B-样条曲线的节点去除与光顺*

满家巨[1,2]， 胡事民[1,3]， 雍俊海[1,3]， 孙家广[1,3]

[1](清华大学 国家CAD工程中心，北京 100084)；

[2](浙江大学 应用数学系，浙江 杭州 310027)；

[3](清华大学 计算机科学与技术系，北京 100084)

E-mail：shimin@tsinghua.edu.cn

http://ncc.cs.tsinghua.edu.cn

摘要：研究了B-样条曲线节点的去除问题，简化了B-样条曲线内部节点精确去除的充要条件．基于约束优化方法，通过扰动B-样条曲线的控制顶点，给出了节点去除的一个新算法，并用于光顺B-样条曲线．

关键词：B-样条曲线；节点插入；节点去除；光顺；约束优化

中图法分类号：TP391 **文献标识码**：A

B-样条曲线曲面已在计算机辅助设计与图形学中得到了广泛的应用．B-样条曲线曲面保留了Bézier曲线曲面的优点，采用控制顶点定义曲线曲面，同时引进B-样条基函数表示多项式曲线，使其具有局部性质，能描述复杂形状，并且解决了采用Bézier样条所带来的拼接问题．

B-样条曲线有着一整套完整的算法，其中一个重要的算法便是节点插入算法．通过节点插入，可改善曲线的局部性质，得到B-样条曲线的分段Bézier表示，但它同时也引入了冗余数据．与之相反的问题是节点的去除问题，通过节点去除可以减少冗余的数据，节点去除算法也可以用于曲线的光顺问题．不过，去除节点通常会改变原样条曲线的形状，因此，节点去除问题通常是一个逼近问题．

Lyche和Morken[1,2]基于整体逼近给出了一个B-样条曲线一次去除多个节点的算法；Tiller[3]也给出了在计算机容许的误差内一次去除多个节点的算法；Kjellander[4]，Farin[5]，Sapidis和Farin[6]等人分别基于三次B-样条曲线的局部构造，讨论节点去除算法，并用于三次样条曲线的局部光顺；Eck[7]则基于曲线的局部结构研究节点去除算法，并给出了在离散的L_2逼近、离散的L_∞逼近、连续的L_∞逼近下的结果．

本文从几何上考虑B-样条曲线的节点去除问题，通过扰动曲线的控制顶点，实现B-样条曲线的节点去除算法和B-样条曲线的光顺算法．

1 节点插入与节点删除的关系

B-样条曲线的节点插入算法增加了控制顶点个数，但不改变曲线的形状，给定正整数$k,n,n\geqslant$

* 收稿日期：1999-07-14；修改日期：1999-10-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目(69902004)；浙江省自然科学基金资助项目(198022)

作者简介：**满家巨**(1967－)，男，湖南人，博士生，主要研究领域为计算机辅助几何设计；**胡事民**(1968－)，男，浙江人，博士，副教授，主要研究领域为计算机辅助几何设计，计算机图形学，面向内容图形图像检索；**雍俊海**(1973－)，男，福建人，博士生，主要研究领域为计算机辅助几何设计，计算机图形学；**孙家广**(1946－)，男，江苏人，教授，博士生导师，中国工程院院士，主要研究领域为计算机图形学，CAD/CAM，产品数据管理．

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

k 以及一个非减的节点序列：

$$T=\{t_0,t_1,\ldots,t_{r-1},t_r,t_{r+1},\ldots,t_{n+k}\},\tag{1}$$

其中每个节点的重数不超过 k，则以 $\{d_i\}_{i=0}^{n}$ 为控制顶点，定义在节点序列 T 上的 k 阶 B-样条曲线可表示成

$$x(t)=\sum_{i=0}^{n}d_iN_{i,k,T}(t),\quad t\in[t_{k-1},t_{n+1}],\tag{2}$$

其中 $N_{i,k,T}(t)$ 表示定义在节点向量 T 上的 B 样条基函数.

考虑以 $\{\overline{d}_i\}_{i=0}^{n-1}$ 为控制顶点，定义在节点序列 $\overline{T}=T\backslash\{t_r\}$ 上的 k 阶 B-样条曲线：

$$\overline{x}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\overline{d}_iN_{i,k,\overline{T}}(t),\quad t\in[t_{k-1},t_{n-1}],$$

如果 $x(t)$ 是由 $\overline{x}(t)$ 插入内部节点 t_r 之后得到的曲线，即 $x(t)=\overline{x}(t)$，则一定存在下述关系：

$$d_i=\begin{cases}\overline{d}_i, & 0\leqslant i\leqslant r-k+v-1;\\ (1-l_{k-r+i})\overline{d}_{i-1}+l_{k-r+i}\overline{d}_i, & r-k+v\leqslant i\leqslant r-1;\\ \overline{d}_{i-1}, & r\leqslant i\leqslant n,\end{cases}\tag{3}$$

其中 v 是节点 t_r 在节点序列 T 中的重数，$l_j=\dfrac{t_r-t_{r-k+j}}{t_{r+j}-t_{r-k+j}}$，$v-1\leqslant j\leqslant k$.

因此，向节点序列 $\overline{T}=T\backslash\{t_r\}$ 中插入节点 t_r，则新的控制顶点 d_i 可根据给定的 $\overline{d}_i$ 从方程组(3)中给出. 反过来，如果希望从 T 中去除内部节点 t_r，则根据给定控制顶点 d_i，要解出未知的 $\overline{d}_i$，这时，我们必须要解一个超限方程组：

$$\begin{cases}\overline{d}_i=d_i, & 0\leqslant i\leqslant r-k+v-1;\\ (1-l_{k-r+i})\overline{d}_{i-1}+l_{k-r+i}\overline{d}_i=d_i, & r-k+v\leqslant i\leqslant r-1;\\ \overline{d}_i=d_{i+1}, & r-1\leqslant i\leqslant n-1.\end{cases}\tag{4}$$

通常，该方程组是不相容的，只有逼近解；当且仅当它是一个相容方程组时，才有一个精确解. 所以，作为节点插入的反问题，节点去除是一个逼近问题.

2 不相容性的克服

如果从方程组(4)中去掉一个方程，则剩下的方程组可解. 我们可以得到如下两组解：

$$\overline{d}_i^{I}=\begin{cases}d_i, & 0\leqslant i\leqslant r-k+v-1;\\ \dfrac{1}{l_{k-r+i}}d_i+\left(1-\dfrac{1}{l_{k-r+i}}\right)d_{i-1}^{I}, & r-k+v\leqslant i\leqslant r-1;\\ d_{i+1}, & r\leqslant i\leqslant n-1,\end{cases}\tag{5}$$

$$\overline{d}_i^{II}=\begin{cases}d_i, & 0\leqslant i\leqslant r-k+v-2;\\ \left(1-\dfrac{1}{l_{k-r+i}}\right)d_{i+1}+\dfrac{1}{l_{k-r+i+1}}d_{i+1}^{II}, & r-k+v-1\leqslant i\leqslant r-r;\\ d_{i+1}, & r-1\leqslant i\leqslant n-1.\end{cases}\tag{6}$$

为了克服式(4)的不相容性，引入了权系数，作式(5)和式(6)的线性组合运算，得到

$$d_i=\begin{cases}d_i, & 0\leqslant i\leqslant r-k+v-2;\\ (1-\alpha_{k-r+i})d_i^{I}+\alpha_{k-r+i}d_i^{II}, & r-k+v-1\leqslant i\leqslant r-1;\\ d_{i+1}, & r\leqslant i\leqslant n-1.\end{cases}\tag{7}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

于是,问题转化为如何适当地选择权系数,使得由$\{\bar{d}_i\}_{i=0}^{n-1}$定义在节点序列$\bar{T}=T\setminus\{t_r\}$上的B样条曲线在某种意义上最佳逼近原曲线的问题.

文献[5]给出了当$k=4$时几种可能的选择.文献[7]则从更一般的角度,给出在离散L_2逼近、离散L_∞逼近、连续L_∞逼近的意义下选择权系数的方法.

根据以上讨论,传统的节点去除算法的步骤如下:

(1) 按式(5)和式(6)计算$\{\bar{d}_i^{I}\}$和$\{\bar{d}_i^{II}\}$;

(2) 按某种选择方案计算权系数;

(3) 按式(7)计算新控制顶点$\{\bar{d}_i\}$.

3 扰动控制顶点的约束优化方法

不妨假设对原曲线的若干控制顶点进行小扰动,使得节点t_r可以从新曲线的节点序列中精确去除,则扰动曲线可作为我们所需的逼近解.上述想法也相当于扰动方程组(4)的常数项,使得该方程组成为一个相容方程组.

为叙述方便起见,我们先引入如下记号:

设$\{l_i\}$是一组实数,$j\leqslant k$是两个非负整数,定义

$$\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}=\begin{cases}\prod\limits_{i=j}^{k-1}\dfrac{1-l_{i+1}}{l_i}, & j\leqslant k\\ 1, & j=k\end{cases}. \tag{8}$$

注意到$l_{v-1}=1,l_k=0$,由方程组(4)的前r个方程经过简单计算可得:

$$\bar{d}_{r-1}=-\sum_{j=v-1}^{k-1}(-1)^{k-j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}d_{r-k+j}.$$

另外,由第$r+1$个方程有$\bar{d}_{r-1}=d_r$,因此,要使方程组(4)成为相容方程组的充要条件是

$$d_r=-\sum_{j=v-1}^{k-1}(-1)^{k-j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}d_{r-k+j}, \tag{9}$$

即

$$\sum_{j=v-1}^{k}(-1)^{k-j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}d_{r-k+j}=0. \tag{10}$$

由于我们利用了$l_{v-1}=1,l_k=0$,因此与文献[7]中的式(11)相比,本文定义的式(8)更简明,且便于编程计算,因而也简化了Eck[7]给出的内节点精确去除的充要条件.

式(10)一般不成立,因此我们扰动顶点序列$\{d_{r-k+i}\}_{i=v-1}^{k}$为$\{d_{r-k+i}+\varepsilon_i\}_{i=v-1}^{k}$,使得式(10)成立.我们的极小目标是$\sum\limits_{i=v-1}^{k}\|\varepsilon_i\|^2$,其中$\|\cdot\|$表示Euclid范数.为此,构造Lagrange数乘函数:

$$L=\sum_{i=v-1}^{k}\|\varepsilon_i\|^2+\lambda\sum_{i=v-1}^{k}(-1)^{k-i}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}(d_{r-k+i}+\varepsilon_i), \tag{11}$$

这里,λ为Lagrange乘子,令$\dfrac{\partial L}{\partial\varepsilon_i}=0,\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=0$,我们有

$$\begin{cases}2\varepsilon_i+(-1)^{k-i}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\lambda=0, & v-1\leqslant i\leqslant k\\ \sum\limits_{j=v-1}^{k}(-1)^{k-j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}(d_{r-k+j}+\varepsilon_j)=0\end{cases}, \tag{12}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

解此方程组可得

$$\varepsilon_i = -\frac{(-1)^{k-i}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}}{\sum\limits_{j=v-1}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}^2}\sum_{j=v-1}^{k}(-1)^{k-j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}d_{r-k+j},\quad v-1\leqslant i\leqslant k. \tag{13}$$

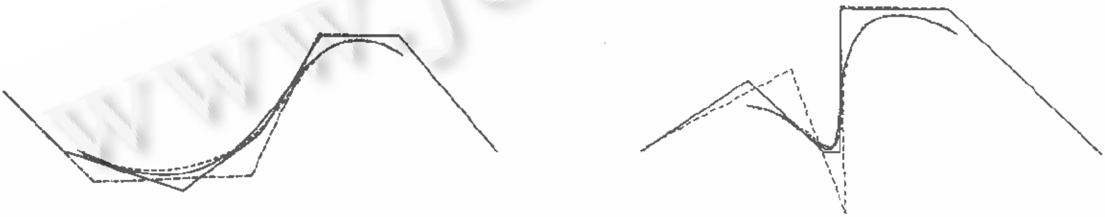
因此,节点去除算法可按如下步骤进行:

(1) 根据式(13)计算$\{\varepsilon_i\}_{i=v-1}^{k}$;

(2) 对$v-1\leqslant i\leqslant k$,执行$d_{r-k+i}\leftarrow d_{r-k+i}+\varepsilon_i$;

(3) 根据式(5)计算新控制顶点$\{\bar{d}_i\}_{i=0}^{n-1}$.

与上一节的方法比较,显然,本节的方法更直观,而且计算量要小得多.图1给出了一个节点去除的例子.定义在节点序列{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}上的两条四阶B-样条曲线及其控制多边形用实线表示,去除节点$t_4=4$后的逼近样条曲线及其控制多边形用虚线表示.



(a) (b)

Fig.1 Knot-Removed of B-Spline curves

图1 B-样条曲线节点去除

为了增强局部控制特性,我们可以增加约束条件,例如,$\varepsilon_{v-1}=\varepsilon_k=0$,然后求解扰动系数.这种局部控制能力是很重要的,因为在很多应用中,常常只允许改变一部分数据,有时甚至只允许改变一个控制点.

4 节点去除与B样条光顺

文献[5]提出的B-样条光顺方法是先去除节点,然后再重新插入该节点一次.这是因为,经过上述处理后,B-样条曲线在该节点的光滑度提高一次,其主要步骤可描述如下:

(1) 按某种判定法则决定需要进行光顺的内部节点;

(2) 在该节点处执行节点去除算法;

(3) 对该节点执行节点插入算法.

对某个内部节点t_r,按上一节方法扰动控制顶点,使得曲线扰动后,该节点t_r可以从节点序列中精确去除.这就是说,曲线在该节点的光滑度得到提高,因而达到了光顺的目的,但我们并不真正进行节点去除与插入,于是我们可以得到如下的光顺方法:

(1) 按某种判定法则决定需要进行光顺的内部节点;

(2) 扰动控制顶点,扰动量根据式(13)计算.

由于省略了节点去除和节点插入过程,只对部分控制顶点计算扰动量,因而本文的方法大大减少了Farin光顺方法的计算量.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

5 结 论

本文讨论了B-样条曲线节点的问题,充分利用B-样条曲线控制顶点的优点,直接扰动控制顶点以达到去除节点的目的,并给出一个简单的样条曲线光顺方法.本文去除节点的方法显然可以直接应用到样条曲面,但并不能直接用于样条曲面的光顺,因为先在 u 方向去除一个节点再在 v 方向去除一个节点之后,并不能使曲面达到 k 次光滑.

References:

[1] Lyche, T., Morken, K. Knot removal for parametric B-spline curves and surfaces. Computer Aided Geometric Design, 1987,4(3):217~230.

[2] Lyche, T., Morken, K. A data reduction strategy for splines with application to the approximation of function and data. IMA Journal of Numerical Analysis, 1988,8(2):185~208.

[3] Tiller, W. Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces. Computer Aided Design, 1992,24(8):445~453.

[4] Kjellander, J. Smoothing of cubic parametric splines. Computer Aided Design, 1983,15(3):175~179.

[5] Farin, G., Rein, G., Sapidis, N., *et al.* Fairing cubic B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 1987,4(1~2):91~103.

[6] Sapidis, N., Farin, J. Automatic fairing algorithm for B-spline curves. Computer Aided Design, 1990,22(2):121~129.

[7] Eck, M., Hadenfeld, J. Knot-removal for B-spline curves. Computer Aided Design, 1995,12(3):259~282.

Knot-Removal and Fairing of B-Spline Curves

MAN Jia ju[1,2], HU Shi min[1,3], YONG Jun-hai[1,3], SUN Jia-guang[1,3]

[1](*National CAD Engineering Center, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*);

[2](*Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*);

[3](*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

E-mail: shimin@tsinghua.edu.cn

http://ncc.cs.tsinghua.edu.cn

Received July 14, 1999; accepted October 27, 1999

Abstract: The problem of knot-removal for B-spline curves is investigated in this paper. The sufficient and necessary condition for removing knots of B-spline curves exactly is simplified. Based on the constrained optimization method, a new algorithm of knot-removal is derived by perturbing the control points of B-spline curves. This method can also be used to fair B-spline curves.

Key words: B-spline curve; knot-insert; knot-removal; fairing; constrained optimization

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn