1000-9825/2002/13(02)0304-07 ©2002 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.13, No.2

求解混合约束非线性规划的神经网络模型*

陶 卿[1,2], 任富兴[2], 孙德敏[3]

[1](中国科学院 自动化研究所,北京 100080);
[2](中国人民解放军炮兵学院 一系,安徽 合肥 230031);
[3](中国科学技术大学 自动化系,安徽 合肥 230027)
E-mail: q_tao@sohu.com
http://www.ia.ac.cn

摘要: 通过巧妙构造 Liapunov 函数,提出一种大范围收敛的求解优化问题的连续神经网络模型.它具有良好的功能和性能,可以求解具有等式和不等式约束的非线性规划问题.该模型是 Newton 最速下降法对约束问题的推广,能有效地提高解的精度.即使对正定二次规划问题,它也比现有的模型结构简单.

关 键 词: 非线性规划问题;神经网络;能量函数;大范围收敛性
中图法分类号: TP18 文献标识码: A

数学规划问题在信号与信息处理、最优控制、军事运筹和经济学中有非常广泛应用,其中非线性规划问题占据着十分重要的地位,对非负定性的规划问题,其解的存在性理论已相当完整[1],大量的学术研究都是围绕算法展开的.

1982 年,Hopfield 提出了以自己名字命名的神经网络,引进了能量函数概念,为神经网络应用于优化奠定了理论基础,也为数学规划的算法研究开辟了一条新途径[2,3].它的优点在于易用电路实现,可在电路时间常数级内求解大规模复杂的优化问题,比普通的规划问题数值算法迅速快捷.由于这种动力系统方法建立在对规划问题解本质性描述的基础上,我们认为它是离散数值算法的高级形式,它克服了通过离散数值算法须寻求可行方向的缺陷,由于有 Liapunov 稳定性理论作为理论分析工具,比普通数值算法更容易得到收敛性,同时神经网络动力系统的离散化还可产生新的近似数值算法[4],神经计算已成为软计算的重要组成部分.

连续 Hopfield 网络实质上基于梯度下降方法,由于它与具体问题的约束无关,应用上存在一定的困难.如何将 Newton 无约束的下降流线方程[5]推广到有约束的情形是设计求解各种约束优化问题神经网络的关键.1996 年,文献[6]设计出一种全新的大范围收敛二次规划神经网络,克服了很多优化神经网络的不足,最近的文献[4,7]使文献[6]网络的性能和功能更趋于完善.尽管文献[4,6,7]使得求解优化问题的神经网络研究达到了一个新的水平,但我们经过仔细研究认为,它们仍然存在一定的缺陷.首先文献[6]模型的无约束情形并不是 Newton 下降流线方程,即它不是 Newton 最速下降法的推广,其次文献[4,6,7]没有描述待优化目标函数的动态变化趋势,也没有描述网络运动过程是否满足约束,更没有考虑收敛速率.

对于分析神经网络的稳定性,常用的方法是采用 Liapunov 直接方法[8],但由于 Liapunov 方法首先需要知道平衡点的位置,它对于平衡点往往为规划问题解的神经网络动力系统来说无法应用.1959 年,LaSalle 发现了 Liapunov 能量函数和 Birkhoff 极限集之间的关系,提出了 LaSalle 不变性原理[9],极大地推广了 Liapunov 直接方

* 收稿日期: 2000-04-13; 修改日期: 2000-07-31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60175023);安徽省自然科学基金资助项目

作者简介: 陶卿(1965－),男,安徽长丰人,博士,副教授,主要研究领域为神经网络,支持向量机;任富兴(1949－),男,天津人,教授,主要研究领域为作战指挥理论与方法;孙德敏(1939－),男,辽宁新民人,教授,博士生导师,主要研究领域为模式识别与智能系统,控制理论及其应用.

法.由于 LaSalle 不变性原理不需要事先知道平衡点的位置,它是分析神经网络动力系统稳定性的有效工具,但关键的问题在于构造合适的 Liapunov 能量函数,不同的 Liapunov 能量函数对确立神经网络的结构和分析神经网络的性能有很大的影响.

本文利用闭凸集上的投影算子刻画规划问题的解,提出一种比文献[6]功能和性能更完善的神经网络模型,它可以求解具有等式和不等式约束的非线性规划问题,更易得到满足约束条件的近似解.即使是对特例文献[6]中的二次规划问题,本文的模型也比文献[6]简单,本文的模型是 Newton 最速下降法对复杂约束问题的推广,这本身在数学理论上也很有意义,它非常便于分析特殊约束下目标函数的变化趋势和收敛速率,且在设计理想联想记忆器和揭示联想记忆的理论依据方面也有重要贡献[10,11].以上的一切都建立在巧妙构造神经网络系统 Liapunov 能量函数和运用 LaSalle 不变性原理的基础上.计算机模拟的结果说明了本文的理论分析是正确的,本文的模型比文献[6]的模型更实用.

1 非线性规划问题

考虑下述混合约束的非线性规划问题:

$$\begin{cases}\min f(x)\\ x\in Q, Dx=b\end{cases}, \tag{1}$$

其中 $f:R^m\to R$ 二阶连续可微, $Q\subset R^m$ 是闭凸集, D 是 $m\times n$ 矩阵, $b\in R^m$.以下假定非线性规划问题式(1)的解集非空, x^* 是规划问题式(1)的一个解, P 为 Q 上的投影算子(其定义见引理 1.1).

假设 **1**. 本文始终假定存在常数 $c_1\geq 0$,使 $h^T(x)f''h\geq c_1\|h\|^2, \forall x,h\in R^m$.

当 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^TAx+a^Tx$,A 半正定时,它显然满足假设 1.当 $c_1>0$ 时,规划问题有式(1)唯一解.

引理 **1.1**[12,13]. 对 $\forall x\in R^m$, 存在唯一一点 $P(x)$,满足 $\|x-P(x)\|=\inf\limits_{y\in Q}\|x-y\|$,称 $P(x)$为 x 在 Q 上的投影,而 P 称为 Q 上的投影算子,且 $\|P(x)-P(y)\|\leq\|x-y\|$, $\forall x,y\in R^m$.对 $\forall\tilde{x}\in R^m, x_0\in Q$,则 $\langle x-x_0, x-x_0\rangle\leq 0$, $\forall x\in Q$ 的充要条件是 $x_0=P(\tilde{x})$ .d

对非线性规划问题式(1),当 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^TAx+a^Tx$ 时,文献[6]提出以下模型:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(I+A)[P(x-Ax+D^Ty-a)-x]-D^T(Dx-b)\\ \dfrac{dy}{dt}=-DP(x-Ax+D^Ty-a)+b\end{cases}. \tag{2}$$

本文提出以下神经网络模型来求解:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x+D^Ty-f'(x))-x\\ \dfrac{dy}{dt}=-DP(x+D^Ty-f'(x))+b\end{cases}. \tag{3}$$

显然,本文的模型更为简单,网络实现更经济.这对大规模规划问题的神经网络的实现具有重要意义.

定理 **1.1**. x^* 是规划问题式(1)的解的充要条件是存在 y^*,使

$$x^*=P(x^*+D^Ty^*-f'(x^*)),\ Dx^*=b\ . \tag{4}$$

证明:式(1)的问题的 Lagrange 函数为 $L(x,y)=f(x)-y^T(Dx-b)$,根据假设条件, $f(x)$是凸函数.

根据 Khun-Tuker 鞍点型定理[12], x^* 是规划问题式(1)的解的充要条件是存在 y^* , 使 (x^*,y^*) 是 $L(x,y)$ 在 $Q\times R^n$ 上的鞍点.即

$$L(x^*,y)\leq L(x^*,y^*)\leq L(x,y^*),\ \forall x\in Q,\ \forall y\in R^n .$$

因此 $Dx^*=b$,

$$\left\langle -D^T y^* + f'(x), x - x^* \right\rangle \geq 0,\ \forall x \in Q. \tag{5}$$

根据引理 1.1,它等价于式(4)(类似于文献[14]定理 1 的证明). □

2 神经网络模型及其动态分析

定理 2.1. 令

$$V_1(x,y) = f(x) - f(x^*) - \langle f'(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2,\ V_2(x,y) = \frac{1}{2}\|y - y^*\|^2,\ V(x,y) = V_1(x,y) + V_2(x,y),$$

则
$$\dot{V}(x,y) \leq -c_1\|x - x^*\|^2 - \left\|x - P\left(x + D^T y - f'(x)\right)\right\|^2.$$

证明:见附录.

定理 2.2. 神经网络模型式(3)大范围渐近收敛于规划问题式(1)的解集.

证明: $\forall (x_0, y_0) \in R^m \times R^n$,根据引理 1.1,式(3)的右端是 Lipschiz 映射,根据常微分方程解的存在性和延拓性理论[5,8],可设 $(x(t), y(t))$ 是以 (x_0, y_0) 为初值的式(3)的唯一解,其最大存在区间为 $[0, \beta(x_0, y_0))$.

设 x^* 是规划问题,式(1)的一个解, y^* 满足式(4).令

$$G = \left\{(x,y) : V(x,y) \leq f(x_0) - f(x^*) + \langle f'(x^*), x_0 - x^* \rangle + \frac{1}{2}\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{2}\|y_0 - y^*\|^2 \right\}.$$

根据定理 2.1, $V(x,y)$ 是 G 上系统式(3)的 Liapunov 函数[9],且 $(x(t), y(t)) \in G$.

根据假设和 Taylor 定理,

$$V(x,y) \geq \langle x - x^*, f''(\xi)(x - x^*) \rangle + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{1}{2}\|y - y^*\|^2 \geq c_1\|x - x^*\|^2 + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{1}{2}\|y - y^*\|^2.$$

因此 G 为有界集.

根据常微分方程解的存在性理论[5,8], $\beta(x_0, y_0) = +\infty$.

根据 LaSalle 不变性原理[9]存在常数 r,使 $(x(t), y(t)) \to M \cap V^{-1}(r)$, $t \to +\infty$ 时.其中 M 是 $E = \left\{(x,y) : \dot{V}(x,y) = 0, x \in \overline{G}\right\}$ 的最大不变集.

往证 M 中的任一点都是规划问题式(1)的解. $\forall (x_1, y_1) \in M$,设 $(x_1(t), y_1(t))$ 是方程式(3)以 (x_1, y_1) 为初值的解,其最大存在区间为 $[0, \beta(x_1, y_1))$,由 M 的不变性和 G 的有界性知 $\beta(x_1, y_1) = +\infty$, $x_1(t) \equiv x_1$.

假设 (x_1, y_1) 不是规划问题式(1)的解,根据定理 1.1 和定理 2.1,必有 $Dx_1 \neq b$

即
$$DP\left(x_1 + D^T y_1 - f'(x_1)\right) \neq b.$$

由式(3)知 $\|y_1(t)\| \to +\infty$,此与 G 的有界性矛盾!

故 (x_1, y_1) 是规划问题式(1)的解.由 (x_1, y_1) 的任意性,得证.

注 2.1. 若规划问题式(1)没有等式约束 $Dx = b$,此时求解它的神经网络模型为 $\frac{dx}{dt} = P(x - f'(x)) - x$,对此我们曾得到如下结论[15]:

(1) 假设 $c_1 > 0$,且存在 $c_2 \geq 0$,使 $h^T f''(x) h \leq c_2\|h\|^2$, $\forall x, h \in R^m$,则规划问题有唯一解 x^*,且存在 $c^* > 0$,使 $\|x(t) - x^*\|^2 = o\left(e^{-c^* t}\right), t \to +\infty$.

(2) 设式(3)的解 $x(t)$ 位于 Q 中,则 $f(x)$ 沿 $x(t)$ 单调递减.此时若 P 为恒等算子,模型式(3)正是经典的 Newton 法,从数学上看, $\frac{dx}{dt} = P(x - f'(x)) - x$ 是最速下降流线方程[5]对约束问题的推广.因此式(3)是最速下降流线议方程[5]对复杂约束问题的推广. □

引理 2.1[12]. 对 $\forall x, y \in R^n$,有 $\langle P(x) - p(y), x - y \rangle \geq \|P(x) - P(y)\|^2$.

对有等式约束 $Dx = b$ 的规划问题式(1),可以得到如下结论:

定理 2.3. 规划问题式(1)的 Lagrange 函数为 $L(x,y) = f(x) - y^T(Dx - b)$,设式(3)的解 $x(t)$ 位于 Q 中,当固定

$y = y_0$ 时, $L(x, y_0)$ 随时间 t 是递减的.

证明:
$$\frac{\mathrm{d}L(x(t), y_0)}{\mathrm{d}t} = \left\langle f'(x(t)) - D^T y_0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right\rangle$$
$$= \left\langle f'(x(t)) - D^T y_0, P(x(t) + D^T y_0 - f'(x(t))) - x(t) \right\rangle$$
$$= \left\langle x(t) - (x(t) + D^T y_0 - f'(x(t))), P(x(t) + D^T y_0 - f'(x(t))) - P(x(t)) \right\rangle$$

根据引理 2.1,
$$\frac{\mathrm{d}L(x(t), y_0)}{\mathrm{d}t} \le -\left\| P(x(t) + D^T y_0 - f'(x(t))) - x(t) \right\|^2 \le 0,$$

即 $L(x, y_0)$ 随时间 t 是递减的. □

下面的定理揭示了网络式(3)的解轨道受特殊约束的动态行为.

定理 2.4. 若 $Q = \{x : -1 \le x_i \le 1, i = 1,2,...,m\}$, 则对 $\forall x_0 \in Q$, 式(3)满足 $x(0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 仍位于 Q 中.

证明: $\forall (x_0, y_0) \in Q \times R^n$,可设 $(x(t), y(t))$ 是式(3)以 (x_0, y_0) 为初值的唯一解,其最大存在区间为 $[0, \beta(x_0, y_0))$,设存在 t_1 ,使 $x(t_1) \notin Q$.显然存在 $i (1 \le i \le m)$,使 $x_i(t_1) > 1$ 或 $x_i(t_1) < -1$.

不妨设 $x_i(t_1) > 1$,因此必存在 t_2 和 t_3 ,使 $x_i(t_3) > x_i(t_2)$ 且 $x_i(t) > 1$, $\forall t \in (t_2, t_3)$. 但根据式(3),此时有 $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} < 0$, $\forall t \in (t_2, t_3)$.此与 $x_i(t_3) > x_i(t_2)$ 矛盾!即 $x(t) \in Q$, $[0, \beta(x_0, y_0))$ □

注 2.2. 若 $f(x)$ 在超闭立方体 Q 上满足假设 1,则模型式(3)在 Q 上渐近收敛于规划问题式(1)的解集.

注 2.3. 定理 2.4 表明当合理选择初值时,式(3)的解轨道不会跑出包含 Q 的超闭立方体外,这对神经网络的实现和具体控制器的设计具有重要意义.特别当 Q 为超闭立方体,将初值选取在 Q 时,在我们所遇到几乎全部的数值模拟中,用较长的步长和较短的模拟时间,所得到的模拟解就较好地满足了约束条件,即得到了较满意的可行解(见第 3 节例 1).可以说模型式(3)比模型式(2)有效提高了解的精度.

注 2.4.文献[16]虽然对文献[17]作了改进,但却假设了网络的运动轨迹满足不等式约束,对简单的不等式约束(Q 为超闭立方体),模型式(3)从理论上给予了保证.

神经网络式(3)的电路实现与文献[6,18]的模型完全类似.

3 计算机模拟

我们在 PC 机上用四阶龙格-库塔法模拟了由方程式(3)确定的解规划问题式(1)的神经网络方法.

例 1:已知 $v = (0,1,0,0,0,1,-1,-1,0,-1)$,
$$v^{(1)} = (-1,+1,+1,+1,+1,+1,-1,-1,-1,-1),\ v^{(2)} = (+1,+1,-1,-1,-1,+1,-1,-1,+1,-1)$$
$$v^{(3)} = (-1,+1,+1,+1,-1,-1,+1,-1,-1,-1),\ v^{(4)} = (-1,+1,-1,-1,-1,-1,+1,-1,+1,+1)$$
$$v^{(5)} = (+1,-1,-1,+1,+1,-1,+1,+1,+1,-1),\ v^{(6)} = (+1,+1,-1,+1,-1,+1,+1,+1,-1,-1)$$

求 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6$,满足 $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1$, $1 \ge \lambda_i \ge 0$, $i = 1,2,...,6$.并使 $\left\| v - \sum_{i=1}^{6} \lambda_i v^{(i)} \right\|^2$ 达到最小.

本例实际上是求投影算子问题,它是标准的二次规划问题,在将 LSSM(linear system in a saturated mode)和 BSB(brain state in a box)完善为联想记忆器中投影算子起重要作用[10,11].

显然,本题的理论解为(0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0).当取步长为 0.1,模拟时间为 10 时,模型 (2.3) 的输出结果

(0.486531, 0.486532, 0.00002, 0.000000, 0.000000,0.000002).

而此时模型式(2)的输出结果

(–0.078931, 0.285933, –0.108823, 0.358049, 0.413507, –0.060885).

既使取步长为 0.001,模拟时间为 10000 时,模型式(2)的输出结果仍为

(0.499346, 0.499125, -0.00005, 0.000230, 0.000219,0.000085),

仍然没有满足约束条件 $\lambda_3 \ge 0$.

本例在一定程度上说明模型式(3)比模型式(2)满足约束条件更好,性能更优越.

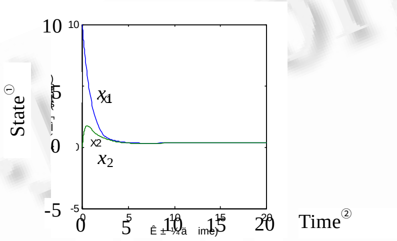
例 2:考虑下述非线性规划问题(取自文献[18]):

$$\begin{cases}\min f(x)=0.4x_2+x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-x_1x_2+\dfrac{1}{30}x_1^{\ 3}\\ x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_1+0.5x_2\ge 0.4,0.5x_1+x_2\ge 0.5\end{cases},$$

添加两个松弛变量将后两个不等式约束转化为等式约束,此例等价于:

$$\begin{cases}\min f(x)=0.4x_2+x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-x_1x_2+\dfrac{1}{30}x_1^{\ 3}\\ x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0.4,x_4\ge 0.5,x_1+0.5x_2-x_3=0,0.5x_1+x_2-x_4=0\end{cases}.$$

当 $x_1\ge 0,x_2\ge 0$ 时,对 $\forall h\in R^4$, $h^T f''(x)h\ge 0$.根据注 2.2,可用模型式(3)进行求解.用 MATLAB(matrix laboratory)的 ode45 对模型式(3)进行数值求解,模拟时间为 20 单位时间,文献[18]提供的理论解为 $(0.3395,0.3302)$.取初值为(10,0,0,0,0,0),得模拟结果为 $(0.339521,0.330239)$,如图 1 所示.



①状态,②时间.

Fig1. The dynamic trend of the neural network

图 1 神经网络的动态趋势

由上可见,模拟结果与理论解非常接近,它表明在一定程度上上述理论是正确的,方法也是可行的.

4 结 论

本文提出一种求解具有等式和不等式约束非线性规划问题的神经网络模型,理论分析和计算机模拟都表明它是大范围渐近收敛的.与其他求解优化问题的神经网络模型相比,本文的模型是 Newton 最速下降法的推广,且结构简单.网络的动态分析表明它还能得到了较满意的可行解,从而有效提高了解的精度.

References:

[1] Luenberger, T. D. Linear and Nonlinear Programming. 2nd ed., Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[2] Hopfield, J.J., Tank, D.W. Neural computation of decisions in optimizations problems. Biology. Cybernation, 1985,52(1):141~152.

[3] Hertz, J., Krogh, A., Palmer, R.G. Introduction to the Theory of Neural Computation. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[4] Xia, Y. Neural network for solving extended linear programming problems. IEEE Transactions on Neural Networks, 1997,8(3):803~806.

[5] Guo, Da-jun. Nonliear Function Analysis. Ji'nan: Shandong Science and Technology Publishing House, 1985 (in Chinese).

[6] Xia, Y. A new neural network for solving linear and quadratic programming problems. IEEE Transactions on Neural Networks, 1996,7(6):1544~1547.

[7] Xia, Y., Wang, J. A general methodology for designing globally convergent optimization neural networks. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998,9(6):1331~1343.

[8] Michel, A.N., Miller, R.K. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Academic Press, 1977.

[9] LaSalle, J. P. The Stability of Dynamical Systems. Philadelphia, PA: SIAM, 1976.

[10] Tao, Qing, Fang, Ting-jian, Sun De-min. The continuous time neural network based on the constraint domain for associative memory. Chinese Journal of Computers, 1999,22(12):1253~1258 (in Chinese).

[11] Tao, Qing, Fang, Ting-jian, Sun, De-min. The BSB neural network based on the constraint domain for associative memory. Chinese Journal of Computers, 2000,23(3):266~271 (in Chinese).

[12] Kinderlerer, D., Stampcchia, G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. New York: Academic Press, 1980.

[13] Zhang, Xue-ming, Li, Xun-jing, Chen, Zu-hao. The Ordinary Equation Theory for Optimal Control. Beijing: Higher Education Press, 1989 (in Chinese).

[14] Tao, Qing, Fang, Ting-jian. A kind of neural network for solving quadratic programming problems on a closed convex set. PR & AR, 1998,11(1):7~11 (in Chinese).

[15] Tao, Qing, Fang, Ting-jian. The neural network model for nonlinear programming problems. Journal of Electronics, 2000,22(3):429~433 (in Chinese).

[16] Huang, Yuan-can, Sun, Sheng-he, Han, Jin-qing. The neural network for nonlinear programming problems based on the Lagrange multiplier. Acta Electronica Sinica, 1998,26(1):24~28 (in Chinese).

[17] Zhang, S., Constantinides, A.G. Lagrange programming neural networks. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1992,39(4): 441~452.

[18] Kennedy, M.P., Chua, L.O. Neural networks for nonlinear programming. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988,35(5): 554~562.

附中文参考文献:

[5] 郭大均.非线性泛函分析.济南:山东科技出版社,1985.

[10] 陶卿,方廷健,孙德敏.基于约束区域的连续时间联想记忆神经网络.计算机学报,1999,22(12):1253~1258.

[11] 陶卿,方廷健,孙德敏.基于约束区域的 BSB 联想记忆神经网络.计算机学报,2000,23(3),266~271.

[13] 张学铭,李训经,陈祖浩.最优控制系统的常微分方程理论.北京:高等教育出版社,1989.

[14] 陶卿,方廷健.一种求解闭凸集上二次规划问题的神经网络模型.模式识别与人工智能,1998,11(1):7~11.

[15] 陶卿,方廷健.非线性规划神经网络模型.电子科学学刊,2000,22(3):429~433.

[16] 黄远灿,孙圣和,韩京清.基于 Lagrange 乘子法的非线性规划神经网络.电子学报,1998,6(1):24~28.

附录.

定理 2.1 的证明.

证明: $\dot{V}_1(x,y)=\left\langle f'(x)-f'(x^*),\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\rangle+\left\langle x-x^*,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\rangle$

$$=\left\langle f'(x)-f'(x^*),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x\right\rangle+\left\langle x-x^*,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x\right\rangle$$

$$\left\langle f'(x)-f'(x^*),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x\right\rangle$$

$$=\left\langle f'(x)-f'(x^*),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*+x^*-x\right\rangle$$

$$=\left\langle f'(x)-f'(x^*),x^*-x\right\rangle+\left\langle f'(x),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle-\left\langle f'(x^*),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

而 $\left\langle f'(x),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$

$$=\left\langle f'(x)-D^Ty-x+P\left(x+D^Ty-f'(x)\right),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

$$+\left\langle x-P\left(x+D^Ty-f'(x)\right),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle+\left\langle D^Ty,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

$$=\left\langle P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-\left(x+D^Ty-f'(x)\right),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

$$+\left\langle x-P\left(x+D^Ty-f'(x)\right),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x\right\rangle+\left\langle x-P\left(x+D^Ty-f'(x)\right),x-x^*\right\rangle$$

$$+\left\langle D^Ty,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle\ \left\langle f'(x^*),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

$$=\left\langle f'(x^*)-D^Ty^*,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle+\left\langle D^Ty^*,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

因此 $\dot{V}_1(x,y)=\left\langle f'(x)-f'(x^*),x^*-x\right\rangle+\left\langle f'(x)-D^Ty-x+P\left(x+D^Ty-f'(x)\right),P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$

$-\left\|x-P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)\right\|^2-\left\langle f'(x^*)-D^Ty^*,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle+\left\langle D^Ty-D^Ty^*,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$

根据引理 2.1、假设 1 和式(5),

$$\dot{V}_1(x,y)\le -c_1\left\|x-x^*\right\|^2-\left\|x-P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)\right\|^2+\left\langle D^Ty-D^Ty^*,P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)-x^*\right\rangle$$

又 $$\dot{V}_2(x,y)=\left\langle y-y^*,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\rangle=\left\langle y-y^*,-DP\left(x+D^Ty-f'(x)\right)+Dx^*\right\rangle$$

因此 $$\dot{V}(x,y)\le -c_1\left\|x-x^*\right\|^2-\left\|x-P\left(x+D^Ty-f'(x)\right)\right\|^2$$ □

Neural Network for Nonlinear Programming Problems with Hybrid Constraints*

TAO Qing[1,2], REN Fu-xing[2], SUN De-min[3]

[1](*Institute of Automation, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*);

[2](1*st Department, Artillery Academy of PLA of China, Hefei* 230031, *China*);

[3](*Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027, *China*)

E-mail: q_tao@sohu.com

http://www.ia.ac.cn

Abstract: In this paper, a kind of globally convergent continuous neural network for optimization problems is presented by designing Liapunov function skillfully, it has better function and higher performance. It is capable of solving nonlinear programming problems with the constraints of equality and inequality. The proposed neural network is an extension of Newton deepest decedent method for constraint problems, it can improve the accuracy of the solutions, and its structure is simpler than the existing networks even when it is for solving positive definite quadratic programming problems.

Key words: nonlinear programming problems; neural network; energy function; global asymptotic stability

* Received April 13, 2000; accepted July 31, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60175023; the Natural Science Foundation of Anhui Province of China