第10卷第3期 软件学报 Vol. 10, No. 3
1999年3月 JOURNAL OF SOFTWARE Mar. 1999

三阶 Bézier 曲线的三类节点缩减算子*

曹 锋 张克君

（北京大学计算机科学技术研究所文字信息处理技术国家重点实验室 北京 100871）

摘要 研究曲线拟合和编辑中的分段 Bézier 曲线的简化问题. 定义了3类 Bézier 曲线的节点缩减算子以及基于其上的算法. 实现了分段曲线的最简 Bézier 表示，并给出严格的数学证明. 上述方法已被应用到所开发的软件中.

关键词 Bézier 曲线，曲线延展，节点，缩减算子，最简 Bézier 表示.

中图法分类号 TP391

随着计算机辅助图形设计的迅速发展，人们经常需要将大量的图像数据转化为图形数据，以便于修改与操作. 字模图像经扫描后转成 TrueType 字形，广告设计中草稿的图形化处理等就是应用的实例. 图形化处理中最关键的技术就是曲线追踪与最佳拟合. 就面向出版方面的应用来说，由于目前国际出版界的标准 PostScript 支持三次 Bézier 曲线，经常需要利用三次 Bézier 曲线来拟合所获得的图像数据，因此，怎样用尽量少的点尽量精确地拟合就成了核心问题. 在一般的图形设计与编辑中，也大多利用三次 Bézier 曲线来表示，如果所用的 Bézier 曲线有太多的控制点，将会有极大的不便. 本文给出了3类 Bézier 曲线节点缩减算子，高效地实现了 Bézier 曲线的简化. 在方正底纹辅助设计系统中，我们应用了这些技术，取得了比国外同类软件更好的效果.

1 一些概念与记号

我们将要研究的是平面上的三次 Bézier 曲线段(对于更高次的 Bézier 曲线，可将其转化为三次 Bézier 曲线段[1]). 关于 Bézier 曲线的一般性质可参阅文献[2,3]. 它可以用4个点加以表示. 我们以 p_0,p_1,p_2,p_3 来标记，其中 p_0 为起始点，p_3 为终止点，p_1,p_2 为控制点，p_0,p_3 又称为节点. 它的参数方程为

$$C(t)=(1-t)^3\cdot p_0+3(1-t)^2\cdot t\cdot p_1+3(1-t)\cdot t^2\cdot p_2+t^3\cdot p_3\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

从而集合 $B_1=\{b=(p_0,p_1,p_2,p_3)\mid p_0,p_1,p_2,p_3\in R^2\}$ 表示了平面上所有的三次 Bézier 曲线段.

为了方便论述，在本文的某些地方采用了C语言的记号“.”来表示 Bézier 曲线段中的节点. 例如，如果 b 为 Bézier 曲线段，即 $b\in B_1$，则 $b.p_0$，表示 b 的初始点，$b.p_1$ 表示 b 的第1个控制点，其余类推. 另外，对于 Bézier 曲线段 $b(p_0,p_1,p_2,p_3)$，在不引起歧义的情况下，为简单起见，用 $\overline{p_0p_3}$ 来表示；在可能引起歧义的情况下，用 $\overline{p_0p_1p_2p_3}$ 来表示.

集合 $B_k=\{b^k=(b_1,b_2,\ldots,b_k)\mid b_i\in B_1(i=0,\ldots,k)$ 且 $b_i.p_3=b_{i+1}.p_0(i=0,\ldots,k-1)\}$ 称为 k 段连续 Bézier 曲线. $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$ 为平面上所有分段 Bézier 曲线的集合，本文的论述都排除 Bézier 曲线的退化情形，即4个控制节点共线的情况.

定义 1.1. Bézier 曲线段的延展

如果 $b_1,b_2\in B_1$，且 b_1 为 b_2 的一部分，则称 b_2 为 b_1 的延展. 如果还满足

(1) $b_1.p_0=b_2.p_0$，即 b_1,b_2 有共同的始点，则称 b_2 为 b_1 的正向延展.

---

* 作者曹锋，1971年生，博士，主要研究领域为彩色系统图形图像处理. 张克君，1971年生，博士生，主要研究领域为多媒体系统.

本文通讯联系人：曹锋，北京 100871，北京大学计算机科学技术研究所

本文 1997-10-16 收到原稿，1998-03-03 收到修改稿

(2) $b_1.p_3=b_2.p_3$,即 b_1,b_2 有共同的终点,则称 b_2 为 b_1 的负向延展.

2 数学基础

定理 2.1. 延展基本定理

若 $b_1,b_2\in B_1$,则 b_2 为 b_1 的正向延展的充分必要条件为:存在 $k\in(0,1]$,使得(这里,我们记 $b_1=(p_0,p_1,p_2,p_3),b_2=(p'_0,p'_1,p'_2,p'_3)$).

(1) $p'_0=p_0$;

(2) $-p'_0+p'_1=\frac{1}{k}(-p_0+p_1)$;

(3) $p'_0-2p'_1+p'_2=\frac{1}{k^2}(p_0-2p_1+p_2)$;

(4) $-p'_0+3p'_1-3p'_2+p'_3=\frac{1}{k^3}(-p_0+3p_1-3p_2+p_3)$.

证明:(1) 充分条件.如果 b_1,b_2 的控制节点满足上述 4 个条件,则对于 b_1 上的每一个点 $t=t_0$,

$$C_{b_1}(t_0)=(1-t_0)^3\cdot p_0+3(1-t_0)^2\cdot t_0\cdot p_1+3(1-t_0)\cdot t_0^2\cdot p_2+t_0^3\cdot p_3,$$

我们均能找到 b_2 上的点,参数 $t=kt_0$ 与之对应.

$$C_{b_2}(kt_0)=(1-kt_0)^3\cdot p'_0+3(1-kt_0)^2\cdot kt_0\cdot p'_1+3(1-kt_0)\cdot k^2t_0^2\cdot p'_2+k^3t_0^3\cdot p'_3.$$

容易验证,$C_{b_2}(kt_0)=C_{b_1}(t_0)$,故 Bézier 曲线段 b_1 为 b_2 的一部分,且条件 1 满足,故 b_2 为 b_1 的正向延展.

(2) 必要条件.按照定义,如果 b_2 为 b_1 的正向延展,即为曲线段的一部分.设 b_1 的终止点 p_3 在 Bézier 曲线段 b_2 上的参数为 k,则可得 b_1 的参数方程为

$$C_{b_1}=(1-kt)^3\cdot p'_0+3(1-kt)^2kt\cdot p'_1+3(1-kt)\cdot k^2t^2\cdot p'_2+k^3t^3\cdot p'_3.$$
$$=(1-t)^3p_0+3(1-t)^2tp_1+3(1-t)\cdot t^2p_2+t^3p_3.$$

比较 t,t^2,t^3 的系数和常数即可知条件(1)~(4)成立. □

定义 2.1. 如果 b_2 为 b_1 的正向延展,且定理 2.1 中的 k 值为 t_0,则称 b_2 为 b_1 的 t_0 正向延展.

为了表述方便,我们定义从 Bézier 曲线段 B_1 到平面的 4 个算子 D_0,D_1,D_2,D_3,设 $b(p_0,p_1,p_2,p_3)\in B_1$,如果定义

$D_0(b)=p_0$;

$D_1(b)=-p_0+p_1$;

$D_2(b)=p_0-2p_1+p_2$,

$D_3(b)=-p_0+3p_1-3p_2+p_3$.

那么,定理 1 可简单地描述为:$b_1,b_2\in B_1$,则 b_2 为 b_1 的正延伸的充要条件是:存在 $k\in(0,1]$,使得

$$D_0(b_2)=D_0(b_1),\ D_1(b_2)=\frac{1}{k}D_1(b_1),\ D_2(b_2)=\frac{1}{k^2}D_2(b_1),\ D_3(b_2)=\frac{1}{k^3}D_3(b_1).$$

命题 2.1. 若 $b_{k_1},b_{k_2},b\in B_1$,且 b_{k_1} 为 b 的 k_1 正向延展,b_{k_2} 为 b 的 k_2 正向延展,且 $k_1>k_2$,则 b_{k_2} 为 b_{k_1} 的 k_2/k_1 正向延展(由定理 2.1,易证).

命题 2.1 表明,Bézier 曲线段的延展方向是唯一的,不会出现如图 1 所示的现象.

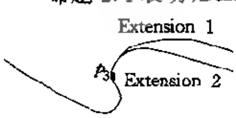

图1

定义 2.2. 曲线段 $b^+=\lim_{k\to 0}b_k^+$(其中 b_k^+ 为 Bézier 曲线段 b 的 k 正向延展)称为 b 的完全正向延展曲线.

推论 2.1. b^+ 上的任一有限连续曲线段均为三次 Bézier 曲线.

对于上面的任一有限连续曲线段 c,取足够小的 k,使得 $c\subseteq b_k$,由于 b_k 为三次 Bézier 曲线,故 c 亦为 Bézier 曲线.

定义 2.3. 若 $b_1,b_2\in B_1$,且均为平面上某一完全正向延展曲线的一部分,则称 b_1,b_2 为同胞.同胞关系为等价关系,由定义可知,同胞关系满足反身性和对称性.下面验证同胞关系的传递性.

命题 2.2. 同胞关系为等价关系.

下面只需证明同胞关系满足递推性即可. 假设 b_1,b_2 为同胞，b_2,b_3 为同胞. 由同胞关系的定义，b_1,b_2 均在一完全正向延展曲线(设为 C_1^+)上. 显然从 b_1 起点(或终点)开始的 C_1^+ 正向部分即为 b_1^+(如图 2 所示). 同理，从 b_2 的起点(或终点)开始的 C_1^+ 那部分曲线即为 b_2^+，由于 b_1^+,b_2^+ 均为 C_1^+ 的一部分，且 b_1^+,b_2^+ 均沿 C_1^+ 无限延伸，故我们有 $b_1^+\subseteq b_2^+$ 或 $b_2^+\subseteq b_1^+$. 对于 b_2^+,b_3^+，我们也有同样结果，即 $b_2^+\subseteq b_3^+$ 或 $b_3^+\subseteq b_2^+$. 从而总共可能有下列 4 种情形：

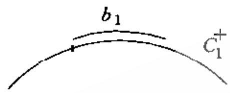

图2

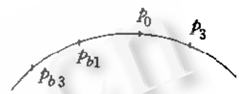

图3

(1) $b_1^+\subseteq b_2^+,b_2^+\subseteq b_3^+$，则 $b_1^+\subseteq b_2^+\subseteq b_3^+,b_1^+\subseteq b_3^+$，从而 b_1，b_3 均为 b_3^+ 中的一部分，b_1,b_3 为同胞.

(2) $b_2^+\subseteq b_1^+,b_3^+\subseteq b_2^+$，则 $b_3^+\subseteq b_1^+$，同(1)，我们有 b_1,b_3 为同胞.

(3) $b_1^+\subseteq b_2^+,b_3^+\subseteq b_2^+$，则 b_1^+,b_3^+ 均为 b_2^+ 的一部分，从而 b_1,b_3 均为 b_2^+ 的一部分，b_1,b_3 为同胞.

(4) $b_2^+\subseteq b_1^+,b_2^+\subseteq b_3^+$，如果 $b_1^+\subseteq b_3^+$，或 $b_3^+\subseteq b_1^+$，则 b_1,b_3 为同胞，下面证明必然有 $b_1^+\subseteq b_3^+$ 或 $b_3^+\subseteq b_1^+$. 假设 $b_1^+\not\subset b_3^+$ 且 $b_3^+\not\subset b_1^+$，由于 b_2^+ 为 b_1^+ 与 b_3^+ 的共同部分，则记 $b_2=b_2(p_0,p_1,p_2,p_3)$，记 b_1^+ 的起点为 p_{b_1}，记 b_3^+ 的起点为 p_{b_3}，如图 3 所示.

由此可知，$\overline{p_3p_{b_1}}$ 为 $\overline{p_3p_0}$ 的正向延展，$\overline{p_3p_{b_3}}$ 亦为 $\overline{p_3p_0}$ 的正向延展. 由命题 2.1 可知，或者 $\overline{p_3p_{b_1}}$ 为 $\overline{p_3p_{b_3}}$ 的延展，或者 $\overline{p_3p_{b_3}}$ 为 $\overline{p_3p_{b_1}}$ 的延展. 与所假设的 $b_1^-\not\subset b_3^+$ 且 $b_3^+\not\subset b_1^+$ 矛盾. □

3　第 1 类节点缩减算子及算法

3.1　第 1 类节点缩减算子 N_1(精确节点缩减算子)

我们定义 B_2 上的第 1 类节点缩减算子 N_1 如下，对 B_2 上的分段 Bézier 曲线(b_1,b_2)，其中 $b_1,b_2\in B_1$，

(1) 如果 $b_1.p_3=b_2.p_0$，b_1,b_2 为同胞，且 b_1 与 b_2 在点 $b_1.p_3$ 的两侧，则 $N(b_1,b_2)=\overline{b_1.p_0b_2.p_3}$，其中 Bézier 曲线段 $\overline{b_1.p_0b_2.p_3}$ 为 b_1^+ 上 $b_1.p_0$ 至 $b_2.p_3$ 的那一部分，此时称(b_1,b_2)可 N_1 合并.

(2) 否则，$N_1(b_1,b_2)=(b_1,b_2)$.

3.2　基于结点缩减算子的 Bézier 曲线段简化算法

对属于 B_k 中的 k 段 Bézier 曲线$(b_1,b_2,...,b_k)$，置 $Result\in B$ 为空，变量 $CurB$ 为当前 Bézier 曲线段，算法描述如下：

(1) 置 $CurB=b_1,i=2$.

(2) 如果 $i>k$，转(4).

(3) 将节点缩减算子 N_1 应用到$(CurB,b_i)$上.

　(a) 如果 $N_1(CurB,b_i)=(CurB,b_i)$，则将 Bézier 曲线段 $CurB$ 添加至 $Result$ 中，并置 $CurB=b_i,i++$；转至(2).

　(b) 否则，$N_1(CurB,b_i)$可约减为 Bézier 曲线段 b，则置 $CurB=b,i++$；转(2).

(4) 结束，$(b_1,b_2,...,b_k)$的约简结果存储于 $Result$ 中.

定理 3.2.1. 对任意 $b\in B_k$，经过上述算法简化后的分段 Bézier 曲线的节点数最少.

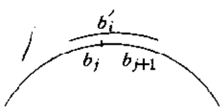

图4

证明：(反证法)设 $Result(b_1,b_2,...,b_n)$为上述算法所得结果，如果存在另一种分段 Bézier 曲线表示$(b'_1,b'_2,...,b'_k)$，其段数 $k<n$.

由于 $Result(b_1,b_2,...,b_n)$为上述算法的结果，b_i,b_{i+1}不可能成为某一 Bézier 曲线的相邻两段，否则将会被算法第(3)步所合并.

由于 $k<n$，则至少有一段 Bézier 曲线 $b'_i(i\leqslant k)$跨越了 $Result$ 中的节点 b_j 的终点. 如图 4 所示，我们有 $\overline{b'_i.p_0b_j.p_3}$ 与 b_j 为同胞，$\overline{b'_i.p_0b_j.p_3}$ 为 b'_i 的同胞(b'_i 为 $\overline{b'_i.p_0b_j.p_3}$ 的延

展), b'_i 与 $\overline{b_{j+1}.\,p_0b'_i.\,p_3}$ 为同胞, $\overline{b_{j+1}.\,p_0b'_i.\,p_3}$ 与 b_{j+1} 为同胞.

从而由同胞关系的递推性可知, b_j 与 b_{j+1} 为同胞, 且 b_j, b_{j+1} 在节点 $b_j.\,p_3$ 的两侧, 故 (b_j, b_{j+1}) 可被节点缩减算子约简, 与 $Result(b_1, \ldots, b_n)$ 为算法 N_1 的结果相矛盾.

由定理 3.2.1, 对任意分段 Bézier 曲线, 我们可以利用算法求得最简的分段表示.

3.3 B_2 上的 N_1 算子的具体实现

对 B_2 上的曲线段 (b_1, b_2), 设 $b_1(p_0, p_1, p_2, p_3)$, $b_2(p_3, p_4, p_5, p_6)$, 如果 b_1, b_2 可以 N_1 合并, 则由定义, $p_6 \in b_1^+$, $\overline{p_0p_6}$ 为 $\overline{p_0p_3}$ 的正向延展.

设 $\overline{p_0p_6}$ 为 $\overline{p_0p_3}$ 的 $1/k$ 正向延展, 则由定理 1 可知, k 满足

$$(-p_0+3p_1-3p_2+p_3)\cdot k^3+(3p_0-6p_1+3p_2)\cdot k^2+(-3p_0+3p_1)\cdot k+p_0-p_6=0.$$

取方程的 x 方向投影, 由卡当公式可求得 k. 验证上式的 y 方向投影, 若不满足方程, 则 (b_1, b_2) 不可 N_1 合并, 即 $N_1(b_1, b_2)=(b_1, b_2)$. 若满足方程, 则表示 p_6 在 $\overline{p_0p_3}$ 的完全正向延展线 b_1^+ 上, 求得 b_1^+ 上 Bézier 曲线段 $\overline{p_3p_6}$ 的控制点 p'_4, p'_5.

如果 $p_4=p'_4$, $p_5=p'_5$, 则 $N_1(b_1, b_2)=\overline{p_3p_6}$. 否则, $N_1(b_1, b_2)=(b_1, b_2)$.

至此, 我们完整地给出了 Bézier 曲线的最优简化算法.

4 第 2、3 类节点缩减算子

在实际应用中, 节点缩减算子 N_1 有着很大的局限性, 我们需要引入带误差的节点缩减算子.

4.1 第 2 类节点缩减算子 N_2^δ

对给定误差 $\delta>0$, 对于 $(b_1, b_2)\in B_2$, 设 $b_1(p_0, p_1, p_2, p_3)$, $b_2(p_3, p_4, p_5, p_6)$, 由三次方程求出 k 值

$$\lfloor(-p_0+3p_1-3p_2+p_3)\cdot k^3+(3p_0-6p_1+3p_2)\cdot k^2+(-3p_0+3p_1)\cdot k+p_0-p_6\rfloor_x=0.$$

若 k 值之一满足

$$\|(-p_0+3p_1-3p_2+p_3)\cdot k^3+(3p_0-6p_1+3p_2)\cdot k^2+(-3p_0+3p_1)\cdot k+p_0-p_6\|<\delta,$$

其中 $\|p\|$ 表示点 p 到原点的距离, 且设 b_1 的 k 正向延展为 b^+, 终点为 p'_6, 曲线 b^+ 的 $\overline{p_0p'_6}$ 部分 (设为 b) 的控制点为 p'_4, p'_5. 如果 $\|p_4-p'_4\|<\delta$, $\|p_5-p'_5\|<\delta$, 则 $N_2^\delta(b_1, b_2)=b$. 否则, $N_2^\delta(b_1, b_2)=(b_1, b_2)$.

第 2 类算子 N_2^δ 可说是 N_1 的实际应用中的变体. 在实际应用中, 特别是对 Bézier 曲线的交互编辑中, 还需要保证在曲线光滑的情况下强行缩减节点. 对于此类要求, 我们给出了第 3 类节点缩减算子.

4.2 第 3 类节点缩减算子 N_3

对于 $(b_1, b_2)\in B_2$, 我们定义算子 N_3, 设 $b_1=b_1(p_0, p_1, p_2, p_3)$, $b_2=b_2(p_3, p_4, p_5, p_6)$.

(1) 若存在 Bézier 曲线段 b, 且起点为 p_0, 终点为 p_6, 且与 (b_1, b_2) 在 p_0, p_6, 处有相同的单位切矢与曲率, 则 $N_3(b_1, b_2)=b$.

(2) 否则, $N_3(b_1, b_2)=(b_1, b_2)$.

下面讨论算子 N_3 的具体实现.

记 $C_1=\frac{2}{3}(\overrightarrow{p_0p_1}\times\overrightarrow{p_1p_2})/|\overrightarrow{p_0p_1}|^3$ 为 b_1 在起点 p_0 的曲率, $C_2=\frac{2}{3}(\overrightarrow{p_6p_5}\times\overrightarrow{p_5p_4})/|\overrightarrow{p_3p_6}|^3$ 为 b_2 在终点 p_6 的曲率.

令向量 $\overrightarrow{D_1}=\frac{\overrightarrow{p_0p_1}}{|\overrightarrow{p_0p_1}|}$, $\overrightarrow{D_2}=\frac{\overrightarrow{p_6p_5}}{|\overrightarrow{p_6p_5}|}$. 若存在 $b\in B_1$, 使得 $N_3(b_1, b_2)=b$, 则设 b 的两个控制点为 p'_1, p'_2. 由 N_3 定义, 可假设

$$\begin{cases} p'_1=p_0+L_1*\overrightarrow{D_1} & (L_1\geqslant 0)\\ p'_2=p_6+L_2*\overrightarrow{D_2} & (L_2\geqslant 0)\end{cases} \tag{1}$$

由曲率相等, 我们有

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_1} \times (\overrightarrow{p_0 p_3} + L_2 * \overrightarrow{D_2}) = \frac{3}{2} C_1 L_1^2 \\ \overrightarrow{D_2} \times (\overrightarrow{p_3 p_1} + L_1 * \overrightarrow{D_1}) = \frac{3}{2} C_2 L_2^2 \end{cases} \tag{2}$$

此方程组可化为一个四次方程求解. 若存在正实根 $L_1 \geqslant 0, L_2 \geqslant 0$，则 $N_3(b_1, b_2) = b$(b 的控制点可由式(1)求得)，否则，$N_3(b_1, b_2) = (b_1, b_2)$.

将 N_2^a 或 N_3 替换算法 N_1，就得到了基于 N_2^a 或 N_3 的节点缩减算法.

5　结　论

针对实际应用中对分段 Bézier 化简的需要，我们给出了 3 类 Bézier 曲线的节点缩减算子以及基于这 3 类算子的算法. 对于基于 N_1 算子的算法，我们证明了经它化简后的分段 Bézier 曲线为最简的 Bézier 曲线表达，为便于实用，我们给出了 N_1 的修正算子 N_2^a 以及强行缩减算子 N_3. 在实际应用中取得了很好的效果.

参考文献

1　Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves. Computer Aided Design, 1995, 27(11): 845～851

2　唐荣锡，汪嘉业，彭群生. 计算机图形学教程. 北京：科学出版社，1994
(Tang Rong-xi, Wang Jia-ye, Peng Qun-sheng. A Course on Computer Graphics. Beijing: Science Press, 1994)

3　孙家广，杨长贵. 计算机图形学(第 2 版). 北京：清华大学出版社，1996
(Sun Jia-guang, Yang Chang-gui. Computer Graphics (2nd ed.). Beijing: Tsinghua University Press, 1996)

Three Kinds of Node-reduce Operator on 3rd Order Bézier Curve

CAO Feng　ZHANG Ke-jun

(National Key Laboratory of Text Processing　Institute of Computer Science and Technology
Beijing University　Beijing　100871)

Abstract　The simplification of Bézier curves in fitting and editing is discussed, three kinds of node-reduce operators are defined, and the algorithms based on them are given in this paper. The simplest Bézier expression can be gotten through the algorithms, and a strict proof is given. These algorithms have been already used in the developing software.

Key words　Bézier curve, extension of curves, node, node-reduce operator, simplest Bézier expression.