

带端点插值条件的 Bézier 曲线降多阶逼近*

陈国栋 王国瑾

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

(浙江大学数学系 杭州 310027)

E-mail: wgj@math.zju.edu.cn

摘要 研究了两端点具有任意阶插值条件的 Bézier 曲线降多阶逼近的问题。对于给定的首末端点的各阶插值条件,给出了一种新的一次降多阶逼近算法,应用 Chebyshev 多项式逼近理论达到了满足端点插值条件下的近似最佳一致逼近。此算法易于实现,误差计算简单,且所得降阶曲线具有很好的逼近效果,结合分割算法,可获得相当高的误差收敛速度。

关键词 端点插值,降多阶,逼近,分割。

中图法分类号 TP391

在当前的计算机辅助设计/制造(CAD/CAM)系统中,自由曲线/曲面大多采用参数多项式形式。不同的设计系统对多项式最高阶数的限制范围和要求是不同的。而随着大量造型系统的涌现,CAD/CAM 系统之间曲线/曲面几何描述信息的数据交换日益频繁。为了实现不同阶数的曲线/曲面的数据转换,降阶算法的探索和研究就成了一项紧迫任务。另一方面,系统中数据存储量的压缩以及 B 样条曲线的光顺化^[1]也都时常提出降阶处理的要求。

多年来,众多国际学者提出了大量的方法来实现 Bézier 参数曲线的降阶逼近^[2-10];Danneberg^[2]和 Hoschek^[3]利用原曲线的离散点位矢及导矢等几何信息量来进行降阶逼近;Watkins 和 Worsley^[4]基于 Chebyshev 多项式逼近给出了一种降阶方法,并通过 Lagrange 插值来保持端点插值;Lachance^[5]及 Eck^[6]利用约束 Chebyshev 多项式来实现端点插值的降阶逼近;1995 年,Eck^[7]又用约束 Legendre 多项式来进行降阶逼近;胡事民^[8]考虑了 Bézier 曲线的退化条件,利用扰动控制顶点和约束最小二乘方法来实现降阶,并将其应用于三角域及矩形域曲面的降阶。以上各种方法每次均只能降 1 阶,若需降多阶,则需采用逐次降阶,而且当端点要满足 r 阶($r \geq 0$)插值时,均无显式解,只能通过数值方法来求解,这不仅导致计算相当复杂耗时,而且误差很大。但众所周知,逼近曲线的保端点 r 阶插值($r \geq 0$),即逼近曲线与原曲线在两端点有相同的位矢和 r 阶($r=1,2,\dots$)导矢,在几何设计中是十分必要的。1995 年,L. Piegl^[9]利用升阶的反过程对 n 次曲线进行降阶,可保持端点($[n/2]-1$)阶插值,但其同样每次只能降 1 阶且降阶逼近误差较大。同年,Bogacki^[10]通过将 Chebyshev 基与 Bernstein 基转换的方法,终于实现了对 Bézier 曲线的降多阶逼近,但其端点只能达到位矢插值,而无法满足 1 阶及 1 阶以上导矢插值。那么,保端点高阶插值的多项式曲线一次降多阶逼近难道真的是无法实现吗?回答是否定的。

本文给出了满足端点插值条件的 Bézier 曲线降多阶的一种新算法,所得降阶曲线充分保持原曲线的端点几何插值信息,首末端点可分别达到任意 r, p ($r, p \geq 0$)阶插值,结合 Chebyshev 多项式逼近理论,获得了满足端点插值条件下的近似最佳一致逼近。本算法计算简单、稳定且易于实现,并可有效地与分割算法结合起来获得快速收敛效果。

* 本文研究得到国家自然科学基金(No. 69973041)、浙江省自然科学基金(No. 698025)和国家 973 高科技项目基金(No. G1998030600)资助。作者陈国栋,1975 年生,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,降阶逼近。王国瑾,1944 年生,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,形位公差计算几何学,应用逼近论。

本文通讯联系人:陈国栋,杭州 310027,浙江大学数学系

本文 2000-02-28 收到原稿,2000-04-13 收到修改稿

1 具有端点插值条件的 Bézier 曲线降阶

给定一组控制顶点 $\{P_i\}_{i=0}^n$, 可确定一条 n 次 Bézier 曲线

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

其中 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ 是 n 阶 Bernstein 基函数.

具有端点 (r, p) 阶插值条件的 Bézier 曲线降阶, 是指对给定的一条 n 次 Bézier 曲线 $P_n(t)$, 找到另一条 m 次 Bézier 曲线 $Q_m(t)$, $m < n-1$, 不仅需使距离函数 $d(P_n, Q_m) = \max_{0 \leq t \leq 1} \|P_n(t) - Q_m(t)\|$ 达到最小, 且降阶曲线 $Q_m(t)$ 与原曲线 $P_n(t)$ 在首末端点分别有相同的 r, p 阶 ($r, p \geq 0, r+p+1 \leq m$) 导矢, 其中 $\|\cdot\|$ 是 Euclidean 范数.

为得到具有端点插值条件的 Bézier 曲线降阶逼近的新算法, 我们首先不加证明地给出以下引理.

引理 1. m 次 Bernstein 多项式 $B_i^m(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 可表示为

$$B_i^m(t) = \sum_{j=i}^{n-i-m} b_{i,j} B_j^n(t), \quad n > m, \quad i = 0, 1, \dots, m, \tag{2}$$

其中

$$b_{i,j} = \binom{m}{i} \binom{n-m}{j-i} / \binom{n}{j}, \quad \text{且记 } b_{i,j} = 0 (j < i \text{ 或 } j-i > n-m). \tag{3}$$

引理 2. 记 $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$ ($-1 \leq t \leq 1$) 为 k 次 Chebyshev 多项式, $k = 0, 1, \dots, n$, $\{B_i^n(t)\}_{i=0}^n$ ($0 \leq t \leq 1$) 为 n 次 Bernstein 多项式, 则它们之间的相互线性表示写成矩阵关系式为

$$T_n = A_{n \times n} B_n, \quad B_n = A_{n \times n}^{-1} T_n = C_{n \times n} T_n, \tag{4}$$

这里,

$$\begin{aligned} T_n &= (T_0(2t-1), T_1(2t-1), \dots, T_n(2t-1))^T, \\ B_n &= (B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t))^T, \\ A_{n \times n} &= (A_{k,j})_{n \times n}, \quad A_{k,j} = \sum_{i=\max(0, j+k-n)}^{\min(j,k)} (-1)^{k+i} b_{i,j} \binom{2k}{2i} / \binom{k}{i}, \end{aligned}$$

$b_{i,j}$ 如式 (3) 中所示.

由引理 1 可得以下定理.

定理 1. 对给定的一条以 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 为控制顶点的 n 次 Bézier 曲线 $P_n(t)$, 设 $r+p < m < n$, 则将其表示为

$$\sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \equiv Q(t) = \sum_{i=0}^r Q_i B_i^m(t) + \sum_{i=r+1}^{n-p-1} P_i B_i^m(t) + \sum_{i=m-p}^m Q_i B_i^m(t), \tag{5}$$

的充要条件是 (6)~(8) 式, 同时成立:

$$\begin{cases} Q_0 = \frac{1}{b_{0,0}} P_0, \quad Q_j = \frac{1}{b_{j,j}} \left(P_j - \sum_{i=\max(0, j-(n-m))}^{j-1} b_{i,j} Q_i \right), \quad j = 1, 2, \dots, r, \\ Q_m = \frac{1}{b_{m,n}} P_n, \quad Q_{m-j} = \frac{1}{b_{m-j, n-j}} \left(P_{n-j} - \sum_{i=\max(0, j-(n-m))}^{j-1} b_{m-i, n-j} Q_{m-i} \right), \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \tag{6}$$

当 $m-p > n+r-m$ 时,

$$\begin{cases} P_j^1 = P_j - \sum_{i=0}^r b_{i,j} Q_i, & j = r+1, r+2, \dots, n+r-m, \\ P_j^1 = P_j, & j = n+r-m+1, n+r-m+2, \dots, \max(m-p-1, n+r-m+1) \\ P_j^1 = P_j - \sum_{i=c}^p b_{m-i,j} Q_{m-i}, & j = m-p, m-p+1, \dots, n-p-1. \end{cases} \tag{7}$$

当 $m-p \leq n+r-m$ 时,

$$\begin{cases} P_j^i = P_j - \sum_{i=0}^r b_{i,j} Q_i, & j=r+1, r+2, \dots, \max(m-p-1, r+1) \\ P_j^i = P_j - \sum_{i=0}^r b_{i,j} Q_i - \sum_{i=0}^p b_{m-i,j} Q_{m-i}, & j=m-p, m-p+1, \dots, n+r-m, \\ P_j^i = P_j - \sum_{i=0}^p b_{m-i,j} Q_{m-i}, & j=\min(n+r-m+1, n-p-1), n+r-m+2, \dots, n-p-1. \end{cases} \quad (8)$$

这里, $n-p-1$ 与 m 之间无大小限制, $\{Q_i\}_{i=0}^r, \{Q_i\}_{i=m-p}^m$ 为 m 次降阶逼近曲线 $Q_m(t) = \sum_{i=0}^m Q_i B_i^m(t)$ 在首末端点附近的部分控制顶点, $\{P_i^j\}_{i=0}^{n-1}$ 为待定的辅助控制顶点, 且必有

$$\frac{d^\lambda Q_m(0)}{dt^\lambda} = \frac{d^\lambda P_n(1)}{dt^\lambda}, \lambda=0, 1, \dots, r, \frac{d^\mu Q_m(1)}{dt^\mu} = \frac{d^\mu P_n(1)}{dt^\mu}, \mu=0, 1, \dots, p. \quad (9)$$

证明: 由引理 1, $B_i^m(t) = \sum_{j=i}^{n+i-m} b_{i,j} B_j^n(t)$, 将其代入式(5)右端, 整理后可得

$$\sum_{j=0}^{n+r-m} \left[\sum_{i=\max(0, m+j-n)}^{\min(j, m)} b_{i,j} Q_i \right] B_j^n(t) + \sum_{j=r+1}^{n-p-1} P_j^i B_j^n(t) + \sum_{j=m-p}^n \left[\sum_{i=\max(m-p, m+j-n)}^{\min(j, m)} b_{i,j} Q_i \right] B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t),$$

从而由 Bernstein 基 $\{B_j^n(t)\}_{j=0}^n$ 的线性无关性, 即可推知式(6)~(8)的必要性和充分性。

其次, 由引理 1 和式(6)有

$$\sum_{i=0}^m Q_i B_i^m(t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^{n+i-m} b_{i,j} Q_i B_j^n(t) = \sum_{j=0}^r P_j B_j^n(t) + \sum_{j=r+1}^{n-p-1} \left[\sum_{i=\max(0, j-(n-m))}^{\min(j, m)} b_{i,j} Q_i \right] B_j^n(t) - \sum_{j=n-p}^n P_j B_j^n(t),$$

由上式及 Bézier 曲线的对称性易知, 此时式(9)显然成立。 □

由以上定理可得出以下两个推论:

推论 1. 若 $m=r+p+1$, 且取 $\{Q_i\}_{i=0}^m$, 如式(6)所示, 则曲线 $P_n(t)$ 的以 $\{Q_i\}_{i=0}^m$ 作为控制顶点的 m 次降阶逼近曲线 $Q_m(t)$ 是最简单的保首末端点 r, p 阶插值的 Hermite 插值曲线。

推论 2. 若 $m=n-1, r=p=[(m-1)/2]$, 且当 m 为奇数时, 取 $\{Q_i\}_{i=0}^m$, 如式(6)所示; 当 m 为偶数时, 取 $\{Q_i\}_{i=0}^{m/2-1}, \{Q_i\}_{i=m/2+1}^m$, 如(6)式所示, 且取 $Q_{m/2} = (Q_r^* + Q_r^*)/2$, 其中 $Q_r^* = \frac{n P_{r+1} - (r+1) Q_r}{n - (r+1)}, Q_r^* = \frac{n P_{n-p} - (n-m+p) Q_{m-p}}{m-p}$, 则曲线 $P_{m+1}(t)$ 降阶一次可得 $\{Q_i\}_{i=0}^m$ 作为控制顶点的 m 次降阶逼近曲线 $Q_m(t)$, 即为 L. Piegl 在文献[9]中所得的降阶曲线。

因为 $m < r+p+1$ 时不存在满足所给端点插值条件的降阶逼近曲线, 而 $m=r+p+1$ 的情形是平凡的, 所以本文只对 $m > r+p+1$ 的情形进行研究。

由定理 1 可求得 $\{Q_i\}_{i=0}^r, \{Q_i\}_{i=m-p}^m, \{P_i^j\}_{i=0}^{n-1}$, 下面我们利用 Chebyshev 多项式逼近, 用 $\sum_{i=r-1}^{m-p-1} P_i^j B_i^m(t)$ 对 $\sum_{i=r+1}^{n-p-1} P_i^j B_i^n(t)$ 进行无端点插值降阶逼近, 这里, $\{P_i^j\}_{i=0}^{n-1}$ 是待求控制顶点。

首先, 由 Bernstein 多项式性质可得 $\sum_{i=r+1}^{n-p-1} P_i^j B_i^n(t) = (1-t)^{r+1} t^{r+1} \sum_{i=0}^N P_i^j B_i^N(t)$, 其中

$$P_i^j = P_{r+1+i}^j \cdot \binom{n}{r+1+i} / \binom{N}{i}, i=0, 1, \dots, N.$$

记 $P_N^j = (P_0^j, P_1^j, \dots, P_N^j)$, 则由引理 2 知 $P_N^j B_N = P_N^j C_{N \times N} T_N = P_N^j T_N$ 。

设 $P_M^j = (P_0^j, P_1^j, \dots, P_M^j) = P_N^j C_{N \times N}, M=m-(r+p+2)$, 取 P_M^j 的前 M 个元素来产生 M 次 Chebyshev 多项式曲线, 则由 Chebyshev 多项式逼近理论^[11], 此时 $P_M^j T_M$ 为逼近多项式 $P_N^j B_N$ 的所有 M 次多项式中的近似最佳一致逼近, 又因 $\max_{0 \leq t \leq 1} \|T_i(2t-1)\| \leq 1$, 此时的逼近误差为

$$\Delta(T, B) = (\|P_{M+1}^j\| + \|P_{M-2}^j\| + \dots + \|P_N^j\|). \quad (10)$$

下面, 将 $P_M^j T_M$ 返回到 Bernstein 基下的对应 Bézier 表示. 由引理 2 可知 $P_M^j T_M = P_M^j A_{M \times M} B_M$, 由此得

$$(1-t)^{p+1}t^{r+1}P_M^{III}T_M = (1-t)^{p+1}t^{r+1}P_M^{III}A_{M \times M}B_M = \sum_{i=r+1}^{m-p-1} P_i^{IV}B_i^m(t),$$

$$P_M^{III}A_{M \times M} = \left(\sum_{j=0}^M P_j^{III}A_{j,0}, \sum_{j=0}^M P_j^{III}A_{j,1}, \dots, \sum_{j=0}^M P_j^{III}A_{j,M} \right),$$

这里,

$$P_i^{IV} = \sum_{j=0}^M P_j^{III}A_{j,i-r-1} \binom{M}{i-r-1} \binom{m}{i}, i=r+1, r+2, \dots, m-p-1. \tag{11}$$

这样我们可以得到如下定理.

定理 2. 给定以 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 为控制顶点的一条 n 次 Bézier 多项式曲线 $P_n(t)$, 设 $r+p+1 < m$, 若分别取 $\{Q_i\}_{i=0}^n, \{Q_i\}_{i=m-p}^n$, 如式 (6) 所示, 取 $Q_i = P_i^{IV}, i=r+1, \dots, m-p-1$, 如式 (11) 所示, 则由 $\{Q_i\}_{i=0}^n$ 作为控制顶点所形成的 m 次降阶逼近曲线 $Q_m(t)$ 在首末端点分别达到 r, p 阶插值, 且为在该插值条件下对 $P_n(t)$ 的近似最佳一致逼近, 其降阶逼近误差为

$$\varepsilon = d(P_n, Q_m) = \max_{0 \leq t \leq 1} ((1-t)^{p+1}t^{r+1} \sum_{i=M+1}^N \|P_i^{III}\|) = \frac{(p+1)^{p+1}(r+1)^{r+1}}{(p+r+2)^{p+r+2}} \sum_{i=M+1}^N \|P_i^{III}\|. \tag{12}$$

2 数值实例

例 1: 如图 1 中实线所示的一条 10 次 Bézier 多项式曲线, 用本文的算法一次性地对其降 2 阶后得到 8 次 Bézier 逼近曲线的情形如图 1 中的虚线所示. 图示说明中的 (r, p) 表示降阶逼近曲线在首、末端点对原曲线插值的阶数.

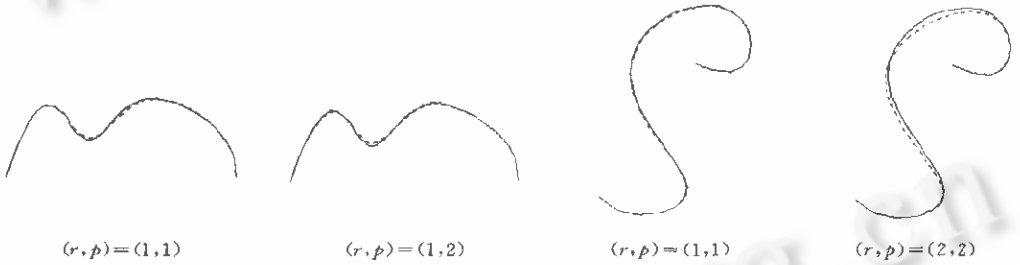


Fig. 1 Reduction from degree 10 (solid) to 8 (dash) Fig. 2 Reduction from degree 15 (solid) to 10 (dash)

图 1 10 次 Bézier 曲线 (实线) 降阶至 8 次 (虚线) 图 2 15 次 Bézier 曲线 (实线) 降阶至 10 次 (虚线)

例 2: 如图 2 中实线所示的一条 15 次 Bézier 多项式曲线, 用本文算法一次性地对其降 5 阶后所得保端点 (r, p) 阶插值的 10 次 Bézier 逼近曲线分别如图 2 中的虚线所示. 将其与分割算法相结合, 获得了快速的误差收敛效果. 表 1 给出了按中点离散法对曲线分割 k 次后在不同端点插值条件下对应的降阶逼近误差.

Table 1 The approximate degree reduced errors of Bézier curve in example 2 after k time subdivision

表 1 例 2 中 Bézier 曲线分割 k 次后的降阶逼近误差

| (r, p) | (0,0) | (1,1) | (2,2) |
|----------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 0.035 955 13 | 0.181 839 51 | 0.875 591 29 |
| 1 | 0.000 344 83 | 0.001 361 15 | 0.005 373 42 |
| 2 | 0.000 000 27 | 0.000 001 07 | 0.000 004 30 |

从以上两例的数值实验结果可见, 本文提出的算法具有很好的逼近效果. 当与分割算法结合时, 降阶逼近误差随着区间的平分以指数收敛, 证明可类似于文献 [8] 而得到, 限于篇幅, 在此不再赘述. 本文的算法误差计算简单且易于实现, 具有快速的收敛效果, 因而可将其广泛地应用于各实际工程系统中.

参考文献

1 Farin G. Degree reduction fairing of cubic B-spline curves. In: Barnhill R E ed. Geometry Processing for Designing and Manufacturing. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 87~99

- 2 Danneberg L, Nowacki H. Approximate conversion of surface representations with polynomial bases. *Computer Aided Geometric Design*, 1985,2(2),123~132
- 3 Hoschek J. Approximation of spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1987,4(1):59~66
- 4 Watkins M, Worsey A. Degree reduction for Bézier curves. *Computer Aided Design*, 1988,20(7):398~405
- 5 Lachance M A. Chebyshev economization for parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 1988,5(3):195~208
- 6 Eck M. Degree reduction of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1993,10(4):237~257
- 7 Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves. *Computer Aided Design*, 1995,27(11):845~851
- 8 何石民, 孙家光, 金彤光 *et al.* Approximate degree reduction of Bézier curves. *Tsinghua Science and Technology*, 1998,3(2):997~1000
- 9 Les Piegl, Wayne Tiller. Algorithm for degree reduction of B-spline curves. *Computer Aided Design*, 1995,27(2):101~110
- 10 Bogacki P, Weinstein S, Xu Y. Degree reduction of Bézier curves by uniform approximation with endpoint interpolation. *Computer Aided Design*, 1995,27(9):651~661
- 11 Fox L, Parker I B. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis. London: Oxford University Press, 1968

Multidegree Reduction of Bézier Curves with Conditions of Endpoint Interpolations

CHEN Guo-dong WANG Guo-jin

(State Key Laboratory of CAD & CG Zhejiang University Hangzhou 310027)

(Department of Mathematics Zhejiang University Hangzhou 310027)

Abstract In this paper, the authors study the multidegree reduction of Bézier curves with arbitrary degree interpolation conditions of two endpoint. For the given endpoint interpolation conditions, a new approximation method of multidegree reduction is presented. Using Chebyshev polynomial approximation theory, the nearly best uniform approximation under the interpolation conditions of endpoints can be obtained. This algorithm is easy to implement and simple for error estimation. The approximation effects of the degree reduction curves are very good. Combined with subdivision algorithm, it can reach a higher rate of error convergence.

Key words Endpoint interpolation, multidegree reduction, approximation, subdivision.