

# 基础矩阵估计的加权归一化线性算法\*

陈泽志, 吴成柯, 刘勇

(西安电子科技大学 综合业务网理论与关键技术国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

E-mail: Chkwu@xidian.edu.cn

http://www.xidian.edu.cn

**摘要:** 基础矩阵是对来自同一景物的两幅未定标图像进行分析的基本工具. 对其进行估计的常用线性算法有八点算法和改进的八点算法, 其最大的优点是运算简单、易于实现, 但对噪声和错误数据较敏感, 因此实用性差. 通过引入与余差有关的代价函数, 给出了一种新的鲁棒性线性算法——加权归一化算法. 首先将原始输入数据加权归一化处理, 然后再用八点算法求  $F$  阵的 8 个参数, 实现了  $F$  阵的估计. 大量的模拟数据和真实图像的实验结果表明, 此算法不仅具有良好的鲁棒性, 而且可提高基础矩阵的估计精度.

**关键词:** 对极几何; 基础矩阵; 加权归一化; 余差; 鲁棒性

**中图法分类号:** TP391      **文献标识码:** A

目前, 在计算机视觉及图像处理中, 匹配来自同一场景的两幅图像仍然是相当困难的. 从两个不同视点获得的来自同一场景的两幅图像之间都存在着一定的约束关系, 那就是通常所说的对极几何关系 (epipolar geometric constraints). 对于非定标 (uncalibration) 图像, 这一关系是可以从匹配点对中获得的惟一信息. 对极几何关系可以用一个 3 阶的秩 2 矩阵——基础矩阵 ( $F$  阵) 来表示. 它是匹配点对之间对应关系的数学表示, 包括了摄像机的所有内参和外参信息. 因而, 对极几何问题就转化为对基础矩阵  $F$  的估计问题. 对  $F$  阵的估计是三维重建、运动估计、相机定标 (camera calibration)、匹配和跟踪的基础<sup>[1~4]</sup>. 估计  $F$  阵常用的非线性算法有  $M$ -估计法、最小中值法 (LMedS)、六点综合算法和双对极约束算法<sup>[5~8]</sup>, 这些方法的共同点就是把问题最终归结为无约束最优化问题, 而当有噪声或错误数据 (outliers) 存在时, 很难求出全局最优解. 常用的线性算法有八点算法<sup>[9]</sup>和改进的八点算法<sup>[10]</sup>. Longuet-Higgins 给出的八点算法的优点在于, 它是一种快速且易于实现的线性算法, 但对噪声异常敏感, 使其对不同数据变化很大. Hartley 在提高八点算法的稳定性方面做了较大改进, 给出了改进的八点算法, 它通过在计算前对二维数据规范化 (normalize) 进行处理 (平移和尺度变换), 以减少噪声的干扰. 实验结果表明, 改进的八点算法比最好的迭代算法要好最起码也是不相上下. 但是, 在进行规范化处理时, Hartley 认为每个匹配点对于  $F$  阵的影响都是相同的, 而实际上, 每个点的误差不同, 它们对  $F$  阵的影响也是各不相同的. 本文在八点算法的基础上, 引入与余差和对极距离有关的函数作为权因子, 提出了加权归一化线性算法, 在计算前对二维数据点作加权平移和尺度变换以排除噪声干扰, 尤其是错误数据 (错误的位置或错误的匹配) 的干扰. 大量实验结果表明, 此方法不但改善了  $F$  阵的鲁棒性, 而且进一步提高了  $F$  阵的估计精度.

\* 收稿日期: 1999-10-10; 修改日期: 1999-12-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (69972039); 中法先进研究计划资助项目 (PRASI 00-04)

作者简介: 陈泽志 (1963-), 男, 陕西石泉人, 博士生, 副教授, 主要研究领域为计算机视觉, 图像处理, 计算机图形学; 吴成柯 (1938-), 男, 安徽黄山人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为图像信息处理; 刘勇 (1969-), 男, 湖北孝感人, 博士生, 主要研究领域为信号与信息处理.

## 1 八点算法概述

对于从线性摄像机(针孔模型)获得同一景物的两幅非定标图像,它们之间的基本关系就是对极几何约束.我们知道,第1幅图像 $I_1$ 上的每一点 $m$ ,在第2幅图像上的对应点在其对极线 $l'_m$ 上.设 $m(x, y, 1)^T$ 为 $I_1$ 上的点,则由对极几何可知:它在 $I_2$ 上的对极线方程由 $l'_m = Fm$ 给出,由于其对应点 $m'(x', y', 1)^T$ 在 $l'_m$ 上,因此有

$$m'^T F m = 0, \quad (1)$$

$3 \times 3$  矩阵 $F$ 称基础矩阵,其秩为2.

式(1)可以写成如下的九元齐次线性方程:

$$u^T f = 0, \quad (2)$$

其中

$$u = [xx', yy', x', xy', yx', y', x, y, 1]^T,$$

$$f = [F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}]^T.$$

只要知道8个匹配点对,就可以在相差一个常数因子的意义下求出 $F$ 阵.如果匹配点对的数目多于8个,可以用最小二乘法求解如下无约束最优化问题,求出 $F$ 阵.

$$\min_F \sum_i (m_i'^T F m_i)^2. \quad (3)$$

式(3)可以写成 $\min \|uf\|^2, u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ .

根据基础矩阵的定义,所有的解向量 $f$ 之间只差一个未知系数.为了避免多余解的出现,可以加一个约束条件 $\|f\| = 1$ ,即

$$\begin{cases} \min_f \|uf\|^2 \\ \text{subject to } \|f\| = 1 \end{cases}, \quad (4)$$

其最优解是 $u^T u$ 对应的最小特征值的特征向量,求解的最好方法就是奇异值分解(singular value decomposition,简称SVD),即通常所说的SVD方法.

## 2 二维图像的坐标变换对 $F$ 阵的影响

图像的坐标原点有的在投影面的左上角,有的在中心,那么,坐标原点的位置不同是否会影响 $F$ 阵的估计精度?变换前后的 $F$ 阵之间有什么关系呢?这正是我们下面要讨论的问题.假设第1幅图像的坐标点被 $\bar{u} = Tu$ 代替,另一幅图像的坐标点被 $\bar{u}' = T'u'$ 代替,将其代入 $u'^T F u = 0$ 得到 $\bar{u}'^T T'^{-T} F T^{-1} \bar{u} = 0$ ,其中 $T'^{-T} = T'$ 是 $T'$ 的逆的转置矩阵.因此,点对 $\bar{u}' \leftrightarrow \bar{u}$ 之间的基础矩阵为 $T'^{-T} F T^{-1}$ .先分别对原始图像坐标进行变换,再以变换结果作为输入数据计算 $F$ 阵,其过程总结如下:

- (1) 各自做图像坐标变换 $\bar{u} = Tu$ 和 $\bar{u}' = T'u'$ ;
- (2) 求出 $\bar{u}$ 与 $\bar{u}'$ 之间的基础矩阵 $\bar{F}$ ;
- (3)  $F = T'^T \bar{F} T$ .

## 3 引入权因子

如果 $m_i, m'_i$ 是对应点,则 $m_i'^T F m_i = 0$ ,由于噪声和错误数据的存在,一般情况下, $m_i'^T F m_i \neq 0$ ,因此,定义余差

$$r_i = |m_i'^T F m_i| \quad (5)$$

和对极距离

$$d_i = \left[ \frac{1}{\sqrt{(Fm_i)_1^2 + (Fm_i)_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(F^T m'_i)_1^2 + (F^T m'_i)_2^2}} \right] |m_i^{T'} F m_i|, \quad (6)$$

其中  $(Fm_i)_j, j=1,2$  是向量  $Fm_i$  的第  $j$  个分量.

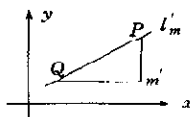


Fig.1  $Qm'_m$  and  $Pm'_m$  are the residual errors in  $x$  and  $y$  axes direction, respectively

图1  $Qm'_m$  和  $Pm'_m$  分别是  $m$  在  $x$  和  $y$  方向上的余差

设  $m'$  和  $l'_m$  分别是  $m$  的对应点和对极线(如图1所示),则由对极线方程可知:

$$|Pm'_m| = \frac{|m'^T F m|}{(Fm)_2}, \quad |Qm'_m| = \frac{|m'^T F m|}{(Fm)_1}, \quad (7)$$

其中  $(Fm)_j$  是向量  $Fm$  的第  $j$  个分量.  $|Qm'_m|$  和  $|Pm'_m|$  分别是  $m'$  在  $x$  和  $y$  方向上的余差.

记  $r_x = \frac{1}{|Qm'_m|}, r_y = \frac{1}{|Pm'_m|}$ , 随着匹配点精度的提高,  $r_i$  将趋于 0, 因此,  $r_x$  将趋于无穷大. 为了确保算法的稳定性, 取  $10^5$  为阈值,  $r_x$  按下式取值

$$r_x = \begin{cases} r_x & r_x < 10^5 \\ 10^5 & \text{else} \end{cases}$$

定义权因子如下(其中  $N$  是匹配点数):

$$w_{x_i} = \frac{r_{x_i}}{\sum_{i=1}^N r_{x_i}}, \quad w_{y_i} = \frac{r_{y_i}}{\sum_{i=1}^N r_{y_i}}, \quad w'_{x_i} = \frac{r'_{x_i}}{\sum_{i=1}^N r'_{x_i}}, \quad w'_{y_i} = \frac{r'_{y_i}}{\sum_{i=1}^N r'_{y_i}}. \quad (8)$$

#### 4 输入数据的加权归一化处理

首先,将式(8)所给出的各匹配点的权值  $w_{x_i}, w_{y_i}, w'_{x_i}, w'_{y_i}$  作为对应点的概率分布,求其对应点坐标的数学期望,若记

$$P_{m_i} = \begin{bmatrix} w_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & w_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P'_{m_i} = \begin{bmatrix} w'_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & w'_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$E_m = \sum_{i=1}^N P_{m_i} m_i, \quad E_{m'} = \sum_{i=1}^N P'_{m_i} m'_i. \quad (9)$$

将图像坐标原点分别移到  $o_1(E_{m_1}, E_{m_2})$  和  $o'_1(E_{m'_1}, E_{m'_2})$ , 其中  $E_{m_i}$  和  $E_{m'_i} (i=1,2)$  分别是向量  $E_m$  和  $E_{m'}$  的第  $i$  个分量.

然后,再按下述方法将图像坐标做归一化处理.

设

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -E_{m_1} \\ 0 & 1 & -E_{m_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{m_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_{m_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -E_{m'_1} \\ 0 & 1 & -E_{m'_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{m'_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_{m'_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

则

$$T_1 = T_{12}T_{11}, \quad T_2 = T_{22}T_{21}, \quad (12)$$

$$\bar{m}_i = T_1 m_i, \quad \bar{m}'_i = T_2 m'_i, \quad (13)$$

$\bar{m}_i$  和  $\bar{m}'_i$  是变换后的新坐标.

## 5 算法步骤

### 算法.

第①步. 用八点算法估计基础矩阵;

第②步. 计算权值  $w_{x_i}, w_{y_i}, w'_{x_i}, w'_{y_i}$ ;

第③步. 计算变换矩阵  $T_1, T_2$ , 将两幅图像的坐标原点分别移到  $o_1(E_{m_1}, E_{m_2})$  和  $o'_1(E_{m'_1}, E_{m'_2})$ , 并做归一化处理;

第④步. 以匹配点的新坐标为输入数据, 再利用八点算法求出基础矩阵  $\bar{F}$ ;

第⑤步. 让  $F = T_1^T \bar{F} T_1$ .

## 6 实验结果

### 6.1 模拟数据的实验结果

表 1 列出了八点算法、改进的八点算法和加权归一化算法对于带有标准方差  $\sigma=0.0, 2.5, 5.0$  的高斯噪声的模拟数据的实验结果, 其中  $e_l$  和  $e_r$  分别是真实的左、右对极点,  $e$  和  $e'$  分别是估计出的左、右对极点,  $\|\cdot\|_2$  是 2-范数(欧氏范数), 它反映了所求对极点与真实对极点的欧氏距离. 表 2 列出了上述 3 种算法对于在包含错误数据的概率  $\rho=0.1, 0.5, 0.7$  时模拟数据的实验结果. 图 2 给出了上述 3 种线性算法对于带有标准方差  $\sigma=0.0, 2.5, 5.0$  的高斯噪声的模拟数据的余差随匹配点数的变化情况. 这些数据表明, 加权归一化算法具有良好的鲁棒性, 对极点的稳定性和  $F$  阵的精度有较大的提高.

Table 1 Comparison of the results for the three algorithms under various Gaussian noises

表 1 3 种线性算法对于不同噪声的鲁棒性比较

Algorithms <sup>①</sup>	Average residual errors <sup>②</sup>	Average epipolar distance <sup>③</sup>	$\ e - e_l\ _2$	$\ e' - e_r\ _2$	
8 point algorithm <sup>④</sup>	$\sigma=0.0$	0.000 000	1.054878e-009	6.12983e-005	7.65191e-005
	$\sigma=2.5$	0.000 177	3.547447e-009	11.387 1	10.259 8
	$\sigma=5.0$	0.001 327	6.536510e-004	1.065 3	36.780 6
Improved 8-point algorithm <sup>⑤</sup>	$\sigma=0.0$	0.000 000	5.460722e-011	5.82836e-006	4.19027e-006
	$\sigma=2.5$	0.000 079	1.565064e-004	9.269 01	8.740 57
	$\sigma=5.0$	0.000 348	6.933168e-004	5.560 37	5.415 9
Weighted normalization algorithm <sup>⑥</sup>	$\sigma=0.0$	0.000 000	3.955685e-011	1.35994e-006	1.48218e-006
	$\sigma=2.5$	0.000 068	1.354535e-004	1.291 94	0.264 442
	$\sigma=5.0$	0.000 128	2.556333e-004	1.373 6	2.293 59

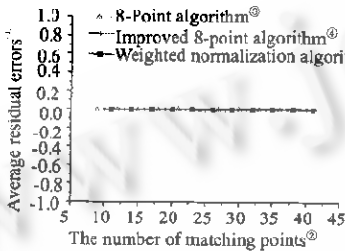
①算法, ②平均余差, ③平均对极距离, ④八点算法, ⑤改进的八点算法, ⑥加权归一化算法.

Table 2 Comparison of the results for the three algorithms under various outliers probability

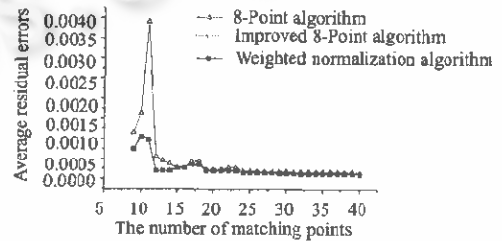
表 2 3 种线性算法对于不同错误数据概率的鲁棒性比较

Algorithms <sup>①</sup>	Average residual errors <sup>②</sup>	Average epipolar distance <sup>③</sup>	$\ e' - e\ _2$	$\ e' - e_r\ _2$	
8 point algorithm <sup>④</sup>	$\sigma=0.10$	0.000 140	2.789127e-004	29.948 1	2.869 89
	$\sigma=0.5$	0.000 512	1.021228e-003	20.286 6	2.564 59
	$\sigma=0.7$	0.003 473	6.945343e-003	30.862 6	160.37
Improved 8-point algorithm <sup>⑤</sup>	$\sigma=0.1$	0.000 021	4.182574e-005	225.745	90.736 9
	$\sigma=0.5$	0.000 195	3.904918e-004	59.696 1	3.158 98
	$\sigma=0.7$	0.002 794	5.145300e-003	328.219	25.828 4
Weighted normalization algorithm <sup>⑥</sup>	$\sigma=0.1$	0.000 020	4.011426e-005	79.165 2	10.417 2
	$\sigma=0.5$	0.000 182	3.640624e-004	28.284 3	3.52669e-006
	$\sigma=0.7$	0.002 573	5.588460e-003	24.518 8	3.309 88

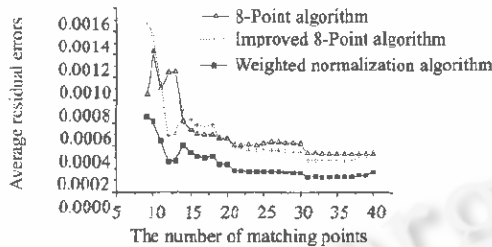
①算法, ②平均余差, ③平均对极距离, ④八点算法, ⑤改进的八点算法, ⑥加权归一化算法.



(a)



(b)



(c)

①平均余差, ②匹配点数, ③八点算法, ④改进的八点算法, ⑤加权归一化算法.

Fig. 2 (a), (b) and (c) show the variation of the residual errors under standard deviation  $\sigma=0.0, 2.5, 5.0$ , respectively

图 2 (a), (b)和(c)分别是当模拟数据的高斯噪声标准方差  $\sigma=0.0, 2.5, 5.0$  时余差的变化图

6.2 真实图像的实验结果

Table 3 Comparison of the experimental results for the different three algorithms using real images

表 3 3 种不同线性算法对于真实图像实验结果的比较

Algorithms <sup>①</sup>	House <sup>②</sup>		Pyramid <sup>③</sup>	
	Average residual errors <sup>④</sup>	Average epipolar distance <sup>⑤</sup>	Residual errors	Epipolar distance
8-point algorithm <sup>⑥</sup>	0.031626	0.063252	0.058236	0.116402
Improved 8-point algorithm <sup>⑦</sup>	0.003279	0.025316	0.012826	0.025649
Weighted normalization algorithm <sup>⑧</sup>	0.001218	0.002435	0.011749	0.023491

①算法, ②房子, ③古城堡, ④平均余差, ⑤平均对极距离, ⑥八点算法, ⑦改进的八点算法, ⑧加权归一化算法.

表 3 给出了真实图像的实验结果, 从余差和对极距离两方面反映了  $F$  阵的估计精度. 图 3 和图 4 分别给出了加权归一化算法对于真实图像的余差的变化情况. 图 5 给出了实验所用的图像以

及用本文所提出的算法得到的部分对极线. 由于获得这两幅图像(小房子和古城堡)的摄像机位置基本上是平行的,故对极线应该是一组平行线. 由实验可见,加权归一化方法获得的对极线基本上是平行的,这也说明了此方法的可靠性.

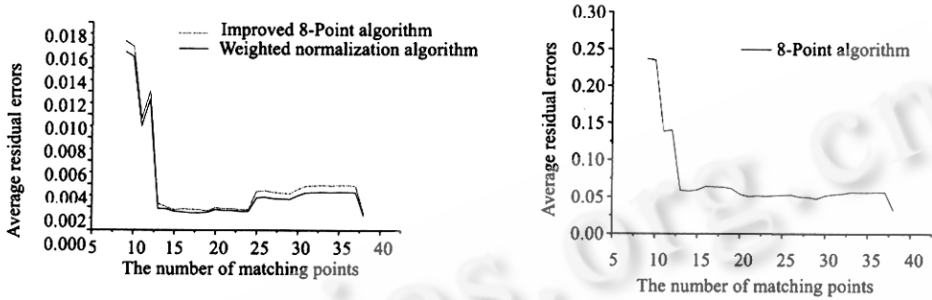


Fig. 3 The variation of the residual errors (house)  
图 3 3种算法的余差变化(房子)

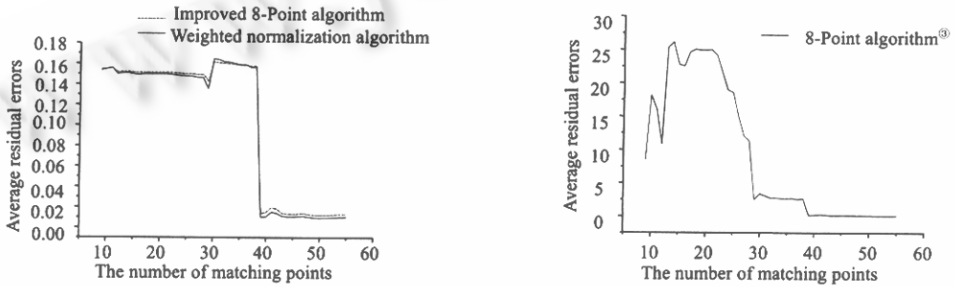
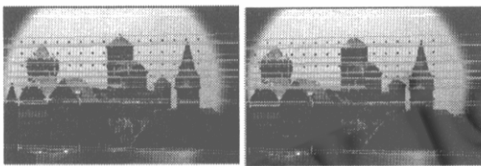
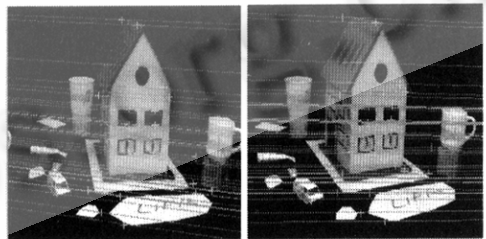


Fig. 4 The variation of the residual errors (pyramid)  
图 4 3种算法的余差变化(古城堡)



(a) Pyramid  
(a) 古城堡



(b) House  
(b) 小房子

Fig. 5 A few of the epipolar lines calculated by using weighted normalization algorithm  
图 5 加权归一化算法的部分对极线

## 7 结 论

本文通过引入与余差有关的权因子,提出了加权归一化线性算法.大量的实验结果表明,此方法在  $F$  阵的鲁棒性和精度两方面都大大优于八点算法,也明显优于改进的八点算法.从真实图像(小房子)的实验结果来看,加权归一化算法的精度是传统的八点算法的 26 倍,是抗噪声能力较强的改进的八点算法的 2.7 倍.本算法的另一个优点在于,它是一个易于实现的线性算法,因而速度快,且避免了众多非线性算法的多解性.

**致谢** 法国 INRIA 提供了真实场景数据,另外,与在该机构工作的权龙(Long QUAN)博士进行的讨论给予我们很大帮助,在此一并表示感谢。

### References:

- [1] Faugeras, O. *Three-Dimensional Computer Vision, a Geometric Viewpoint*. London: MIT Press, 1993.
- [2] Deriche, R., Zhang, Z., Luong, Q. T., *et al.* Robust Recovery of the Epipolar Geometry for an Uncalibrated Stereo Rig. In: Eklundh, J. O., ed. *Proceedings of the 3rd European Conference on Computer Vision (ECCV'94)*, Vol 2. Berlin, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1994. 567~576.
- [3] Faugeras, O. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig? In: Italy, Sandini, G., ed. *Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision (ECCV'92)*, Vol 588. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 563~578.
- [4] Long, Quan, Takeo, Kanade. Affine structure from line correspondences with uncalibrated affine cameras. *IEEE Transactions on PAMI*, 1997,19(8):834~845.
- [5] Zhang, Z., Deriche, R., Faugeras, O., *et al.* A robust technique for matching two uncalibrated images. *IEEE Transactions on PAMI*, 1995,82(2):1129~1139.
- [6] Wang, Wei, Wu, Cheng-ke. Six-Point synthetic method to estimate fundamental matrix. *Science in China (Series E)*, 1997,27(2):165~170.
- [7] Chen, Ze-zhi, Shen, Pei-yi, Liu, Yong, *et al.* Two-Epipole constraint of estimating fundamental matrix and it's analyzing. In: Latecki, L. J., Melder, R. A., Mount, D. M., *et al.* eds. *Proceedings of the SPIE*, Vol 3811. Washington, DC: SPIE, 1999. 337~344.
- [8] Ma, Song-de, Zhang, Zheng-you. *Computer Vision: Computing Theory and Algorithm Principle*. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese).
- [9] Longuet-Higgins, H.C. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 1981,293:133~135.
- [10] Hartley, R. I. In defence of the 8-point algorithm. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision (ICCV'95)*. Cambridge, MA: IEEE Computer Society Press, 1995. 1064~1070.

### 附中文参考文献:

- [8] 马颂德,张正友. *计算机视觉——计算理论与算法基础*. 北京:科学出版社,1998.

## A Weighted Normalization Algorithm for Estimation of Fundamental Matrix\*

CHEN Ze-zhi, WU Cheng-ke, LIU Yong

(State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

E-mail: Chkwwu@xidian.edu.cn

http://www.xidian.edu.cn

**Abstract:** The fundamental matrix is a basic tool in the analysis of scenes taken with two uncalibrated cameras. The 8-point algorithm and the improved 8-point algorithm are widely used linear methods for estimating the fundamental matrix. They have advantages of simplicity in implementation. But they are extremely sensitive to noise and outliers. Hence in most cases, they are useless virtually. A new robust linear method——weighted normalization algorithm is developed by introducing a cost function related to residual errors. Firstly, the matching points with a weight factor are normalized. Secondly, the eight parameters of fundamental matrix are calculated by using the 8-point algorithm. Experiments on simulated and real image data are conducted. The results show that this algorithm is very robust to noises and outliers, and the fundamental matrix with high accuracy can be found.

**Key words:** epipolar geometry; fundamental matrix; weighted normalization; residual error; robustness

\* Received October 10, 1999; accepted December 16, 1999

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 69972039; the France-China Advanced Research Program under Grant No. PRASI 00-04