

# 一阶反合一研究\*

许满武 潘光睿 周荣国 宋晓梁 刘东升

(南京大学计算机科学与技术系 南京 210093)  
(南京大学计算机软件新技术国家重点实验室 南京 210093)  
E-mail: mwku@netra.nju.edu.cn

**摘要** 文章讨论一阶反合一问题以及求反合一子完备集的算法. 在合一问题中, 有多种求解合一问题的方法, 其中研究得较为彻底的是用转换规则进行求解的方法. 在研究反合一问题的过程中, 人们也陆续提出了许多转换规则, 这样做的结果是最终给出的是已解出形. 该文在已解出形的基础上讨论一种方法, 以给出具体解的完备集(反合一子完备集). 通过引入  $G_\theta$  和  $Z$  函数, 使求解更为方便、直观.

**关键词** 反合一, 反合一子, 最一般反合一子, 反合一子完备集.

**中图法分类号** TP18

合一是一类重要的计算问题, 它广泛地应用于计算机科学的各个分支领域. 随着研究领域的拓宽, 合一问题的种类也逐渐丰富起来. 其中比较典型的有方程式合一(E-unification)、高阶合一(high-order unification)以及半合一(semi-unification). 总的说来, 在研究这些合一时, 人们主要关心的是“相等”或“弱相等”的问题. 后来, 人们在研究函数式语言的模式匹配时, 需要讨论一些从反例中学习的问题; 在研究重写系统时, 需要讨论有关充分完备性的问题, 等等, 这些都牵涉到了“不等”. 于是人们又把一部分目光由“相等”转向了“不等”, 这就导致了“反合一问题”的研究.

简单说来, 对于合一问题  $\langle s = t \rangle$ , 我们关心的是求合一子  $\theta$ , 使得  $\theta s = \theta t$ ; 而对于反合一问题  $\langle s \neq t \rangle$ , 我们关心的是那些使不等式成立的替换  $\sigma$ , 使得  $\sigma s \neq \sigma t$ .

在对反合一问题进行研究的过程中, 人们不可避免地要参照和借鉴合一问题中的一些概念、方法. 在合一问题中, 有多种求解合一问题的方法, 其中比较典型的是用转换规则进行求解<sup>[1]</sup>. 在研究反合一问题的过程中, 人们也陆续提出了许多转换规则<sup>[2]</sup>, 这样做的结果是最终给出的是已解出形. 而在本文中, 我们关心的是在已解出形的基础上讨论一种方法, 以给出具体解的完备集(反合一子完备集). 通过引入  $G_\theta$  和  $Z$  函数, 使求解更为方便、直观. 在下文展开前, 我们先作一些约定.

在本文中所涉及的项均是一阶项, 合一中的等价关系是指字面等价关系, “ $\neq$ ”是指字面不等价关系.

$Var(\square)$  表示由  $\square$  中所有变量组成的集合, 其中  $\square$  可以是项, 可以是替换, 也可以是  $G_\theta$  和  $Z(s, t)$  (这两个函数将在下文中定义).

以“ $\circ$ ”表示替换的复合运算. 例如,  $\sigma$  和  $\theta$  的复合运算记为  $\sigma \circ \theta$ , 对任意  $t \in T$ ,  $\sigma \circ \theta(t) = \theta(\sigma(t))$ .

其他有关的概念请参考文献[1, 3, 4].

## 1 基本概念

**定义 1.1.** 反合一问题, 反合一子.

\* 本文研究得到国家自然科学基金和国家 863 高科技项目基金资助. 作者许满武, 1944 年生, 博士, 教授, 主要研究领域为计算机软件, 算法理论. 潘光睿, 1972 年生, 硕士, 主要研究领域为计算机软件, 算法理论. 周荣国, 1976 年生, 硕士生, 主要研究领域为计算机软件, 算法理论. 宋晓梁, 1974 年生, 硕士生, 主要研究领域为计算机软件, 算法理论. 刘东升, 1971 年生, 硕士生, 主要研究领域为计算机软件, 算法理论.

本文通讯联系人: 许满武, 南京 210093, 南京大学计算机科学与技术系

本文 1998-04-07 收到原稿, 1998-08-03 收到修改稿

任给项对  $\langle s, t \rangle$ , 问是否存在替换  $\sigma$ , 使得  $\sigma s \neq \sigma t$ , 且对任意的替换  $\delta$  总有  $\sigma \circ \delta(s) \neq \sigma \circ \delta(t)$ . 这就是反合一问题, 记为  $\langle s \neq t \rangle$ . 若存在这样的  $\sigma$ , 则  $\sigma$  称为反合一子.

**定义 1.2.** 最一般反合一子, 最一般反合一子的集合, 反合一子的完备集, 最一般反合一子的完备集.

(1) 对于任意给定的反合一问题  $\langle s \neq t \rangle$ , 其所有反合一子构成的集合记为  $DU(s, t)$ , 在不引起混淆的情况下简记为  $DU$ .

(2)  $MGDU(s, t)$  (简记为  $MGDU$ ) 表示  $\langle s \neq t \rangle$  的最一般反合一子:

若  $\sigma \in DU$ , 则  $\sigma$  是  $MGDU$  当且仅当对于任意  $\theta \in DU$ , 若  $\theta \leq \sigma$ , 则  $\sigma = \theta$  (此处,  $\theta \leq \sigma$ , 是指存在  $\rho$  使得  $\rho \circ \theta = \sigma$ ).

(3)  $cDU$  称为  $\langle s \neq t \rangle$  的反合一子完备集, 满足:

(3.1)  $cDU \subseteq DU$ ;

(3.2) 对任意  $\theta \in DU$ , 存在  $\sigma \in cDU$  使  $\sigma \leq \theta$ .

(4)  $\mu DU$  表示最一般反合一子的集合: 由最一般反合一子构成的集合.

(5)  $\mu cDU$  最一般反合一子的完备集: 既是  $cDU$  又是  $\mu DU$  的集合.

## 2 相关定理

为了便于讨论, 我们在此做一些必要的准备工作.

首先, 由于在讨论替换间的关系以及构造新替换时, 直接使用替换来讨论不如把它先转化为项的形式更为方便, 所以我们将引入一个与某替换  $\theta$  对应的函数  $G_\theta, G_\theta$  “独立于”项集  $T$ . 众所周知, 项集  $T$  是定义在函数集  $F$  和可数变量集  $V$  之上的. 说  $G_\theta$  “独立于”项集  $T$ , 意思是  $G_\theta \notin F$ .

$G_\theta$  与  $\theta$  有如下关系:  $s, t \in T$ ,

$$\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

当  $\theta$  为恒等替换 ( $Id$ ) 时,  $\theta$  对应着  $G_{Id}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

当  $\theta$  形如  $\{t_1/y_1, \dots, t_m/y_m\}$  时,  $\theta$  对应着

$$G_\theta = \theta G_{Id} = G_{Id}(\theta(x_1), \theta(x_2), \dots, \theta(x_n)) = G_\theta(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

其中  $s_i = \theta(x_i)$ .

为了方便, 可将  $G_\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)$  简记为  $G_\theta$ .

当已有  $\theta$  及其所对应的  $G_\theta(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , 在作复合运算  $\theta \circ \rho = \sigma$  时,  $\sigma$  对应着

$$G_\sigma = G_{\theta \circ \rho} = \rho G_\theta = G_\theta(\rho(s_1), \rho(s_2), \dots, \rho(s_n)) = G_\sigma(r_1, r_2, \dots, r_n),$$

其中  $r_i = \rho(s_i)$ .

此外,  $G_\theta(s_1, s_2, \dots, s_n) = G_\sigma(r_1, r_2, \dots, r_n)$  当且仅当  $m = n$  且  $r_i = s_i$ .

其次, 既然讨论替换间的关系, 我们关心的是当不同的替换作用在项对  $\langle s, t \rangle$  上时产生的效果有何不同, 故此, 我们把  $s, t$  作为一个整体来对待, 于是我们引入另一个与  $s, t$  有关的、独立于项集  $T$  的二元函数  $Z(s, t)$ ,  $Z$  的两个变目的位置分别放入  $s$  和  $t$ , 并且对任意替换  $\rho$  有

$$\rho(Z(s, t)) = Z(\rho(s), \rho(t)).$$

此外,  $Z(s_1, t_1) = Z(s_2, t_2)$  当且仅当  $s_1 = s_2$  且  $t_1 = t_2$ . 这样一来, 替换对  $\langle s, t \rangle$  的作用就变成了对项  $Z(s, t)$  的作用, 处理起来更为方便. 需要注意的是, 尽管我们引入了  $G, Z$  两个函数, 但由于它们独立于  $T$ , 所以在下文中,  $G, Z$  不会像  $T$  里的那些函数那样出现在替换里.

至此, 我们的准备工作就完成了. 下面进入相关定理的研究.

**定理 2.1.** 给定项对  $\langle s, t \rangle$ , 若  $\theta$  为  $\langle s, t \rangle$  的合一子,  $\sigma$  为  $\langle s, t \rangle$  的反合一子, 则必有

$$\forall \rho_1, \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t))).$$

证明: 用反证法. 假设存在  $\delta_1, \delta_2$ , 使得

$$\theta \circ \delta_1(Z(s, t)) = \sigma \circ \delta_2(Z(s, t)). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{由式(1)} \quad & \Rightarrow Z(\theta \circ \delta_1(s), \theta \circ \delta_1(t)) = Z(\sigma \circ \delta_2(s), \sigma \circ \delta_2(t)), \\ & \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \theta \circ \delta_1(s) = \sigma \circ \delta_2(s), \\ \theta \circ \delta_1(t) = \sigma \circ \delta_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

由于  $\theta$  为  $\langle s, t \rangle$  的合一子, 故

$$\theta \circ \delta_1(s) = \theta \circ \delta_1(t). \tag{3}$$

由式(2)、(3)得

$$\sigma \circ \delta_2(s) = \sigma \circ \delta_2(t). \tag{4}$$

式(4)与  $\sigma$  为  $\langle s, t \rangle$  的反合一子矛盾. 反证完成. □

**推论 2.2.** 给定项对  $\langle s, t \rangle$ , 若  $\theta$  为  $\langle s, t \rangle$  的最一般合一子(MGU), 则  $\sigma$  为  $\langle s, t \rangle$  的反合一子, 当且仅当  $\forall \rho_1 \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t)))$ .

证明: 先证  $\Rightarrow$ , 这由定理 2.1 可以得到. 再证  $\Leftarrow$ , 用反证法.

假设  $\sigma$  不为  $\langle s, t \rangle$  的反合一子, 则必存在  $\delta$ , 使得  $\sigma \circ \delta(s) = \sigma \circ \delta(t)$ , 即  $\sigma \circ \delta$  是合一子. 由于  $\theta$  为 MGU, 所以存在  $\tau$ , 使得

$$\theta \circ \tau = \sigma \circ \delta,$$

$$\text{即} \quad \theta \circ \tau(Z(s, t)) = \sigma \circ \delta(Z(s, t)),$$

这与  $\forall \rho_1 \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t)))$  矛盾, 故  $\sigma$  为  $\langle s, t \rangle$  的反合一子. □

需要注意的是, 在推论 2.2 的条件中  $\theta$  必须为 MGU, 这要比定理 2.1 的条件严格一些, 否则, 推论 2.2 不成立. 例如, 有项对  $\langle s, t \rangle$ , 其中  $s = x, t = y$ , 还有  $\langle s, t \rangle$  的一个合一子  $\theta = \{g(a)/x, g(a)/y\}$  以及替换  $\sigma = \{h(a)/x, h(a)/y\}$ , 尽管  $\forall \rho_1 \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t)))$ , 但  $\sigma$  却不是反合一子, 它是合一子.

**定理 2.3.** 已知项对  $\langle s, t \rangle$  及其上的两个替换  $\theta$  和  $\sigma$ , 对于任意替换  $\rho_1, \rho_2$ ,

$$\theta \circ \rho_1(Z\langle s, t \rangle) \neq \sigma \circ \rho_2(Z\langle s, t \rangle) \text{ 当且仅当 } \rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma.$$

证明: 先证  $\Rightarrow$ .

$$\text{令} \quad \theta \circ \rho_1 = \tau_1, \quad \sigma \circ \rho_2 = \tau_2,$$

由已知  $\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t))$  可得: 必存在某个  $x_i \in \text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)$ ,

$$\tau_1(x_i) \neq \tau_2(x_i). \tag{5}$$

由式(5)可得  $G_{Id}(\tau_1(x_1), \dots, \tau_1(x_i), \dots, \tau_1(x_n)) \neq G_{Id}(\tau_2(x_1), \dots, \tau_2(x_i), \dots, \tau_2(x_n))$ ,

$$\text{即} \quad G_{\tau_1} \neq G_{\tau_2},$$

$$\text{即} \quad G_{\theta \circ \rho_1} \neq G_{\sigma \circ \rho_2},$$

$$\text{即} \quad \rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma.$$

再证  $\Leftarrow$ .

由已知  $\rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma$  可得

$$G_{Id}(\theta \circ \rho_1(x_1), \dots, \theta \circ \rho_1(x_n)) \neq G_{Id}(\sigma \circ \rho_2(x_1), \dots, \sigma \circ \rho_2(x_n))$$

$$\Rightarrow \text{存在某个 } x_i, \theta \circ \rho_1(x_i) \neq \sigma \circ \rho_2(x_i)$$

$$\Rightarrow \theta \circ \rho_1(s) \neq \sigma \circ \rho_2(s) \text{ 或 } \theta \circ \rho_1(t) \neq \sigma \circ \rho_2(t)$$

$$\Rightarrow \theta \circ \rho_1(Z\langle s, t \rangle) \neq \sigma \circ \rho_2(Z\langle s, t \rangle). \tag{6}$$

□

**定理 2.4.** 已知项对  $\langle s, t \rangle$  及其上的两个替换  $\theta$  和  $\sigma$ ,

$$\forall \rho_1 \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z\langle s, t \rangle) \neq \sigma \circ \rho_2(Z\langle s, t \rangle)) \text{ 当且仅当 } \forall \rho_1 \rho_2 (\rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma).$$

证明: 先证  $\Rightarrow$ , 用反证法. 假设存在  $\tau_1, \tau_2$ , 使得  $\tau_1 G_\theta = \tau_2 G_\sigma$ , 即

$$\theta \circ \tau_1(G_{Id}) = \sigma \circ \tau_2(G_{Id}) \tag{6}$$

由式(6)得: 任给  $x_i \in \text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)$ ,

$$\theta \circ \tau_1(x_i) = \sigma \circ \tau_2(x_i). \tag{7}$$

由式(7)可得

$$\theta \circ \tau_1(s) = \sigma \circ \tau_2(s) \quad (8)$$

和

$$\theta \circ \tau_1(t) = \sigma \circ \tau_2(t), \quad (9)$$

由式(8)、(9)得

$$\theta \circ \tau_1(Z(s, t)) = \sigma \circ \tau_2(Z(s, t)),$$

这与  $\forall \rho_1 \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t)))$  矛盾.

再证  $\Leftarrow$ , 用反证法.

假设存在  $\tau_1, \tau_2$ , 使得  $\theta \circ \tau_1(Z(s, t)) = \sigma \circ \tau_2(Z(s, t))$ , 则任给  $x_i \in \text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)$ ,

$$\theta \circ \tau_1(x_i) = \sigma \circ \tau_2(x_i). \quad (10)$$

由式(10)得

$$\theta \circ (G_{1d}) = \sigma \circ \tau_2(G_{1d}),$$

即

$$\tau_1 G_\theta = \tau_2 G_\sigma,$$

这与  $\forall \rho_1 \rho_2 (\rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma)$  矛盾.

综上所述, 命题成立.  $\square$

**定理 2.5.** 已知项对  $(s, t)$  及其上的两个替换  $\theta$  和  $\sigma$ , 若  $\text{Var}(G_\theta) \cup \text{Var}(G_\sigma) = \emptyset$ , 则  $\forall \rho (\rho G_\theta \neq \rho G_\sigma)$  当且仅当  $\forall \rho_1 \rho_2 (\rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma)$ .

证明: 先证  $\Rightarrow$ , 用反证法.

假设存在  $\tau_1, \tau_2$ , 使得  $\tau_1 G_\theta = \tau_2 G_\sigma$ , 其中  $\tau_1$  形如  $\{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\theta)\}$ ,  $\tau_2$  形如  $\{r_i/y_i | y_i \in \text{Var}(G_\sigma)\}$ , 我们用  $\tau_1, \tau_2$  构造如下替换:

$$\tau'_1 = \tau_1 - \{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\theta)\},$$

$$\tau'_2 = \tau_2 - \{r_i/y_i | y_i \in \text{Var}(G_\sigma)\},$$

$$\tau = \tau'_1 \cup \tau'_2.$$

由于  $\tau_1$  中  $\{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\theta)\}$  对  $G_\theta$  不会起作用; 同样地,  $\tau_2$  中  $\{r_i/y_i | y_i \in \text{Var}(G_\sigma)\}$  对  $G_\sigma$  不会起作用, 所以

$$\tau_1 G_\theta = \tau'_1 G_\theta, \tau_2 G_\sigma = \tau'_2 G_\sigma. \quad (11)$$

又由于  $\text{Var}(G_\theta) \cap \text{Var}(G_\sigma) = \emptyset$ , 所以, 任给  $t_i/x_i \in \tau'_1, x_i \in \text{Var}(G_\sigma)$ . 同样地, 任给  $r_i/y_i \in \tau'_2, y_i \in \text{Var}(G_\theta)$ , 所以,

$$\tau G_\theta = \tau'_1 G_\theta, \tau G_\sigma = \tau'_2 G_\sigma. \quad (12)$$

由式(11)、(12)得

$$\tau G_\theta = \tau'_1 G_\theta = \tau_1 G_\theta, \tau G_\sigma = \tau'_2 G_\sigma = \tau_2 G_\sigma. \quad (13)$$

由式(13)和反证假设得

$$\tau G_\theta = \tau G_\sigma,$$

这与  $\forall \rho (\rho G_\theta \neq \rho G_\sigma)$  矛盾.

再证  $\Leftarrow$ , 用反证法. 假设存在  $\rho$  使得  $\rho G_\theta = \rho G_\sigma$ , 其中  $\rho$  形如  $\{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\theta)\}$ , 我们构造如下替换:

$$\rho_1 = \rho - \{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\theta)\},$$

$$\rho_2 = \rho - \{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\sigma)\}.$$

由于  $\{t_i/x_i | x_i \in \text{Var}(G_\sigma)\}$  在替换中对  $G_\theta$  不起作用, 故

$$\rho G_\theta = \rho_1 G_\theta. \quad (14)$$

同理

$$\rho G_\sigma = \rho_2 G_\sigma. \quad (15)$$

由式(14)、(15)可得

$$\rho_1 G_\theta = \rho_2 G_\sigma,$$

这与  $\forall \rho_1 \rho_2 (\rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma)$  矛盾.

综上所述,定理成立. □

**定理 2.6.** 已知项对  $\langle s, t \rangle$  及其最一般合一子  $\theta$ , 函数集中至少含有 1 个元数大于等于 1 的函数. 若存在  $r/x \in \theta, r \in T$  且  $r$  中含有不同于  $x$  的变量(比如说是  $y$ ), 则  $\langle s, t \rangle$  必有无穷多个最一般反合一子.

证明: 由已知, 存在  $f \in F, \text{arity}(f) = k (k \geq 1)$ ,

$$r/x \in \theta, y \in \text{Var}(r).$$

我们构造如下一系列替换:

$$\rho = \underbrace{\{f(y, \dots, y)/y\}}_k,$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = (\theta - \{r/x\}) \cup \{s_1/x\}, \text{其中 } s_1 = \rho(r); \\ \sigma_2 = (\sigma_1 - \{s_1/x\}) \cup \{s_2/x\}, \text{其中 } s_2 = \rho(s_1); \\ \sigma_{i+1} = (\sigma_i - \{s_i/x\}) \cup \{s_{i+1}/x\}, \text{其中 } s_{i+1} = \rho(s_i). \end{cases}$$

不难验证, 诸  $\sigma_i$  都是反合一子, 且诸  $\sigma_i$  之间(即  $\sigma_i$  与  $\sigma_j (i \neq j)$  之间)不存在  $\sigma_i \leq \sigma_j$  或  $\sigma_j \leq \sigma_i$  的关系. 利用诸  $\sigma_i$  之间在  $x$  处的替换的模式不同, 可以构造出不同的最一般反合一子, 此处不再赘述. 由于  $\sigma_i$  的构造过程可无限递推下去, 故  $\langle s, t \rangle$  的最一般反合一子有无穷多个.

**推论 2.7.** 已知项对  $\langle s, t \rangle$ , 函数集  $F$  中不含零元函数, 但至少含有 1 个元数大于等于 1 的函数. 若  $\langle s, t \rangle$  仅有唯一的最一般反合一子  $\sigma$ , 则  $\sigma$  必为恒等替换.

证明: 假设  $\sigma$  不为恒等替换, 则  $\langle s, t \rangle$  必存在最一般合一子  $\theta$  (因为  $\langle s, t \rangle$  不存在最一般合一子当且仅当最一般反合一子为恒等替换). 又由于  $F$  中不含零元函数, 故存在  $r/x \in \theta, r$  中含有不同于  $x$  的变量  $y, y \in \text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)$ . 由定理 1.6 可知,  $\langle s, t \rangle$  必有无穷多个最一般反合一子, 这与已知条件中的  $\langle s, t \rangle$  仅有唯一的最一般反合一子  $\sigma$  矛盾. 故  $\sigma$  只能是恒等替换. □

注意,  $F$  中不能含有零元函数, 否则定理不成立. 如, 已知  $\langle s, t \rangle, s = x, t = a, F = \{f, a\}, \text{arity}(f) = 1, \text{arity}(a) = 0$ , 通过观察可知  $\langle x, a \rangle$  的最一般反合一子唯一, 为  $\sigma = \{f(x)/x\}$ , 而非恒等替换  $\rho = \{x/x\}$ .

### 3 进一步讨论

下面我们将利用前面的结果来求反合一子的完备集. 由推论 2.2 可知反合一子  $\sigma$  与最一般合一子  $\theta$  的关系, 即

$$\forall \rho_1, \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t))).$$

其中  $\theta$  是可求的, 现在要求的是  $\sigma$ . 可是  $\rho_1, \rho_2$  都是任意的, 不等式两边都不确定, 如何去求  $\sigma$  并保证尽管  $\rho_1, \rho_2$  随意变动而不等式又始终成立呢?

由于在前文我们引入了与  $\theta$  对应的函数  $G_\theta$ , 再由定理 2.3 和定理 2.4, 我们可以把  $\theta$  与  $\sigma$  的关系转化成  $G_\theta$  与  $G_\sigma$  的关系. 这样一来, 我们希望通过构造  $G_\sigma$ , 使得  $\forall \rho_1, \rho_2 (\rho_1(i_0) \neq \rho_2(i_0))$ , 也就使得  $\forall \rho_1, \rho_2 (\theta \circ \rho_1(Z(s, t)) \neq \sigma \circ \rho_2(Z(s, t)))$ , 从而得到与  $G_\sigma$  对应的  $\sigma, \sigma$  就是反合一子.

下面通过一个小小的转化来摆脱  $\rho_1$  和  $\rho_2$  随意变动所带来的不便.

考察一下合一子就可以看出, 最一般合一子  $\theta$  相当于一个模式, 其他的合一子只是在其上作某种代入罢了. 假如我们能找到另一些完全不同于最一般合一子  $\theta$  模式的替换, 则这些替换必为反合一子, 这也正是定理 2.1 和推论 2.2 的含义.

既然最一般合一子  $\theta$  是一种模式, 我们就把它对应的  $G_\theta$  中的所有变量改写成一些完全不同于项集  $T$  的符号系统  $S$  的符号. 如,  $S$  中含有变量  $\nabla, \diamond$ , 我们可以把  $G_\theta(f(x), y)$  改写成  $G_\theta(f(\nabla), \diamond)$ , 而在构造其他替换  $\sigma$  所对应的  $G_\sigma$  时仍用项集  $T$  的符号系统. 这样一来,  $\text{Var}(G_\theta) \cap \text{Var}(G_\sigma) = \emptyset$ .

我们只要使  $G_\sigma$  与  $G_\theta$  不能合一(合一过程是在符号系统  $T \cup S$  下进行的), 借助于定理 2.5 可得  $\forall \rho_1, \rho_2 (\rho_1 G_\theta \neq \rho_2 G_\sigma)$ . 这样,  $\rho_1$  和  $\rho_2$  随意变动所带来的问题就解决了. 至此, 构造  $G_\sigma$  只找到了排列的方法, 即在  $G_\theta$  的所有位置代入项的所有可能情形, 并与  $G_\theta$  进行合一检测, 留下与  $G_\theta$  不可合一的  $G_\sigma$ , 所有对应的  $\sigma$  就构成反合一子的完

备集.

#### 4 结束语

本文是以一阶项和字面合一为基础来讨论反合一问题的,至于以高阶项和方程式合一为基础来探讨反合一还是相当复杂的,有关这类问题,我们将在以后的工作中进一步去探索.

#### 参考文献

- 1 Gallier Jean H, Snyder Wayne. Complete sets of transformations for general E-unification. *Theorem Computer Science*, 1989, 67:203~260
- 2 Comon Hubert, Lescanne Pierre. Equational problems and disunification. *Journal of Symbolic Computation*, 1989, 7 (3&4):371~425
- 3 Siekmann Jörg. Unification theory. *Journal of Symbolic Computation*. 1989, 7(3&4):207~274
- 4 Mitchell John C. Foundations for programming languages. Cambridge, MA: MIT Press, 1996

#### First-Order Disunification

XU Man-wu PAN Guang-rui ZHOU Rong-guo SONG Xiao-liang LIU Dong-sheng

(*Department of Computer Science and Technology Nanjing University Nanjing 210093*)

(*State Key Laboratory for Novel Software Technology Nanjing University Nanjing 210093*)

**Abstract** In this paper, the authors discuss the first-order disunification and the algorithm for computing the complete set of disunifiers. There are many methods for solving unification problem, the method by using translation rules has been thoroughly studied. Many translation rules are also given out in the study of disunification problem. By using translation rules, people usually get some solved forms for the problem. In this paper, the authors are concerted with the method for giving out the complete set of disunifiers based on solved forms. The method becomes more convenient and direct by using functions  $G_\sigma$  and  $Z$ .

**Key words** Disunification, disunifier, most general disunifier, complete set of disunifiers.