fig.5 Handling the boundary of open mesh

图 5 开网格边界的处理

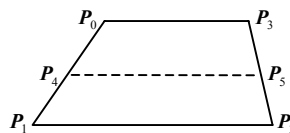


Fig.6 Symmetric polygon couple, dash line is the symmetric edge

图 6 对称多边形对,虚线为对称边

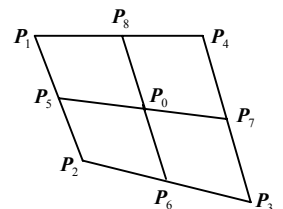


Fig.7 Joint polygon group

图 7 拼接多边形组

由定义 1,一个拼接多边形组可以看作是二个对称多边形对的组合.

**定义 3.** 由一系列对称多边形对和拼接多边形组顺序相连,且相邻多边形对或多边形组的公共边是对称多

边形对的拼接边或拼接多边形组的相对边,这样的多边形网格称为对称网格带.由对称边组成的多边形称为对称网格带的中分多边形(如图 8 所示).

在对一个对称网格带进行细分时,我们不计算其边界边和边界点所对应的新边点和新顶点.可以证明,只要赋予适当的节点距,一个对称网格带最终收敛于一条三次 NURBS 曲线,其控制多边形即为此对称网格带的中分多边形.

为叙述方便起见,不失一般性,我们以如图 9 所示的典型结构进行分析.其中  $d_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) 是中分多边形各边的节点距,  $e_i$  ( $i=1, 2$ ) 是列向节点距,  $P_i$  ( $i=0, \dots, 8$ ) 是对称网格带的顶点,  $F_i$  和  $E_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) 是新面点和新边点,  $V$  是  $P_0$  所对应的新顶点,  $M_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) 是由式(7)计算得到的点.

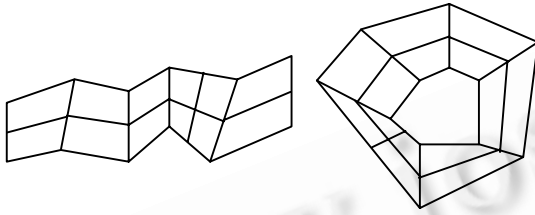


Fig.8 Symmetric zonal mesh  
图 8 对称网格带

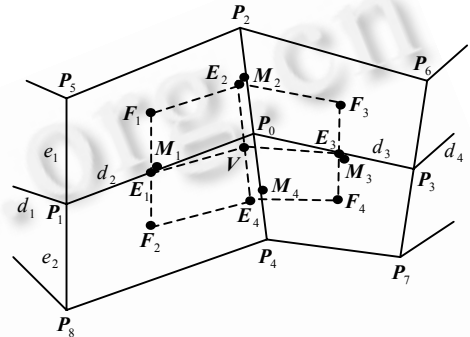


Fig.9 Subdividing the symmetric zonal mesh  
图 9 对称网格带的细分

**引理 1.** 给定一个对称网格带,若使与中分多边形同向的边具有与中分多边形相同的节点距,另一方向的所有边的节点距均相等,且所有列向边以非中分多边形顶点的端点为中心,按逆(顺)时针方向旋转所遇到的第 2 条边的节点距均相等,则细分一次后必有如下结论:

- (i) 中分多边形两侧的面所对应的新面点关于其公共边所对应的新边点对称;
- (ii) 中分多边形的边和顶点所对应的新边点和新顶点即是中分多边形按曲线细分规则进行细分时所产生的新点;
- (iii) 新边点  $E_2$  和  $E_4$  关于中分多边形顶点  $P_0$  所对应的新顶点  $V$  对称;
- (iv) 细分后得到的网格带仍是对称网格带.

证明:在图 9 中,由题设条件可知  $e_1 = e_2$ ,不妨设其值为  $e$ ;又知  $d_{51}^{-2} = d_{51}^2 = d_{81}^{-2} = d_{81}^2 = d_{20}^{-2} = d_{20}^2 = d_{40}^{-2} = d_{40}^2 = d_{63}^{-2} = d_{63}^2 = d_{73}^{-2} = d_{73}^2$ ,不妨设其值为  $\hat{e}$ .

由对称网格带的定义可知,

$$P_5 + P_8 = 2P_1, P_2 + P_4 = 2P_0, P_6 + P_7 = 2P_3.$$

由式(3)~(7)可知以下 2 个新面点:

$$F_1 = \frac{[(e + 2\hat{e})(d_2 + 2d_1)P_0 + (e + 2\hat{e})(d_2 + 2d_3)P_1 + 3e(d_2 + 2d_3)P_5 + 3e(d_2 + 2d_1)P_2]}{[4(2e + \hat{e})(d_1 + d_2 + d_3)]},$$

$$F_2 = \frac{[(e + 2\hat{e})(d_2 + 2d_1)P_0 + (e + 2\hat{e})(d_2 + 2d_3)P_1 + 3e(d_2 + 2d_3)P_8 + 3e(d_2 + 2d_1)P_4]}{[4(2e + \hat{e})(d_1 + d_2 + d_3)]},$$

则  $F_1 + F_2 = 2[(d_2 + 2d_1)P_0 + (d_2 + 2d_3)P_1] / [2(d_1 + d_2 + d_3)],$

所以  $F_1 + F_2 = 2M_1$ . 又  $E_1 = (eF_1 + eF_2 + 2eM_1) / 4e$ , 所以

$$E_1 = M_1 = (F_1 + F_2) / 2, \tag{11}$$

同理,有

$$E_3 = M_3 = (F_3 + F_4) / 2, \tag{12}$$

故结论(i)成立.

$$E_1 = M_1 = [(d_2 + 2d_1)P_0 + (d_2 + 2d_3)P_1] / [2(d_1 + d_2 + d_3)],$$

此即为将中分多边形按曲线细分规则式(1)进行细分时所产生的新点.

另一方面,由式(8)~式(10)可知新顶点:

$$V = P_0/4 + [ed_3F_1 + ed_3F_2 + ed_2F_3 + ed_3F_4]/[8e(d_2 + d_3)] + [2ed_3M_1 + e(d_2 + d_3)M_2 + 2ed_2M_3 + e(d_2 + d_3)M_4]/[8e(d_2 + d_3)].$$

将式(11)和式(12)代入上式,可得

$$V = P_0/4 + [4d_3M_1 + 4d_2M_3 + (d_2 + d_3)(M_2 + M_4)]/[8(d_2 + d_3)].$$

由式(7)可知

$$M_2 = [(e + 2\hat{e})P_0 + 3eP_2]/[2(2e + \hat{e})], \quad M_4 = [(e + 2\hat{e})P_0 + 3eP_4]/[2(2e + \hat{e})], \quad (13)$$

于是  $M_2 + M_4 = 2P_0$ , 所以

$$V = P_0/2 + [d_3M_1 + d_2M_3]/[2(d_2 + d_3)] = [d_3E_1 + (d_2 + d_3)P_0 + d_2E_3]/[2(d_2 + d_3)], \quad (14)$$

此即为将中分多边形按曲线细分规则式(2)进行细分时所产生的新点.故结论(ii)成立.

其次,由式(5)~式(7)可知新边点

$$E_2 = [d_3F_1 + d_2F_4 + (d_2 + d_3)M_2]/[2(d_2 + d_3)],$$

$$E_4 = [d_3F_2 + d_2F_3 + (d_2 + d_3)M_4]/[2(d_2 + d_3)],$$

所以

$$E_2 + E_4 = [d_3(F_1 + F_2) + d_2(F_3 + F_4) + (d_2 + d_3)(M_2 + M_4)]/[2(d_2 + d_3)].$$

将式(11)和式(12)代入上式,可得  $E_2 + E_4 = 2V$ . 故结论(iii)成立.

最后,由(i),(ii),(iii)可知,(iv)亦成立. □

由上述引理可知以下定理成立.

**定理 1.** 给定一个对称网格带,若使与中分多边形同向的边具有与中分多边形相同的节点距,另一方向的所有边的节点距均相等,且所有列向边以非中分多边形顶点的端点为中心,按逆(顺)时针方向旋转所遇到的第 2 条边的节点距均相等,则该对称网格带的细分极限收敛于由其中分多边形和中分多边形上的节点距所定义的一条三次 NURBS 样条曲线(如图 10 所示).

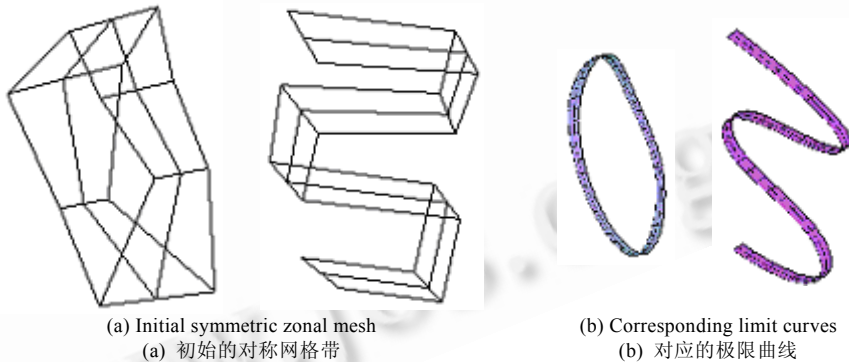


Fig.10 Convergence of the symmetric zonal mesh

图 10 对称网格带的收敛性

证明:将该对称网格带的中分多边形记为  $C^0$ , 对其依式(1)和式(2)进行第  $i$  次细分后的多边形记为  $C^i$ , 则有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C^i = c, \quad (15)$$

其中  $c$  即是由  $C^0$  定义的三次 NURBS 曲线.

由引理 1, 对称网格带细分后的网格仍为对称网格带,其中分多边形即为  $C^i$ ; 将  $C^i$  两侧与其同向的网格边组成的多边形分别记为  $P_i^l$  和  $P_i^r$ , 易知  $C^i$  上的点与  $P_i^l$  和  $P_i^r$  上的点之间具有 1-1 对应的关系, 对于参数  $u, P_i^l$  和  $P_i^r$  上的对应点分别记为  $P_i^l(u)$  和  $P_i^r(u)$ . 因此, 若使定理 1 成立, 只须证明:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists j > 0, j \in N, \text{ 满足 } \forall u, \text{ 有 } \|P_i^l(u) - c(u)\| < \varepsilon \text{ 和 } \|P_i^r(u) - c(u)\| < \varepsilon$$

成立即可.

将  $P_i^j$  与  $C^i$  之间的最大距离记为  $l_i$ , 可知  $l_i < \delta l_{i-1}$ ,  $0 < \delta < 1$ , 也就是说,  $l_i < \delta^{i-1} l_0$ .

由式(15),  $\forall \varepsilon > 0, \exists j_0$ , 当  $j > j_0$  时,  $\|C^j(u) - c(u)\| < \varepsilon$ , 所以,

$$\|P_i^j(u) - c(u)\| < \|P_i^j(u) - C^j(u)\| + \|C^j(u) - c(u)\| < \delta^{j-1} l_0 + \varepsilon.$$

因为  $0 < \delta < 1$ , 必然  $\exists j$ , 使得  $\delta^{j-1} l_0 < \varepsilon$ , 因而  $\|P_i^j(u) - c(u)\| < 2\varepsilon$ .

同理可得  $\|P_o^j(u) - c(u)\| < 2\varepsilon$ . □

对于嵌入在一个多边形网格中的对称网格带(如图 11 所示), 设该网格带的边  $P_i P_j$  的节点距  $d_{ij}^0 = d_{ij}^{0+} = d_{ij}^{0-}$ , 在进行第 1 次细分操作时, 对于如图 11 所示的以度数大于 4 的网格顶点  $P_2$  为端点的边, 为满足定理 1 的条件, 应有  $d_{20}^2 = d_{29}^0 = d_{20}^{-2} = d_{2,10}^{0+} = d_{40}^2 = d_{40}^{-2}, d_{26}^2 = d_{2,10}^{0-} = d_{26}^{-2} = d_{25}^{0+} = d_{25}^{0-} = d_{25}^0, d_{25}^{-2} = d_{29}^{0+} = d_{25}^2 = d_{26}^{0+} = d_{26}^{0-} = d_{26}^0$ .

基于定理 1, 可以得到如下推论(如图 12 所示):

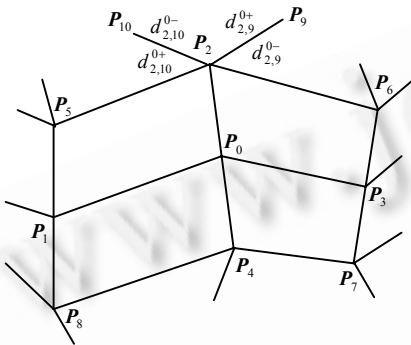


Fig. 11 Symmetric zonal mesh embedded in the polygonal mesh

图 11 嵌入在多边形网格中的对称网格带

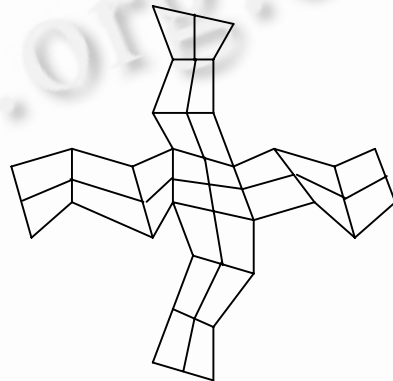


Fig. 12 Several symmetric zonal meshes sharing in one joint polygon group

图 12 多个对称网格带共用一个拼接多边形组

**推论 1.** 令  $\{M_i\}_{i=1}^m$  ( $m \leq 4$ ) 是  $m$  个共用一个拼接多边形组的对称网格带, 如图 12 所示, 它们构成了一个多边形网格  $M$ , 其节点距的设置满足定理 1 中的题设条件. 将  $\{M_i\}_{i=1}^m$  的细分极限曲线记作  $\{c_i\}_{i=1}^m$ , 则当  $M_i$  和  $M_j$  与拼接多边形组的公共边是一对相对边(相邻边)时, 必然  $c_i$  和  $c_j$  在拼接多边形组的中心点处达到  $G^2$  ( $G^0$ ) 连续.

证明: 我们仍以如图 9 所示的典型结构为例展开分析. 由拼接多边形组的定义和题设条件可知,

$$P_1 + P_3 = 2P_0, d_2 = d_3, d_1 = d_4. \tag{16}$$

由式(7),

$$M_1 = [(d_2 + 2d_1)P_0 + (d_2 + 2d_3)P_1] / [2(d_1 + d_2 + d_3)],$$

$$M_3 = [(d_3 + 2d_4)P_0 + (d_3 + 2d_2)P_3] / [2(d_2 + d_3 + d_4)].$$

将式(16)代入以上两式, 可得

$$M_1 + M_3 = 2P_0, \text{ 即 } E_1 + E_3 = 2P_0. \tag{17}$$

再将上式代入式(14), 可得  $V = P_0$ . 这表明, 拼接多边形组的中心点的几何位置在细分过程中保持不变, 因此, 点  $P_0$  可看作 B 样条的分段连接点. 由 B 样条曲线的性质, 推论得证. □

图 13 给出了一些对称网格带及其细分网格的例子.

### 3 曲线插值

我们可以将上一节给出的定理应用于如下的曲线插值问题: 给定若干个控制多边形  $\{C_i\}_{i=1}^V$ , 如何设计合适的多面体网格  $\hat{M}$ , 使得  $\hat{M}$  的细分极限曲面能插值  $\{C_i\}_{i=1}^V$  所定义的三次 NURBS 曲线  $\{c_i\}_{i=1}^V$ . 在这里的曲线中, 交于一点的曲线不能多于 4 条. 应用定理 1, 我们只需以给定的控制多边形的边为对称边, 构造对称网格带, 进而得到一个多面体网格, 则该多面体网格的细分极限曲面即为满足条件的插值曲面.

图 14~图 16 给出了一些实例.

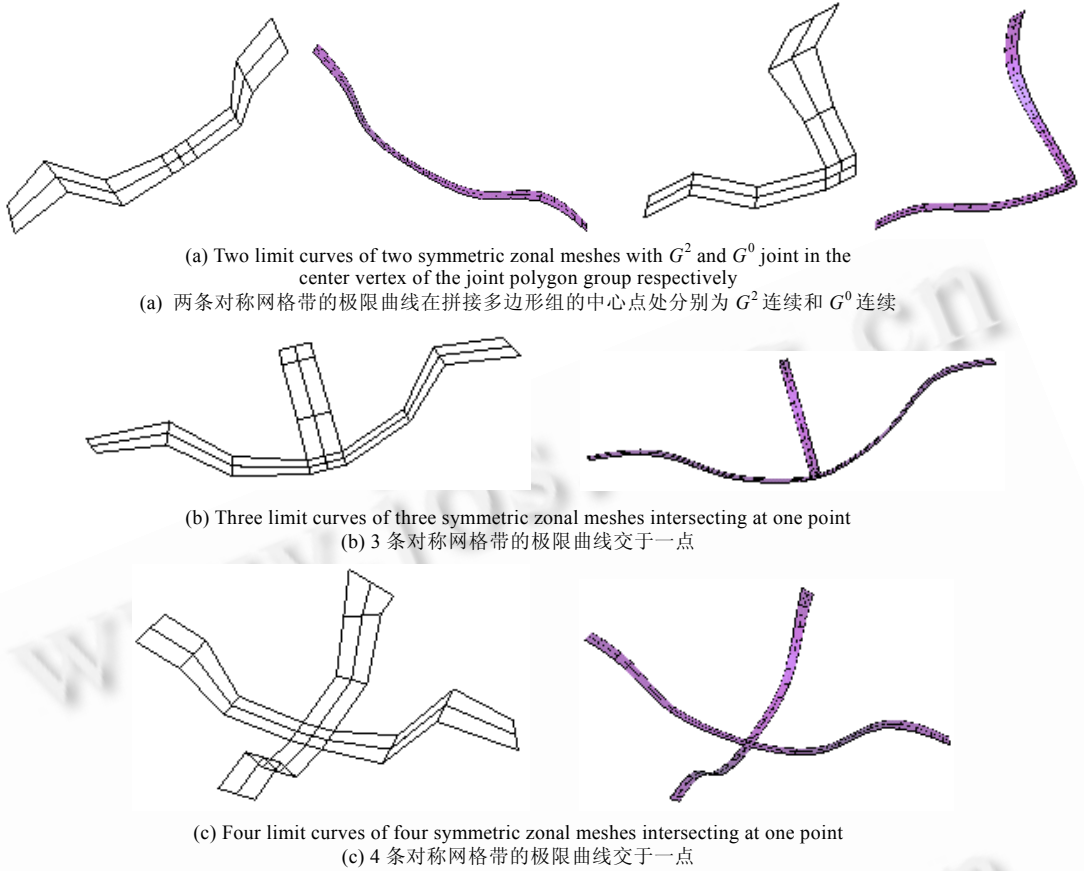


Fig.13 Several symmetric zonal meshes sharing in one joint polygon group. The wireframe drawing is symmetric zonal mesh and the right gray scale image is the corresponding mesh after thrice subdivision

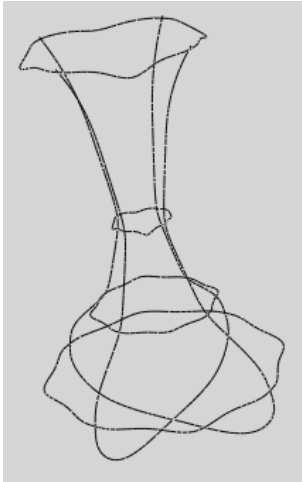
图 13 多个对称网格带共用一个拼接多边形组.线框图为对称网格带,其右侧的灰度图为对应的 3 次细分后的网格



Fig.14 The goblet. Subdivision surface interpolating multi nonintersecting curves, where the highlight curves are the interpolated curves

图 14 酒杯.能够插值多条无交曲线的细分曲面,其中亮线即为被插值曲线





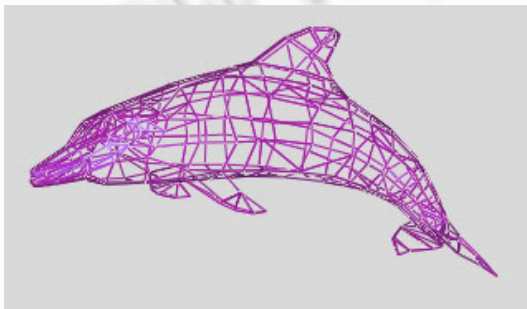
(a) The curve mesh consisting of interpolated cubic NURBS curves  
 (a) 被插值的三次 NURBS 曲线组成的曲线网格



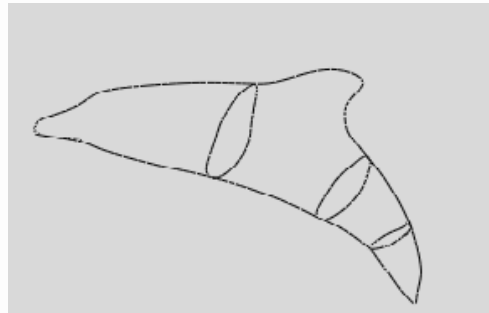
(b) The interpolation subdivision surface, where the highlight curves are the interpolated curves  
 (b) 细分插值曲面,其中亮线为被插值曲线



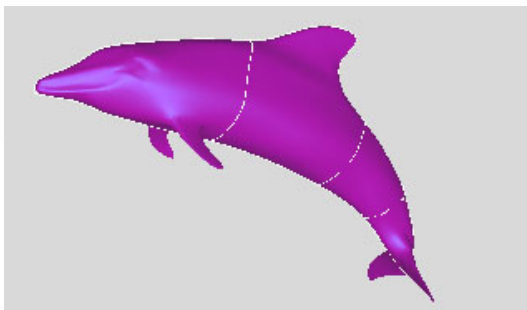
Fig.15 A vase  
 图 15 花瓶



(a) Polygon mesh model of a dolphin  
 (a) 海豚的多边形网格模型



(b) Curve mesh consisting of interpolated cubic NURBS curves  
 (b) 被插值的三次 NURBS 曲线组成的曲线网格



(c) Interpolation subdivision surface, where the highlight curves are the interpolated curves  
 (c) 细分插值曲面,其中亮线为被插值曲线

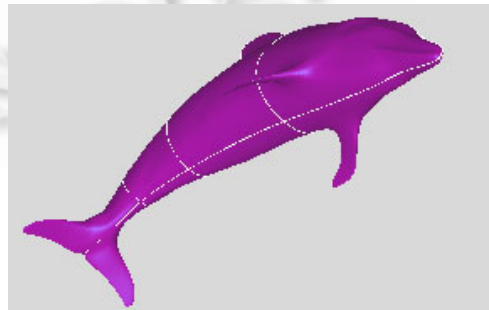


Fig.16 A dolphin  
 图 16 海豚

#### 4 结 论

本文给出了细分曲面造型中一种新的曲线插值方法.该方法利用对称网格带的特殊性质来构造多面体网格,实现起来十分简单、直观.它是基于 Sederberg 等人<sup>[20]</sup>提出的非均匀网格细分规则来生成最终的插值曲面,

能够插值任意的三次 NURBS 曲线,因而可以满足绝大多数造型要求.特别需要指出的是,此生成曲面能够插值单条、多条的开、闭或相交的空间曲线.该方法拓宽了非均匀网格细分方法的应用范围,在产品外形设计和计算机图形动画领域无疑具有广阔的应用前景.

本文方法的一个不足之处是,交于一点的被插值曲线不能多于 4 条.因此,多于 4 条的曲线交于一点的插值问题是我们今后的研究工作.

### References:

- [1] Chaikin G. An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics & Image Processing*, 1974,3(4):346~349.
- [2] Riesenfeld RF. On Chaikin's algorithm. *Computer Graphics & Image Processing*, 1975,4(3):304~310.
- [3] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 1978, 10(6):350~355.
- [4] Doo D, Sabin M. Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 1978,10(6):356~360.
- [5] Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles [MS. Thesis]. Utah: University of Utah, 1987.
- [6] Dyn N, Levin D, Gregory JA. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 1990,9(2):160~169.
- [7] Peters J, Reif U. The simplest subdivision scheme for smoothly polyhedra. *ACM Transactions on Graphics*, 1997,16(4):420~431.
- [8] Qin H, Mandal, C, Vemuri BC. Dynamic Catmull-Clark subdivision surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1998,4(3):215~229.
- [9] Zorin D, Schröder P, Sweldens W. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. In: Rushmeier H, ed. *Proceedings of the SIGGRAPH'96*. New York: ACM Press, 1996. 189~192.
- [10] Kobbelt L. A variational approach to subdivision. *Computer Aided Geometric Design*, 1996,13(8):743~761.
- [11] Warren J. Subdivision methods for geometric design. 1995. <http://www.cs.rice.edu/~warren/book>.
- [12] Reif U. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices. *Computer Aided Geometric Design*, 1995,12(2): 153~174.
- [13] Zorin D. Smoothness of stationary subdivision on irregular meshes. *Constructive Approximation*, 2000,16(3):359~398.
- [14] Nasri A. Polyhedral subdivision method for free form surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 1987,8(1):29~73.
- [15] Halstead M, Kass M, DeRose T. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces. In: Cunningham S, ed. *Proceedings of the SIGGRAPH'93*. New York: ACM Press, 1993. 35~44.
- [16] Nasri A. Recursive subdivision of polygonal complexes and its applications in computer-aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 2000,17(9):595~619.
- [17] Zhang JQ, Wang GJ. Curve interpolation based on Catmull-Clark subdivision scheme. *Progress in Natural Science*, 2003,13(2):142~148.
- [18] Levin A. Interpolating nets of curves by smooth subdivision surfaces. In: Rockwood A, ed. *Proceedings of the SIGGRAPH'99*. Los Angeles: ACM Press, 1999. 57~64.
- [19] Levin A. Combined subdivision schemes for the design of surfaces satisfying boundary conditions. *Computer Aided Geometric Design*, 1999,16(5):345~354.
- [20] Sederberg TW, Zheng J, Swell D, Sabin M. Non-Uniform recursive subdivision surfaces. In: Cohen M, Zettler D, eds. *Proceedings of the SIGGRAPH'98*. New York: ACM Press, 1998. 387~394.