

基于空间网格表面距离的插值曲面*

尹宝才 孔德慧 吴思宁

(北京工业大学计算机学院 北京 100022)

E-mail: ybc@bjpu.edu.cn

摘要 主要讨论基于空间网格表面距离的插值曲面. 定义了一种空间网格表面距离, 基于空间网格表面距离, 给出了两种定义在空间网格上的插值曲面: 基于网格表面距离的径向基函数插值曲面和基于网格表面距离的 Kriging 插值曲面, 讨论了曲面的无穷阶光滑性, 给出了一种计算网格表面距离的折线跟踪算法. 作为整体曲面, 此类插值曲面与网格表面形状较为相符, 比较适合于局部插值与参数估计, 如梯度、法方向的估计等计算.

关键词 径向基函数, Kriging 插值曲面, 样条曲面, 空间网格表面距离.

中图法分类号 TP391

我们知道, 样条曲面在各行各业有着广泛的应用, 如实体造型、产品设计、计算机模拟、虚拟现实技术、计算机动画等. 但 B 样条有一个主要限制, 即它要求控制点是矩形规格排列的, 忽略这一点将导致曲面混淆和退化^[1]. 许多逼近的方法可以产生任意拓扑结构的光滑曲面, 逼近不规则空间网格, 但有一个弱点是不满足插值条件. 现在普遍应用的是光滑拼接的局部插值方法^[2~5]. 文献[2]和文献[3]分别构造了分片四次和三次光滑曲面. 这些方法主要是通过增加分片多项式阶数或细化曲面片的方法增加自由度, 以达到光滑拼接的目的. 这些方法在实际应用中, 曲面形状严重依赖于一些参数的确定. Loop C 在文献[6]中曾指出, “局部多项式插值通常产生令人不满意的形状”. 文献[7,8]提出一种径向基函数插值曲面方法, 即首先采用子剖分方法生成一个光滑曲面, 然后用此光滑曲面作为定义域建立一个径向映射, 使得生成曲面插值于原空间网格点. 最近, 子剖分曲面被证明具有精确表达式^[9], 这进一步为径向基函数插值曲面的应用提供了基础. 另一类方法是 Kriging 方法. 此类方法由已知节点采用最小预测误差方法来估计未知点的位置, 其效果依赖于选定节点间的相关性模型或 Kriging 模型^[10,11]. 文献[12]还对样条函数、神经网络、归纳学习和 Kriging 等方法的特点进行了详细的分析与比较. 然而, 以上由空间网格重建网格插值曲面的方法主要依赖于网格间拓扑关系和空间位置, 而往往忽略网格表面形状的信息. 比如, 空间两点间距离很近, 在空间网格表面上却相距较远, 采用基于空间距离的曲面插值方法生成的插值曲面将与空间网格表面误差较大, 有时会产生与空间网格表面不同的表面走向, 如局部凹凸性等.

为了解决这一问题, 本文提出一种基于空间网格表面距离的空间光滑插值曲面方法. 将空间网格表面距离的概念应用于径向基函数插值曲面方法和 Kriging 方法中, 分别建立了基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面和 Kriging 插值曲面. 这一方法的优点是, 在空间网格基础上直接建立了具有无穷阶光滑的插值曲面. 由于采用空间网格表面距离定义网格点间的相关性, 因此大大增加了生成曲面与网格曲面拟合程度. 基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面是将空间网格表面作为定义域, 用空间网格表面距离作为径向距离建立一个径向基函数插值曲面, 径向基函数可以选择多元平方函数和高斯函数. 基于空间网格表面距离的 Kriging 插值曲面是采用空间网格表面距离作为 Kriging 模型的关系参数的最小预测误差插值曲面. 为了避免大型优化问题

* 本文研究得到国家 863 高科技项目基金(No. 863-306-ZT03-01-2)、北京市教委科技发展计划基金(No. 97070500)和北京市跨世纪人才工程(No. 98070501)资助. 作者尹宝才, 1963 年生, 博士, 教授, 主要研究领域为计算机图形学, 图像处理. 孔德慧, 女, 1968 年生, 博士, 副教授, 主要研究领域为 CAD, 计算机图形学, 科学可视化. 吴思宁, 1975 年生, 硕士, 主要研究领域为计算机图形学, 图像处理.

本文通讯联系人: 尹宝才, 北京 100022, 北京工业大学计算机学院

本文 1999-01-12 收到原稿, 1999-09-07 收到修改稿

的计算,本文给出了计算空间网格表面距离的折线跟踪算法。

本文第1节介绍空间网格表面距离的定义和一些性质。第2节和第3节分别介绍基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面和基于空间网格表面距离的Kriging插值曲面,计算空间网格表面距离的折线跟踪方法在第4节讨论。最后是结论和进一步的工作。

1 空间网格表面距离

设 Δ 为一空间三角形网格, $\circ\Delta$ 为 Δ 的所有内网点的集合, $\delta\Delta$ 为 Δ 的所有内网线上点的集合, $\sigma\Delta$ 为 Δ 的所有三角形面上点的集合, $\tau\Delta$ 为 Δ 的三角形面的集合。

定义1. 定义空间三角形网格 Δ 表面上两点 $x, y \in \sigma\Delta$, 它们之间的网格表面距离为

$$d_{\Delta}(x, y) = \min_{t_1, t_2, \dots, t_n \in \delta\Delta} \left(\|x - t_1\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|t_i - t_{i+1}\| + \|y - t_n\| \right),$$

其中 t_1, t_2, \dots, t_n 为 Δ 的内网线上的点,即沿着网格表面连接两点的最小的折线长度之和, $\|\cdot\|$ 为欧氏距离。

当连接两点的最短折线只有一条时,可以证明,这样定义在空间网格 Δ 上的距离函数是无穷阶可微的,即有以下定理。

定理1. 设 Δ 为空间三角形网格, x 和 y 为空间网格 Δ 表面上两点, $d_{\Delta}(x, y)$ 为 Δ 表面上的网格表面距离,假设这一网格表面距离的路径 $x, t_1, t_2, \dots, t_n, y$ 是唯一的,则存在 x 和 y 的一个邻域 $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$, $d_{\Delta}(x', y')$ 在 $x' \in \delta(x), y' \in \delta(y)$ 上无穷阶可微的。

证明:由于 $d_{\Delta}(x, y)$ 距离路径 $x, t_1, t_2, \dots, t_n, y$ 是唯一的,所以存在 x 和 y 的两个邻域,分别落在这两个邻域内的两点间网格表面距离折线也是唯一的。我们用反证法对此结论加以说明。

假设不存在这样的邻域,则存在一个序列对 $(\{x_n\}, \{y_n\}, n=1, 2, \dots)$, 其极限满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$, 且网格表面距离 $d_{\Delta}(x_n, y_n)$ 的折线路径不唯一。对于任意两个网格表面上的点,顺着一条连接两点的网格表面距离折线,依次在各路径点处,沿着各路径点所在网线方向,将折线所经过的三角形面旋转到同一平面上。由于连接两点间的展开平面是有限的,所以,存在 $(\{x_n\}, \{y_n\}, n=1, 2, \dots)$ 的一个子序列 $(\{x'_n\}, \{y'_n\}, n=1, 2, \dots)$, 其网格表面距离 $d_{\Delta}(x'_n, y'_n)$ 的折线路径不唯一,且两个网格表面距离折线分别在两个不同展开平面上。由于序列对 $(\{x'_n\}, \{y'_n\}, n=1, 2, \dots)$ 的极限为 (x, y) , 因此存在 (x, y) 的两个网格表面距离路径,分别落在以上两个不同的展开平面上。这表明 (x, y) 的网格表面距离折线路径是不唯一的,与假设矛盾。

为了说明这一距离函数的可微性,顺着距离折线,依次在各路径点 t_1, t_2, \dots, t_n 处,沿着各路径点所在网线方向,将折线所经过的三角形面旋转到同一个平面上。

结果只有两种情况:一种是折线在这个平面上是一条直线,且距离折线不通过空间网格内的节点;另一种情况是存在一些路径点为空间网格 Δ 的边界点,且距离折线在这个平面上是一折线,此时,在 x 和 y 的一个邻域 $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$ 内,距离函数 $d_{\Delta}(x, y)$ 等价于一个平面三角剖分上的两点间距离函数,如图1所示,所以是无穷阶可微的。 □

性质1. 当网格内节点为相邻面互相不共面时,距离折线不通过空间网格内的节点。

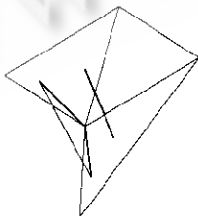


Fig. 1 Distance paths in plane triangulation
图1 平面三角剖分上的两点间距离路径

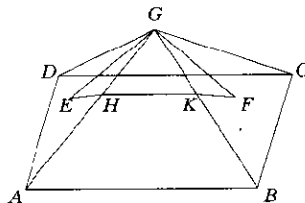


Fig. 2 Distance function through inter vertex
图2 过内节点的距离函数

证明:如果存在过内点的网格表面距离路径(如图2所示),则 G 点周围夹角之和小于 360° 。不失一般性,假设 $\angle EGA + \angle AGB + \angle BGF < 180^\circ$, 将 DAG, AGB, BGC 这3个平面沿 AG 和 GB 折成一个平面,于是,存在另

一路径 $E-H-K-F$, 使得其折线距离小于 EGF 折线距离.

2 基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面

基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面是一个定义于空间网格表面上的径向基插值函数的映射. 其定义如下:

基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面: 设 $V_i (i=1, 2, \dots, N)$ 是空间网格 Δ 的网格点, S 为空间网格的表面上点的集合, 从 S 到 R^3 中的映射:

$$S_r(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(d_{\Delta}(x, V_i)),$$

$$\text{Constraint condition: } S_r(V_i) = V_i, \quad \lambda_i \in R^3 (i=1, 2, \dots, N), \quad x \in S$$

称为基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面, 其中 φ 是径向基函数.

系数 $\{\lambda_j; j=1, 2, \dots, N\}$ 可以由以下方程组来确定:

$$S_r(V_i) = V_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

径向基函数矩阵 $A \in R^{N \times N}$ 组成如下:

$$A = [A_{ij}], A_{ij} = \varphi(d_{\Delta}(V_i, V_j)), \quad i, j=1, 2, \dots, N.$$

基于空间网格表面距离的径向基函数插值曲面存在唯一解的充要条件是, 这一系数矩阵可逆. 如果径向函数 φ 选择高斯和逆平方根两种径向函数, 即

$$\text{高斯: } \varphi(r) = e^{-\alpha r^2}, \quad \alpha > 0,$$

$$\text{逆平方根: } \varphi(r) = (r^2 + c^2)^{-1/2},$$

则对于欧氏距离的径向基函数矩阵是正定的, 其详细证明参见文献[13, 14]. 但对于基于空间网格表面距离的径向基函数矩阵是否为可逆矩阵, 还有待进一步研究. 径向基函数插值方法的计算问题一直是个难以解决的困难, 最近的研究表明, 对于二维的薄板样条, 其插值点的个数已经可以达到 $10^{5[15]}$.

3 基于空间网格表面距离的 Kriging 插值曲面

Kriging 方法是用已知空间点的线性组合来估计未知点的位置, 可以表示为

$$V = \sum_{j=1}^n w_j V_j, \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

记估计误差为

$$r = V - \bar{V},$$

其中 \bar{V} 为估计点的真实值. 由于这些真实值是未知的, 若将 V, V_1, V_2, \dots, V_n 看成随机变量, 则相应于随机变量 r 的均方误差为

$$\delta^2 = E(r - E(r))^2.$$

为了使均方误差 δ^2 达到最小, 估计系数 $\{w_j\}$ 需要满足方程:

$$\min_{w_1, w_2, \dots, w_n} E(r - E(r)), \quad (1)$$

$$\text{Constraint condition: } \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

假设随机变量 \bar{V} 具有固定的分布, 则方程(1)可简化为

$$\min_{w_1, w_2, \dots, w_n} E(V - E(V))^2 - 2E((V - E(V))(\bar{V} - E(\bar{V}))) = \min_{w_1, w_2, \dots, w_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n w_i C_{i0},$$

$$\text{Constraint condition: } \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

其中 C_{i0} 和 $C_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 分别为对应点 V, V_1, V_2, \dots, V_n 间的协方差, 其中 V, V_1, V_2, \dots, V_n 分别为对应于空间网格表面上点 x, x_1, x_2, \dots, x_n 的插值曲面上的点. 应用 Lagrange 因子方法, 这一问题可转化

为如下线性方程组:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j C_{ij} - C_{i0} + \mu = 0, \\ \sum_{j=1}^n w_j = 1, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n, \quad (2)$$

方程组(2)可以写成矩阵形式:

$$AW=D, \quad (3)$$

其中

$$A=(a_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}, \quad a_{ij}=C_{ij}, \quad a_{i(n+1)}=a_{(n+1)j}=1, \quad a_{(n+1)(n+1)}=0, \quad i,j=1,2,\dots,n;$$

$$W=(w_1, w_2, \dots, w_n, \mu)^T, \quad D=(C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}, 1)^T.$$

进一步地,方程(3)可表示成如下形式:

$$\begin{bmatrix} A & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} D \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

其中

$$A=(a_{ij})_{n \times n}, \quad a_{ij}=C_{ij}, \quad i,j=1,2,\dots,n;$$

$$e=(1,1,\dots,1)^T, \quad D=(C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})^T.$$

如果只与已知节点有关的方程(4)中的矩阵 A 是正定的,则由于

$$\begin{bmatrix} A & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & e \\ e^T A^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \right) = -(e^T A^{-1} e) \det(A) \neq 0,$$

因此方程(4)具有唯一解.

对于插值点间协方差 $C_{i0}, C_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$ 的 Kriging 模型,可有很多选择,以下是一些常用的 Kriging 模型.

设 $C_{ij}=\delta_{ij}^2 - \gamma_{ij}$,

• 球面模型

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} C_0 + C_1 \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right), & h \leq a \\ C_0 + C_1, & h > a \end{cases}$$

• 指数模型

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & h=0 \\ C_0 + C_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{3h}{a}\right) \right), & h>0 \end{cases}$$

其中 $h=d(x_i, x_j)$, δ_{ij}^2 为 V 的方差; $a>0, C_0>0, C_1>0$ 为给定常数. 详细说明可参见文献[10].

如果位置可以假定为平稳随机过程,则可以考虑用描述两点间相关程度的关系系数来代替协方差 C_{ij} . 空间网格点间的关系程度不仅与两点间的连线距离有关,而且与两点间网格表面的相对形状和起伏程度有关,即两点间的相关程度更主要地依赖于网格表面的相对距离. 本文考虑用网格表面距离表示空间网格点间的关系程度,于是有:

• 逆距离模型

$$C_{ij} = a(d_{\Delta}(x_i, x_j))^{-r},$$

其中 $a>0, r>0$ 为给定常数.

• 逆距离平均模型

$$C_{ij} = \bar{C}_{ij} / \left(\sum_{k=0}^n C_{ik}^2 \right)^{1/2},$$

其中 $\bar{C}_{ij} = a(d_{\Delta}(x_i, x_j))^{-r}, i=1, 2, \dots, n, j=0, 1, 2, \dots, n.$

• 高斯模型

$$C_{ij} = e^{-a(d_{\Delta}(x_i, x_j))^2}.$$

图 3 和图 4 是采用 Kriging 方法高斯模型绘制的插值曲面.

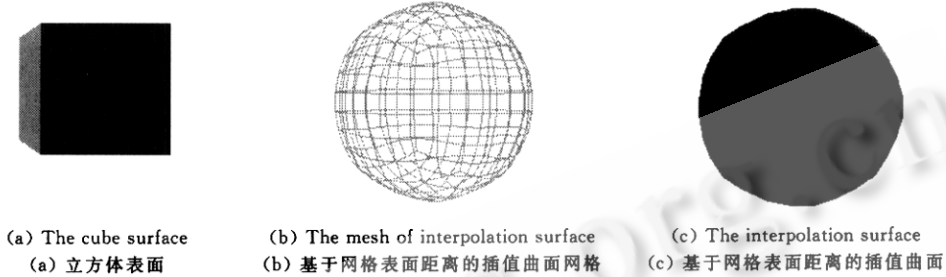


Fig. 3 The mesh-surface distance based interpolation surface defined on cube surface by using Kriging method and Gaussian model

图 3 用 Kriging 方法和高斯模型生成的定义在立方体表面的插值曲面

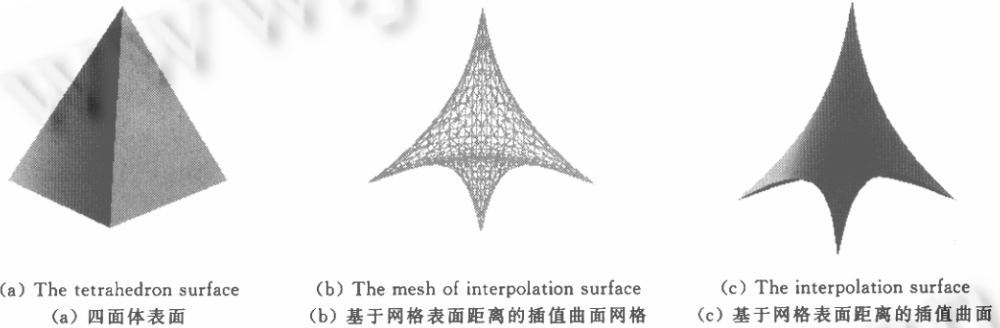


Fig. 4 The mesh-surface distance based interpolation surface defined on tetrahedron surface by using Kriging method and Gaussian model

图 4 用 Kriging 方法和高斯模型生成的定义在四面体表面的插值曲面

4 空间网格表面距离的计算

由于空间网格表面距离是一个优化问题,当两点间存在较多三角形时,其严格计算非常复杂,且计算量巨大.为了简化计算,本文应用空间网格表面距离折线路径的传输性质,提出采用计算空间网格表面距离的折线跟踪方法来计算.下面首先介绍一些有关概念.

距离层数:网格上一点 p 与三角形 $\sigma \in \Delta$ 的距离层数定义为从 p 点出发,沿着网格表面画一条折线到达三角形 σ 内部所需穿过的最少内网线个数(不可穿过内网点),记为 $LN(p, \sigma)$,当 $p \in \sigma$ 时,分层数为 0.

空间网格表面的折线跟踪方向:从空间网格上一点出发,沿着一定方向发射一条射线,当通过内网线到达相邻三角形时,射线在相邻三角形内的方向由如下方式确定:在射线同侧(右侧或左侧),入射角与反射角的和为 180° ,如图 5 所示.

检测区域:设 p, q 为网格 Δ 上两点,记为

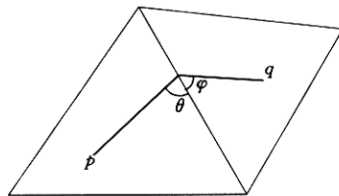


Fig. 5 The broken line tracing direction in mesh-surface
图 5 空间网格上的折线跟踪方向

$$n(p, q) = \min_{u, v \in \Delta} (LN(p, u) = LN(q, v); p \in v \& q \in u),$$

检测区域定义为

$$\Omega = \{\sigma; \sigma \in \Delta, LN(p, \sigma) \leq n(p, q) \& LN(q, \sigma) \leq n(p, q)\},$$

即两空间点三角形网格分层为 $n(p, q)$ 的区域的交集。

折线跟踪方法的基本思想是从一点出发,应用空间网格表面距离折线路径的传输性质,沿着网格表面均匀发射数条射线,射线按着折线跟踪方法传输,当一条射线到达另一点所在的三角形时,由这一射线所经过的路径作为两点间网格表面距离的候选路径,为了验证这一路径,沿这一路径将三角形面展成一个平面,检测连接此两点的连线是否位于此展开的平面三角形网格内部,选取距离最短的候选路径作为两点间距离,采用折线跟踪方法进行路径检测,检测算法可描述如下:

检测算法:

Input: 三角剖分 Δ 上两点 p, q , 令 $LN = 0$.

Step 1. 从点 p (或 q) 均匀发射 m 条射线.

Step 2. 根据折线跟踪方法确定每条射线的路径,如果存在到达包含另一点的三角形的路径,则记录相应射线所经过的路径(三角形顺序序列).若射线超出检测区域或到达边界,则放弃这一路径.

Step 3. 判断所经过的路径是否为两点间平面展开的距离路径(即沿这一路径将三角形面展成一个平面,检测连接此两点的连线是否位于此展开的平面三角形网格内部),如果是,则将距离记录为 $LN(p, q)$.

Step 4. 如果 $LN(p, q) > LN$, 则在此 m 条射线中,每两条间均匀发射一条射线, $LN = L_p^N(p, q)$, 转 Step 2, 否则停止.

Output: 网格表面距离 LN .

5 结 论

本文在定义空间网格表面距离的基础上,构造出基于网格表面距离的径向基函数插值曲面和基于网格表面距离的 Kriging 插值曲面,并讨论了曲面的无穷阶光滑性,同时给出了一种计算网格表面距离的折线跟踪算法.

部分实验表明,此类插值曲面“几乎处处”具有无穷阶光滑度,而且作为整体曲面,此类插值曲面与网格表面形状较为相符,同时此类插值曲面的计算量较大,如对于径向基函数插值曲面,其插值点一般不宜超过 500 个,比较适合于局部插值与参数(如梯度、法方向)估计等计算.最近的研究表明,对于二维的薄板样条,其插值点的个数已经可以达到 10^5 ,参见文献[15].折线跟踪算法对于边界情况的处理,适合于较多插值点的 Kriging 模型和算法,将是我们下一步的主要工作.

参考文献

- 1 Loop C. Smooth spline surface over irregular meshes. In: Andrew Glassner ed. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series. Orlando: ACM Press, 1994. 303~310
- 2 Piper B. Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches. In: Farin G ed. Geometric Modeling: Algorithms and New Trends. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. 221~234
- 3 Shi Xi-quan, Wang Tian-jun. A G^1 cubic interpolant on a space mesh. Journal of Mathematical Research & Exposition, 1994, 14(4): 539~545
- 4 Farin G. Smooth interpolation to scattered 3D data. In: Barahill R, Boehm W eds. Surfaces in Computer Aided Geometric Design. North-Holland: Elsevier Science Press, 1982. 43~64
- 5 Peters J. Smooth interpolation of a mesh of curves. Constructive Approximation, 1991, 7(2): 221~246
- 6 Loop C. A G^2 triangular spline surface of arbitrary topological type. Computer Aided Geometric Design, 1994, 11(3): 303~330
- 7 Yin Bao-cai, Gao Wen. Radial basis function interpolation surface on space mesh. In: Ebert D S ed. Computer Graphics

- Virtual Proceedings. Los Angeles: ACM Press, 1997. 150
- 8 Yin Bao-cai, Gao Wen. A radial basis function interpolation surface. In: Li Hua, Li Bin, Yu Xia eds. Proceedings of the Fifth International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics. Shenzhen: International Academic Publisher, 1997, 1:391~394
 - 9 Stam J. Exact evaluation of catmull-clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. In: Michael Cohen ed. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series. Orlando: Addison Wesley, 1998. 395~404
 - 10 Lang Chao yi. Kriging Interpolation. Technical Report, Ithaca: Cornell University, 1998. <http://www.tc.cornell.edu/visualization/contrib/cs490-94t095/clang/Kriging.html>
 - 11 Lsaaks, Srivastava. An Introduction to Applied Geostatistics. Oxford: Oxford University Press, 1989
 - 12 Simpson T W. Comparison of response surface and kriging models in the multidisciplinary design of an aerospike nozzle. NASA (National Aeronautics and Space Administration)/CR-1998-206935, ICASE (Insitute of Computer Applications in Science and Engineering) Report No. 98-16, Virginia; Georgia Institute of Technology, 1998
 - 13 Powell J D. The theory of radial basis function approximation in 1990. Technical Report, Cambridge; University of Cambridge, 1990
 - 14 Powell J D. Univariate multiquadric approximation; reproduction of linear polynomials. In: Haussmann W, Jetter K eds. Multivariate Approximation and Interpolation. Basel: Birkhäuser Verlag, 1990. 227~240
 - 15 Powell J D. Recent research at Cambridge on radial basis functions. Technical Report, NA05, Cambridge; University of Cambridge, 1998. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/reports98.html>

Interpolation Surface Based on Space-Mesh-Surface Distance

YIN Bao-cai KONG De-hui WU Si-ning

(Computer Institute Beijing Polytechnic University Beijing 100022)

Abstract In this paper, the concept of space-mesh-surface distance is introduced. Based on the space-mesh-surface distance, two kinds of interpolation surfaces defined on space-mesh-surface of triangulation are constructed. They are space-mesh-surface distance based radial basis function interpolation surface and Kriging interpolation surface. The infinite smoothness of the surface is discussed for those points that have unique distance path on space-mesh-surface. An algorithm for computing space-mesh-surface distance, named broken line tracing method, is given. As a whole interpolation surface, they are well in consistence with the space-mesh-surface in shapes and are suitable to be applied in local shape estimation, such as gradient and direction estimations.

Key words Radial basis function, Kriging interpolation surface, spline surface, space-mesh-surface distance.