

# 圆弧的 C-Bézier 曲线表示\*

陈秦玉, 汪国昭

(浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027);

(浙江大学 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

E-mail: xiaocin@163.net

http://www.zju.edu.cn

**摘要:** 圆弧的表示一直是计算机辅助设计关心的问题.但是,现有的方法对用户并不友好.利用 C-Bézier 曲线,给出了圆弧的一系列表示方法,讨论了这些表示方法的相互关系.为度量其优劣,提出了特征比的概念.同时,发现了高次的 C-Bézier 表示要优于低次的表示,特别地,五次 C-Bézier 曲线能很好地表示整圆.

**关键词:** CAD/CAM; C-Bézier 曲线; 特征比; 凸包性; NURBS

**中图法分类号:** TP391 **文献标识码:** A

圆弧是 CAD/CAM 系统中常见的曲线,比如连接两条直线段一般用圆弧段来过渡.但是, CAD/CAM 中最常用的工具 Bézier 却只能近似地表示.作为工业标准的 NURBS 表示可以表示圆弧.比如对圆心角  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) 的圆弧,可以用首末端点  $b_0$  与  $b_2$  及其切线的交点  $b_1$  为控制顶点,取正权因子  $w_0 = w_2 = 1, w_1 = \cos(\alpha/2)$  的有理二次 Bézier 曲线表示.但是,当  $\alpha \rightarrow \pi$  时,  $b_1$  远离  $b_0 b_2$  趋向于无穷远处,而且无法表示圆心角大于  $\pi$  的圆弧.若引入负的权因子,则会丧失其凸包性.王国瑾和汪国昭提出了三次有理 Bézier 曲线表示二次曲线的充要条件<sup>[1]</sup>,但需要选取权因子,不能表示整圆(最多只能表示圆心角为  $\frac{3}{4}\pi$  的圆弧),并且随着圆心角变大,存在控制多边形过大的问题. L. Piegl 和 W. Tiller 给出了在一般情况下对 NURBS 表示圆弧的几点要求<sup>[2]</sup>,包括控制顶点少和凸包紧凑.

Bézier 曲线的基底是形如  $1, t, t^2, t^3, t^4, \dots$  的参变量  $t$  的幂次项,那么,能否使用另外的基底构造基函数,使它们表示的自由曲线不仅保持 Bézier 曲线的优点,还能避免其缺点呢?

Koch 和 Lyche 对指数的 B-spline 进行了研究<sup>[3]</sup>.张纪文使用  $\sin(t), \cos(t), t, 1$  为基底构造了一系列的 C 曲线<sup>[4]</sup>,给出了 C 曲线的另一种表示形式<sup>[5]</sup>,讨论了它们的性质并给出了它们表示二次曲线的条件.但是,用 C-Bézier 曲线表示圆弧,当圆心角较大 ( $> 1.6\pi$ ) 时,需要一个极大的控制多边形(如图 1 所示),这对用户来说是极不方便的,有时甚至是无法接受的.

E. Mainar 等人讨论了在一般空间上 B 基的性质<sup>[6]</sup>,并在空间  $U = \{\sin t, \cos t, t^2, t, 1\}$  上给出了正规 B 基.本文在此基础上讨论了这些基函数的有关性质.我们发现这些基函数与四次 Bézier 有非常类似的性质,如权性和端点性质等.我们不妨称其为四次 C-Bézier 基,由它们表示的曲线称为四次 C-Bézier 曲线.为了表示区别,我们称张纪文给出的 C-Bézier 曲线为三次 C-Bézier 曲线.进一步地,本文给出了二次 C-Bézier 曲线的定义以及二次、

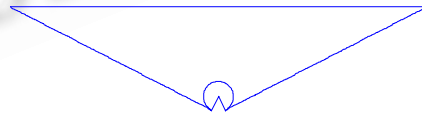


Fig.1 Representation of arc with cubic C-Bézier curve ( $\alpha=1.7\pi$ )

图 1 圆弧的三次 C-Bézier 表示( $\alpha=1.7\pi$ )

和端点性质等.我们不妨称其为四次 C-Bézier 基,由它们表示的曲线称为四次 C-Bézier 曲线.为了表示区别,我们称张纪文给出的 C-Bézier 曲线为三次 C-Bézier 曲线.进一步地,本文给出了二次 C-Bézier 曲线的定义以及二次、

\* 收稿日期: 2001-04-16; 修改日期: 2001-06-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60073023); 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030600)

作者简介: 陈秦玉(1978 - ),男,湖北天门人,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,科学计算可视化;汪国昭(1944 - ),男,江西婺源人,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,医学图像可视化.

四次和五次 C-Bézier 曲线<sup>[7]</sup>表示圆弧的条件.为了描述这 4 种曲线表示圆弧时控制多边形的紧贴程度,可以考虑很多度量方法,如控制多边形周长与圆弧长之比、多边形最大边长与圆弧半径之比等.这里,我们利用控制多边形的面积与圆弧所围的面积比来度量,并称该比例值为特征比.结果发现高次曲线在表示圆弧方面,特别是圆心角较大 ( $\alpha > 1.6\pi$ ) 时要明显优于低次的表示.

### 1 圆弧的二次 C-Bézier 表示

定义 1. 如图 2 所示,  $p_0, p_1, p_2$  是 3 个控制顶点,  $\alpha$  是任意的实数, 且  $0 < \alpha \leq \pi$ , 则由式(1)定义的曲线称为二次 C-Bézier 曲线.

$$P(t) = [\sin t, \cos t, 1]M[p_0, p_1, p_2], \tag{1}$$

其中

$$M = \frac{1}{1 - \cos \alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & 1 + \cos \alpha & -1 \\ 1 & -1 - \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

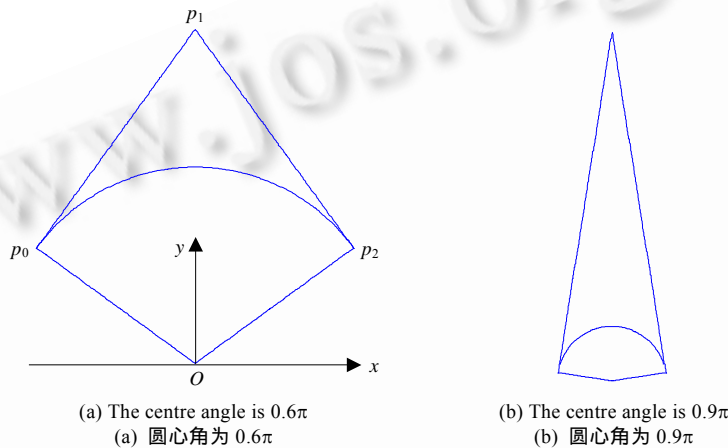


Fig.2 Representation of arc with quadratic C-Bézier curve  
图 2 圆弧的二次 C-Bézier 表示

由定义 1 可以得到二次 C-Bézier 曲线的很多性质:端点插值、导矢性质、凸包性、极限为二次 Bézier 曲线等.

二次 C-Bézier 曲线的基中含有  $\sin t, \cos t$  项,所以可以精确地表示圆弧.

定理 1. 如图 2(a)所示,  $p_0, p_1, p_2$  是控制顶点,  $r, \alpha$  是任意的实数,  $r > 0, 0 < \alpha \leq \pi$ , 并且  $p_0 p_1 = p_1 p_2$ ,  $p_1$  到  $p_0 p_2$  的距离为  $h = r \sin \alpha \tan \alpha$ , 则由控制顶点  $p_0, p_1, p_2$  确定的二次 C-Bézier 曲线是一段半径为  $r$ , 圆心角为  $\alpha$  的圆弧.

证明:如图 2(a)所示,过  $p_0, p_2$  作垂直于  $p_0 p_1, p_1 p_2$  的垂线交于  $O$  点,以  $O$  点为原点,  $p_0 p_2$  的平行线为  $x$  轴,  $O p_1$  为  $y$  轴建立直角坐标系,则控制顶点  $p_0, p_1, p_2$  的坐标分别为

$$p_0 = (-r \sin(\alpha/2), r \cos(\alpha/2)), p_1 = (0, r \cos(\alpha/2) + r \sin(\alpha/2) \tan(\alpha/2)), p_2 = (r \sin(\alpha/2), r \cos(\alpha/2)).$$

将它们代入式(1)并整理,就得到曲线  $P(t) = (r \sin(t - \alpha/2), r \cos(t - \alpha/2))$ . 它是一段以  $r$  为半径的圆弧.

但是,当  $\alpha \rightarrow \pi$  时,  $h$  变得很大而不可接受,如图 2(b)所示,而且它不能表示圆心角  $\alpha > \pi$  的圆弧.一个自然的想法就是升阶.

### 2 圆弧的三次 C-Bézier 表示

张纪文在 1996 年给出了三次 C-Bézier 曲线的定义和圆弧的表示方法<sup>[5]</sup>.

定义 2. 如图 3 所示,  $p_0, p_1, p_2, p_3$  是 4 个控制顶点,  $\alpha$  是任意的一个实数, 且  $0 < \alpha \leq \pi$ . 则由下式定义的曲线称为三次 C-Bézier 曲线:

$$p(t) = p_0B_0(t) + p_1B_1(t) + p_2B_2(t) + p_3B_3(t) = \frac{1}{\alpha - S} [\sin(t), \cos(t), t, 1] \begin{bmatrix} C & 1-C-M & M & -1 \\ -S & (\alpha-K)M & -KM & 0 \\ -1 & M & -M & 1 \\ \alpha & -(\alpha-K)M & KM & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} S &= \sin(\alpha), \\ C &= \cos(\alpha), \\ K &= \frac{\alpha - S}{1 - C}, \\ M &= \begin{cases} 1, & \alpha = \pi \\ \frac{S}{\alpha - 2K}, & 0 < \alpha < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

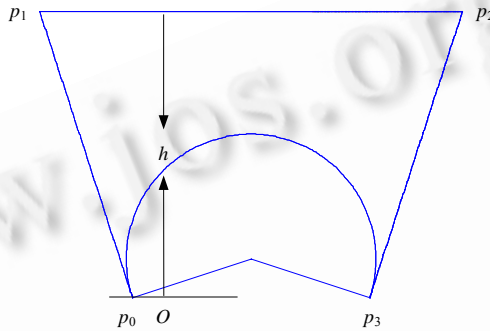


Fig.3 Cubic C-Bézier curve ( $\alpha=1.2\pi$ )  
图 3 三次 C-Bézier 曲线( $\alpha=1.2\pi$ )

定理 2. 如图 3 所示,  $p_0p_1p_2p_3$  是一个对称的四边形, 且  $p_1p_0, p_2p_0$  与底边的夹角为  $\alpha/2$ ,  $|p_0p_3| = 2r \sin(\alpha/2)$ ,  $p_1p_2$  到  $p_0p_3$  的距离为  $h$ , 则由这四点确定的三次 C-Bézier 曲线是一段半径为  $r$ , 圆心角为  $\alpha$  的圆弧. 其中,  $h = r(\alpha - \sin\alpha)/(2\sin(\alpha/2))$ .

事实上, C-Bézier 曲线定义中参数  $\alpha$  的范围可拓展至  $(0, 2\pi]$ . 当  $\alpha = 2\pi$  时, 曲线就是直线段  $p_0p_3$ . 这样, 随着  $\alpha$  从 0 到  $2\pi$ , C-Bézier 曲线从 Bézier 曲线变化到直线.

图 3 就是在参数  $\alpha$  取值范围拓展的情况下, 用三次 C-Bézier 曲线表示的一段圆心角为  $1.2\pi$  的圆弧.

与二次 C-Bézier 曲线相比, 三次 C-Bézier 曲线可以表示  $0 < \alpha < 2\pi$  的圆弧. 但  $\alpha \rightarrow 2\pi$  时,  $h$  迅速趋向于无穷大, 表现为极大的多边形表示一个极小的圆弧, 从而凸包性质变得愈来愈差, 给用户的交互输入带来巨大的困难, 甚至于不可接受.

为了描述控制多边形与所表示圆弧的紧贴程度, 我们引进特征比的概念, 即控制多边形面积与所得圆弧和两端点连线围的面积之比.

表 1 给出的是  $\alpha$  取不同值时的特征比  $k_0 = S_p / S_c$ , 其中  $S_p$  是多边形  $p_0p_1p_2p_3$  的面积,  $S_c$  是扇形  $p_0op_3$  和  $\Delta p_0op_3$  的面积之和.

Table 1  
表 1

$\alpha$	$\pi$	$1.1\pi$	$1.2\pi$	$1.3\pi$	$1.4\pi$	$1.5\pi$	$1.6\pi$	$1.7\pi$	$1.8\pi$	$1.9\pi$
$k_0$	2.000	2.306	2.783	3.570	4.969	7.712	13.907	31.280	102.600	811.873

由表 1 的数据可知, 特征比  $k_0$  是圆心角  $\alpha$  的增函数, 当圆心角度大于  $1.6\pi$  时, 特征比超过 14, 圆心角度为  $1.9\pi$  时, 特征比急剧增大, 达到了 811. 给用户交互输入控制多边形带来极大的困难. 如图 1 所示.

### 3 圆弧的四次 C-Bézier 表示

Mainar 等人给出了空间  $\Phi = \text{span}\{\sin t, \cos t, t^2, t, 1\}$  上正规 B 基的定义<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned}
 b_4(t) &= u_4(t) / u_4(\alpha), \\
 b_3(t) &= (Z_3(t) - b_4(t)) \left( \frac{S}{\alpha c - 2s} \right)^2, \\
 b_0(t) &= b_4(\alpha - t), \\
 b_1(t) &= b_3(\alpha - t), \\
 b_2(t) &= 1 - \sum_{i=2} b_i(t).
 \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 u_4(t) &= t^2 - 2 \cos C(t), \\
 S &= \sin C(\alpha), \\
 C &= \cos C(\alpha), \\
 s &= \sin \frac{\alpha}{2}, \\
 c &= \cos \frac{\alpha}{2}, \\
 \sin C(t) &= t - \sin t, \\
 \cos C(t) &= 1 - \cos t, \\
 Z_3(t) &= \sin C(t) / S, \\
 0 &\leq t \leq \alpha, \\
 0 &\leq \alpha < 2\pi.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

经过计算发现,上述的正规 B 基有与四次 Bézier 基类似的性质.

定义 3. 如图 4 所示,  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4$  是 5 个控制顶点,  $\alpha$  是任意的一个实数,且  $0 < \alpha \leq 2\pi$ ,则由式(3)定义的曲线称为四次 C-Bézier 曲线.

$$p(t) = p_0 b_0(t) + p_1 b_1(t) + p_2 b_2(t) + p_3 b_3(t) + p_4 b_4(t). \quad (3)$$

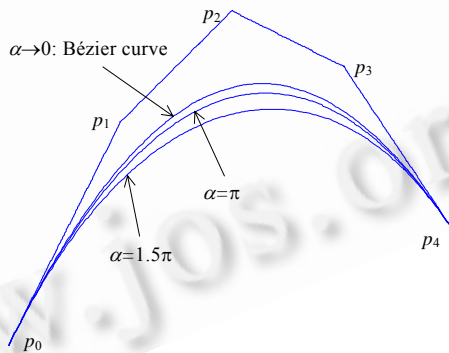


Fig.4 Quartic C-Bézier curve ( $\alpha=\pi, \alpha=1.5\pi$ )  
图 4 四次 C-Bézier 曲线( $\alpha=\pi, \alpha=1.5\pi$ )

定理 3. 如图 5(a)所示,  $p_0 p_1 p_2 p_3 p_4$  是一个对称的五边形,且  $p_1 p_0, p_3 p_4$  与底边  $p_0 p_4$  的夹角为  $\alpha/2$ ,且  $|p_0 p_4| = 2r \sin(\alpha/2)$ ,  $p_1$  到  $p_0 p_4$  的距离为  $h_1, p_2$  到  $p_0 p_4$  的距离为  $h_2$ ,则由这 5 点确定的四次 C-Bézier 曲线是一段半径为  $r$ ,圆心角为  $\alpha$  的圆弧.其中  $h_1 = \frac{1}{2} u_4(\alpha) s r / \sin C(\alpha), h_2 = \frac{1}{2} \sin C(\alpha) r / s (u_4(t), \sin C(t), s$  的定义见式(2)).

证明:如图 5(a)所示,过  $p_0, p_4$  作垂直于  $p_0 p_1, p_1 p_4$  的垂线交于  $O$  点,以  $O$  点为圆心,  $p_0 p_4$  的平行线为  $x$  轴,  $O p_2$  为  $y$  轴建立直角坐标系,得到控制顶点  $p_0, p_1, p_2$  的坐标分别为

$$\begin{aligned}
 p_0 &(-r \sin(\alpha/2), r \cos(\alpha/2)), p_1(-r \sin(\alpha/2) + h_1 \text{ctg}(\alpha/2), h_1 + r \cos(\alpha/2)), p_2(0, h_2 + r \cos(\alpha/2)), \\
 p_3 &(r \sin(\alpha/2) - h_1 \text{ctg}(\alpha/2), h_1 + r \cos(\alpha/2)), p_4(r \sin(\alpha/2), r \cos(\alpha/2)).
 \end{aligned}$$

将它们代入式(3)并整理,就得到曲线  $P(t) = (r \sin(t - \alpha/2), r \cos(t - \alpha/2))$ . 它是一段半径为  $r$  的圆孤.

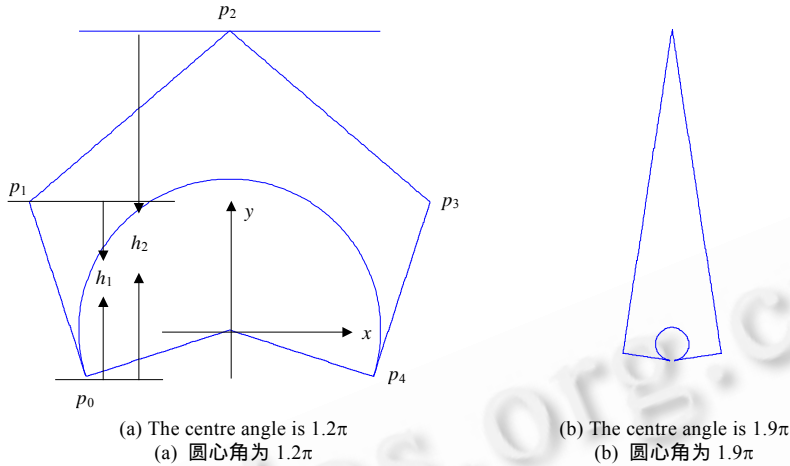


Fig.5 Representation of arc with quartic C-Bézier

图 5 圆孤的四次 C-Bézier 曲线表示

表 2 是  $\alpha$  取不同值时的特征比  $k_1 = S_p / S_c$ ,  $S_p$  是多边形  $p_0p_1p_2p_3p_4$  的面积,  $S_c$  是扇形  $p_0Op_4$  和  $\Delta p_0Op_4$  面积之和.

Table 2  
表 2

$\alpha$	$\pi$	$1.1\pi$	$1.2\pi$	$1.3\pi$	$1.4\pi$	$1.5\pi$	$1.6\pi$	$1.7\pi$	$1.8\pi$	$1.9\pi$
$k_0$	2.000	2.306	2.783	3.570	4.969	7.712	13.907	31.280	102.600	811.873
$k_1$	1.595	1.723	1.900	2.151	2.519	3.078	3.981	5.571	8.866	18.889

由表 2 可以看出,当  $\alpha$  较大 ( $\alpha > 1.6\pi$ ) 时,四次 C-Bézier 较好地解决了三次 C-Bézier 曲线表示圆孤时存在的控制多边形过大的问题.但当  $\alpha \rightarrow 2\pi$  时,  $h_2$  趋向于无穷大,四次 C-Bézier 曲线仍然不能表示整圆,如图 5(b)所示.

#### 4 圆孤的五次 C-Bézier 表示

金义明给出了五次 C-Bézier 曲线的定义<sup>[7]</sup>.

定义 4. 如图 6 所示,  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  是 6 个控制顶点,  $\alpha$  是任意的一个实数,且  $0 < \alpha \leq 2\pi$ ,则由式(4)定义的曲线称为五次 C-Bézier 曲线:

$$p(t) = p_0b_0(t) + p_1b_1(t) + p_2b_2(t) + p_3b_3(t) + p_4b_4(t) + p_5b_5(t). \tag{4}$$

其中,

$$b_5(t) = u_6(t) / u_6(\alpha),$$

$$b_4(t) = \gamma(t) / \gamma(\alpha) - b_5(t),$$

$$b_3(t) = (f_1 + f_2 + f_3) / f_4 - \gamma(t) / \gamma(\alpha),$$

$$b_0(t) = b_5(\alpha - t),$$

$$b_1(t) = b_4(\alpha - t),$$

$$b_2(t) = b_3(\alpha - t).$$

其中,

$$u_6(t) = t^3 - 6t + 6 \sin t,$$

$$\gamma(t) = 3u_4(t)u_4(\alpha) - 2u_6(t)S,$$

$$f_1 = -2s \sin(\alpha/2 - t) / C,$$

$$f_2 = (2t^3 - 3\alpha^2 - 12c \sin(\alpha/2 - t)) / (6s),$$

$$f_3 = (\alpha - 2c^2t) / \sin C(a) - ct / s,$$

$$f_4 = 4s^2 / C - \alpha^3 / (6s) + 4sc / S - c\alpha / s - 2\alpha c^2 / \sin C(\alpha).$$

可以验证五次 C-Bézier 曲线有类似于五次 C-Bézier 曲线的性质.作者给出了五次 C-Bézier 曲线表示圆孤的条件.

定理 4. 如图 6 所示,  $p_0p_1p_2p_3p_4p_5$  是一个对称的六边形, 且  $p_1p_0, p_5p_0$  与底边的夹角为  $\alpha/2$ , 且  $|p_0p_5| = 2r \sin(\alpha/2)$ ,  $p_1$  到  $p_0p_5$  的距离为  $h_1$ ,  $p_2$  到  $p_0p_5$  的距离为  $h_2$ , 且  $|p_2p_3| = d$ , 则由这 5 点所确定的五次 C-Bézier 曲线是一段半径为  $r$ , 圆心角为  $\alpha$  的圆弧. 其中

$$h_1 = su_6(\alpha)r/(3u_4(\alpha)),$$

$$h_2 = -\alpha r(\alpha^2 + 6\alpha c + 12s)/(12(\alpha c - 2s)),$$

$$d = -r\alpha^2(-24s^2 + \alpha^2(2 + 4c^2 + \alpha cs))/(12(\alpha c + 2s)(\alpha c - 2s)^2).$$

证明: 如图 6 所示, 过  $p_0, p_5$  作垂直于  $p_0p_1, p_4p_5$  的垂线交于  $O$  点, 以  $O$  点为圆心,  $p_0p_4$  的平行线为  $x$  轴, 建立直角坐标系, 则控制顶点  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  的坐标分别为

$$p_0(-r \sin(\alpha/2), r \cos(\alpha/2)), p_1(-r \sin(\alpha/2) + h_1 \text{ctg}(\alpha/2), h_1 + r \cos(\alpha/2)), p_2(0, h_2 + r \cos(\alpha/2)),$$

$$p_3(r \sin(\alpha/2) - h_1 \text{ctg}(\alpha/2), h_1 + r \cos(\alpha/2)), p_4(r \sin(\alpha/2), r \cos(\alpha/2)).$$

将它们代入式(4)并整理, 就得到曲线  $P(t) = (r \sin(t - \alpha/2), r \cos(t - \alpha/2))$ . 它是一段以  $r$  为半径的圆弧.

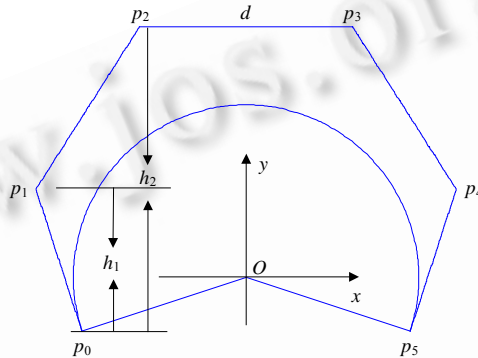


Fig.6 Representation of arc with quintic C-Bézier curve

图 6 圆弧的五次 C-Bézier 曲线表示

同样地, 我们求出了五次 C-Bézier 曲线在  $\alpha$  取不同值下的特征比  $k$ , 见表 3.

Table 3  
表 3

$\alpha$	$\pi$	$1.1\pi$	$1.2\pi$	$1.3\pi$	$1.4\pi$	$1.5\pi$	$1.6\pi$	$1.7\pi$	$1.8\pi$	$1.9\pi$
$K_0$	2.000	2.306	2.783	3.570	4.969	7.712	13.907	31.280	102.600	811.873
$K_1$	1.595	1.723	1.900	2.151	2.519	3.078	3.981	5.571	8.866	18.889
$K$	1.629	1.508	1.611	1.750	1.938	2.198	2.562	3.083	3.843	4.976

由表 3 可以看出, 当五次 C-Bézier 曲线表示圆弧时, 控制多边形更贴近所表示的圆弧. 并且, 五次 C-Bézier 曲线能够表示整圆, 此时  $h_1 = 0, h_2 = \pi^2/3 - \pi, d = \pi$  均是  $\alpha \rightarrow 2\pi$  时的极限, 特征比为 6.715, 如图 7 所示.

如图 8 所示为各次 C-Bézier 曲线表示圆弧的关系. 可以看出, 高次 C-Bézier 曲线表示实际上是对低次表示的割角.

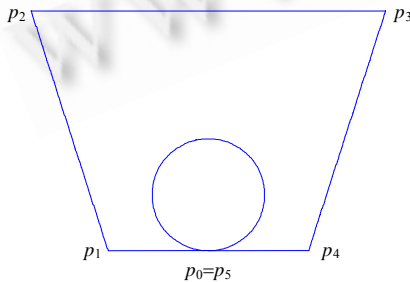


Fig.7 Representation of circle

图 7 整圆的表示

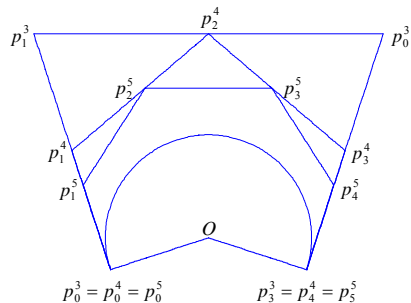


Fig.8 An arc represented by the C-Bézier curves with different degrees

图 8 不同次数的 C-Bézier 曲线表示同一圆弧

## 5 结 论

本文讨论了各次 C-Bézier 曲线表示圆弧的条件,发现低次的 C-Bézier 曲线表示圆弧有些不足,如二次只能表示圆心角不超过  $\pi$  的圆弧,三次、四次可以表示圆心角  $0 < \alpha < 2\pi$  的圆弧,但当  $\alpha$  较大接近  $2\pi$  时,控制多边形变得极大而不可接受.为度量这些曲线表示圆弧的优劣,提出了特征比的概念.我们发现特征比是圆心角  $\alpha$  的递增函数.五次 C-Bézier 曲线在表示圆上有良好的性质,并且可以表示整圆.

### References:

- [1] Wang, Guo-jin, Wang, Guo-zhao. The rational cubic Bézier representation of conics. *Computer Aided Geometric Design*, 1992,9(6):447~455.
- [2] Piegl, L., Tiller, W. A menagerie of rational B-Spline circles. *IEEE Computer Graphics & Application*, 1989,9(5):48~56.
- [3] Koch, P.E., Lyche, T. Exponential B-splines in tension. In: Chui, C.K., Schumaker, L.L., Ward, J.D., eds. *Approximation Theory VI*. New York: Academic Press, 1989. 361~364.
- [4] Zhang, Ji-wen. C-Curves: an extension of cubic curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1996,13(3):199~217.
- [5] Mainar, E., Pea, J.M., Sanchez-Reyes, J. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model. *Computer Aided Geometric Design*, 2001,18(1):37~60.
- [6] Jin, Yi-min. The definition and properties of the quintic C-curves [MS. Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2001 (in Chinese).

### 附中文参考文献:

- [6] 金义明.五次 C-曲线的生成及其性质[硕士学位论文].杭州:浙江大学,2001.

## Representation of Arc with C-Bézier Curve\*

CHEN Qin-yu, WANG Guo-zhao

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: xiaocin@163.net

<http://www.zju.edu.cn>

**Abstract:** Representation of a circular arc plays an important role in CAD. However, the existing methods are not friendly to designers. In this paper, a series of methods are presented to construct the circular arc with C-Bézier curves. In order to compare with the old methods, so-called characteristic ratio is proposed. As a consequence, the C-Bézier curves with degree higher are better than the lower. Specially, the quintic C-Bézier curve can construct the whole circle.

**Key words:** CAD/CAM; C-Bézier curve; characteristic ratio; convex hull; NURBS

\* Received April 16, 2001; accepted June 25, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60073023; the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1998030600