

# 隐函数的布尔操作\*

余正生 彭群生 马利庄

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

**摘要** 若隐函数曲面由等式  $f(x, y, z) = 0$  定义, 则其相对应的实体满足不等式  $f(x, y, z) \geq 0$ , 对这种实体的并、交、差等布尔操作采用 R-函数来实现. 特别地, 由 Metaball 定义的隐函数, 除具有隐函数的一般性质外, 还可用于实体造型中的过渡及变形控制等. 证明了用 R-函数实现实体的布尔操作的可行性及 Metaball 模型在几何造型中能光滑过渡等性质.

**关键词** 隐函数曲面, 布尔操作, R-函数, Metaball, 过渡.

**中图法分类号** TP391

实体的布尔操作是任何实体造型系统中必不可少的组成部分, 物体之间的布尔操作指的是并、交、差等过渡运算.<sup>[1]</sup>在许多算法中, 布尔操作都提供一种方法来描述对应用对象的物理处理过程. 例如, 一个用于验证数控机床刀具状况的算法, 可用集合运算来表示各种机械加工操作的执行结果, 或者确定刀具和夹具之间的碰撞. 用于边界表示的布尔算法总是困扰在两类问题上<sup>[1]</sup>, 首先, 为有效地执行布尔操作, 布尔算法必须处理各种可能的几何求交问题, 如出现在两个实体的面、边、顶点之间的求交情况, 要对所有情况作恰当的处理, 对很细微的情况进行分析; 其次, 许多特殊情况的分析必须基于许多, 诸如: 重叠、共面、求交等情况的检查, 而当这些工作出现数值错误时很难得到稳定的效果.

在实体造型中, 隐函数的布尔操作能避免以上用于边界表示的布尔算法所遇到的麻烦. 在数学和计算机科学中, 通常用隐函数来定义几何物体<sup>[2,3]</sup>, 不等式  $f(x, y, z) \geq 0$  描述 3D 欧氏空间中半空间(即实体),  $f(x, y, z) = 0$  为定义该半空间的边界(即隐式曲面)的表达式, 这种表示实体的方法在实体造型、计算几何、动画、数据处理及体图形等有实用价值. 在实体造型中, 隐函数可分为 3 类<sup>[2]</sup>: 代数隐函数、Metaball 模型及函数表示的隐函数(这里主要指 R 函数). 用上述不等式定义的半空间作为基本体素而用于结构实体造型(CSG), 复杂物体可通过基本体素的并、交、差等布尔操作来构造, 这些布尔操作用 R 函数来表示.<sup>[2,4]</sup>

较典型的隐函数是 Metaball 模型<sup>[5]</sup>, 它是基于势能场的随距离衰减的函数, 在实体造型中可用它来构造物体之间的光滑过渡及交互控制物体的变形.

正因为隐函数具有上述参数函数无法比拟的优点, 故它常见于商品化软件中, 成为物体几何造型及绘制的重要工具之一.

本文研究了 Metaball 模型的过渡、交互变形设计的特性, 并给出了 Metaball 模型在几何造型中能保持  $G^1$  连续的证明, 证明了 R-函数实现实体的布尔操作的可行性. 本文第 1 节介绍隐函数的基本性质, 第 2 节介绍隐函数在实体造型的并、交、差操作, 第 3 节为 Metaball 模型的 blend 操作, 第 4 节是实例与讨论, 第 5 节是结论.

## 1 隐函数的基本性质

**定义.** 在  $E^3$  欧氏空间, 由不等式  $f(x, y, z) \geq 0$  定义的点集称为几何物体的函数表示, 由等式  $f(x, y, z) = 0$  定义的曲面(几何物体的边界)为隐式曲面.

因此, 隐函数具有以下基本性质.

设  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , 若  $\vec{X}$  在上述几何物体的内部, 则  $f(\vec{X}) > 0$ ; 若  $\vec{X}$  在它的边界, 则  $f(\vec{X}) = 0$ ; 若  $\vec{X}$  在它的外部, 则

\* 本文研究得到国家自然科学基金和国家杰出青年基金资助. 作者余正生, 1967 年生, 博士生, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学. 彭群生, 1947 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机图形学, 计算机辅助几何设计. 马利庄, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学.

本文通讯联系人: 余正生, 杭州 310027, 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室

本文 1998-02-28 收到原稿, 1998-04-20 收到修改稿

$$f(\vec{X}) < 0.$$

### 2 隐函数在实体造型中的并、交、差操作

设  $f_1$  和  $f_2$  分别为定义物体  $f_1(x, y, z) \geq 0$  和  $f_2(x, y, z) \geq 0$  的隐函数,  $f_3$  是通过并、交或差操作产生结果物体的相应的隐函数.  $f_3 = f_1 \cup f_2, f_3 = f_1 \& f_2, f_3 = f_1 \setminus f_2$  分别称为并、交、差的 R 函数, 其中  $\cup, \&, \setminus$  分别称为 R 函数的并、交、差的运算符号.<sup>[2,4]</sup>

R 函数用以下等式来表示<sup>[2]</sup>

$$f_1 \& f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \tag{1}$$

$$f_1 \cup f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \tag{2}$$

$$f_1 \setminus f_2 = f_1 \& (-f_2) = f_1 - f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \tag{3}$$

下面来验证等式(1)确实是实体造型的文操作, 等式(2)、(3)的验证可采用相类似的方法.

设  $\vec{X}$  在物体  $f_1(x, y, z) \geq 0$  和  $f_2(x, y, z) \geq 0$  的交集中, 记为  $\vec{X} \in f_1 \& f_2$

$$\vec{X} \in f_1 \& f_2 \Rightarrow \vec{X} \in f_1 \quad \vec{X} \in f_2 \Rightarrow f_1(\vec{X}) \geq 0 \quad f_2(\vec{X}) \geq 0$$

$$\Rightarrow f_1(\vec{X}) + f_2(\vec{X}) - \sqrt{f_1^2(\vec{X}) + f_2^2(\vec{X})} \geq 0$$

$$\Rightarrow \vec{X} \in f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

$$\text{反之, 若 } \vec{X} \in f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

$$\Rightarrow f_1(\vec{X}) + f_2(\vec{X}) - \sqrt{f_1^2(\vec{X}) + f_2^2(\vec{X})} \geq 0 \Rightarrow f_1(\vec{X}) \geq 0 \quad f_2(\vec{X}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \vec{X} \in f_1 \quad \vec{X} \in f_2 \Rightarrow \vec{X} \in f_1 \& f_2$$

### 3 Metaball 模型的过渡操作

Metaball 模型, 就是定义在势能场的等势面, 等势面上点的势能值是该点到某定点距离的函数. Nishita<sup>[2]</sup>指出 Metaball 造型技术, 由 Blinn 开始发现, 并称之为 blobs. 同时, 日本的 Nishimura 等人也独立地发现这种技术, 并称之为 Metaball. 最近, Wyvill 等人也开发了一种显示势能场的方法, 并称之为软物体造型. 从本质上来看, 他们的这种 Metaball 造型技术都是基于物理的势能场, 只是所采用的势函数有所不同而已.

我们仅用以下的势函数来研究 Metaball 模型的光滑过渡特性.

$$f_i(r) = -\frac{4}{9} \left(\frac{r}{R_i}\right)^6 + \frac{17}{9} \left(\frac{r}{R_i}\right)^4 - \frac{22}{9} \left(\frac{r}{R_i}\right)^2 + 1,$$

$R_i$  为第  $i$  个 Metaball 的影响域,  $r$  为点到中心点  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  的距离, 若  $r > R_i, f_i(r) = 0$ , 如图 1 所示. 由  $n$  个 Metaball 构造的隐式曲面可由下列式子来表达.

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^n q_i f_i - T = 0,$$

其中  $T$  为势能值,  $q_i$  为控制密度的权. Metaball 在几何造型中有良好的过渡特性, 如图 2 所示. 设两个 Metaball, 其中心点分别为  $P_1, P_2$ , 影响半径分别为  $R_1, R_2$ , 控制密度的权分别为  $q_1, q_2$ , 则等势面  $f(x, y, z) = q_1 f_1(r) + q_2 f_2(r) - T = 0$  是  $G^1$  连续的, 下面我们对此加以证明.

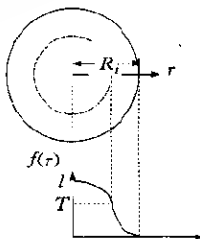


图1 势函数图, 其中  $T$  为势能值

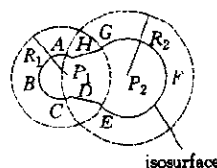


图2 两个 Metaball 势能场中的等势面

因为  $f_i(r)$  有以下特性

$$f_i(0)=1, f'_i(0)=0, f_i(R_i)=0, f'_i(R_i)=0.$$

曲面  $ABC$  部分在交线圆  $AC$  上的每个点的法向量为

$$\left( -\frac{q_1 \partial f_1(r)}{\partial x}, -\frac{q_1 \partial f_1(r)}{\partial y}, -\frac{q_1 \partial f_1(r)}{\partial z} \right).$$

曲面  $CDEGHA$  部分在交线圆  $AC$  上的每个点的法向量为

$$\begin{aligned} & \left( -\left( q_1 \frac{\partial f_1(r)}{\partial x} + q_2 \frac{\partial f_2(r)}{\partial x} \right), -\left( q_1 \frac{\partial f_1(r)}{\partial y} + q_2 \frac{\partial f_2(r)}{\partial y} \right), -\left( q_1 \frac{\partial f_1(r)}{\partial z} + q_2 \frac{\partial f_2(r)}{\partial z} \right) \right) \\ & = \left( -q_1 \frac{\partial f_1(r)}{\partial x}, -q_1 \frac{\partial f_1(r)}{\partial y}, -q_1 \frac{\partial f_1(r)}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

因此,  $f(x, y, z)$  在交线圆  $AC$  处  $G^1$  连续, 同理可证,  $f(x, y, z)$  在交线圆  $EG$  处  $G^1$  连续.

### 4 实例与讨论

在隐函数实体造型中, 既可以对隐函数定义的半空间进行并、交或差等布尔操作来构造基本体素, 如棱台、棱锥、圆柱、圆锥体、圆环体、球, 又可以用 Metaball 模型进行变形设计.

六面体、棱台、棱锥分别可以看成几个不等式  $AX+BY+CZ+D \geq 0$  的交, 球可以用 Metaball 来构造. 如图 3 所示, 圆柱可以看成  $x^2+y^2-R^2 \geq 0$  及两个不等式  $AX+BY+CZ \geq 0$  的交集. 如图 4 所示, 圆锥体可以看成不等式  $-(x^2+y^2)+(z+h)^2 \geq 0$  与  $-Z+h \geq 0$  的交集. 如图 5 所示, 圆  $\begin{cases} y=0 \\ (x-R)^2+z^2=r^2 \end{cases}$  绕  $Z$  轴旋转一周, 而生成圆环体可以看成  $z^2+x^2+y^2 \pm 2R\sqrt{r^2-z^2} - (R^2+r^2) \geq 0$  的解集.

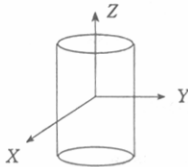


图3 圆柱体

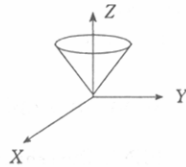


图4 圆锥体

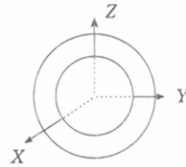


图5 圆环体

Metaball 在造型中, 能够进行变形控制<sup>[6,7]</sup>, 当 Metaball 的球心位置改变时, 即产生变形效果.

在图 6 中, 立方体由  $\begin{cases} y \geq 0 \\ -y+200 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x+200 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} z \geq 0 \\ -z+200 \geq 0 \end{cases}$  构造. 图 7~9 分别为两个球的交、并、差.

图 10 是图 6 中的立方体与球的交. 图 11 是图 6 中的立方体与球的差. 图 12~14 是两球的球心相对位置发生改变, 分别为较大、一般和较小时, 由势能场的等势面而生成的结果物体所产生的相应变形结果.

### 5 结论

与参数函数相比, 隐函数的布尔操作易于实现, 因此, 在实体造型中常用隐函数来生成 CSG. Metaball 模型作为曲型的隐函数, 广泛应用于 blend 造型及变形动画等. 若能对隐式曲面或隐函数生成的物体进行快速、准确而有效的绘制, 将会推动隐函数几何造型的发展.

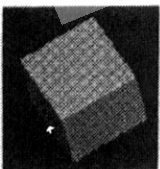


图 6

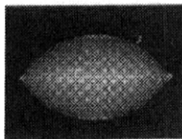


图 7

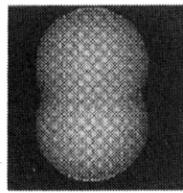


图 8

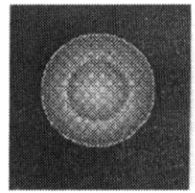


图 9



图 10



图 11



图 12

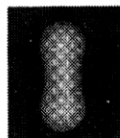


图 13



图 14

### 参考文献

- 1 杨行健. 微机三维实体造型的原理与实践. 西安:西北工业大学出版社, 1993  
(Yang Xing-jian. Principle and Practice of 3D Solid Modeling by Micro-computer. Xi'an: Xibei Industry University Press, 1993)
- 2 Pasko A *et al.* Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications. *The Visual Computer*, 1995, 11(9): 429~446
- 3 Crespín B *et al.* Implicit sweep objects. In: Rossignac J *et al* eds. *Proceedings of the Eurographics'96*. Britain: Blackwell Publishers, 1996. 15(3): 165~174
- 4 Pasko A *et al.* Implicit Curved Polygons. Technical Report 96-1-004, Japan: University of Aizu, 1996
- 5 Nishita T *et al.* A method for displaying metaballs by using Bézier clipping. In: Rossignac J *et al* eds. *Proceedings of the Eurographics'94*. Britain: Blackwell Publishers, 1994, 13(3): 271~280
- 6 Wyvill G *et al.* Data structure for soft objects. *The Visual Computer*, 1986, 2(5): 227~234
- 7 Fronmentin M *et al.* Dynamic implicit surface tessellation. In: *ACM VRSR'97*. Lausanne Switzerland, 1997. 79~86

### Boolean Operation for Implicit Function

YU Zheng-sheng PENG Qun-sheng MA Li-zhuang

(State Key Laboratory of CAD & CG Zhejiang University Hangzhou 310027)

**Abstract** When implicit surface is defined by equation  $f(x, y, z) = 0$ , the object defined by the implicit function is the set of points which satisfy the inequation  $f(x, y, z) \geq 0$ . For the object, it's possible to do union, intersection and subtraction etc using R-function. As a special implicit function, the Metaball function can also be used in blend and deformation for solid modeling except the common properties of implicit function. It is proved that R-function can be used in Boolean operation of solid modeling and Metaball model can be used in the blending of shape.

**Key words** Implicit surface, Boolean operation, R-function, Metaball, blend.