

拓扑关系的闭球模型及复合表的推导*

廖士中

石纯一

(辽宁师范大学计算机科学系 大连 116029) (清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

摘要 Egenhofer 和 Franzosa 提出的拓扑关系的 4-交集模型是定性空间推理中常用的模型,但基于 4-交集模型难以推导出拓扑关系的完备集、概念邻域和复合表. 本文以拓扑学为基础,提出了 (n, n) 完备集的概念,建立了拓扑关系的闭球模型. 基于闭球模型可以直接推导出拓扑关系的 (n, n) 完备集和概念邻域以及复合表. 结果表明,对定性空间推理来说,闭球模型比 4-交集模型更简单有效.

关键词 复合表, 拓扑模型, 拓扑推理, 定性空间推理.

中图法分类号 TP18

拓扑关系是基本的空间关系,是定性空间推理研究的基本问题之一. 1988 年 Gueting 首先应用点集运算定义了两个空间物体间的拓扑关系: $\{=, \neq, \text{inside}, \text{outside}, \text{intersection}\}$. [1] 1991 年 Egenhofer 和 Franzosa 指出这些关系既不互斥也不完备,并基于两个点集的内部和边界的交集运算,提出了拓扑关系的 4-交集模型,从 16 种可能的组合中筛选出 8 种可能的拓扑关系: $\{d, t, o, c@b, c, i@b, i, =\}$. [2] 1992 年 Cohn, Cui 和 Randell 基于连通性建立了空间的 RCC 理论,得到了等价的 8 种关系: $\{DC, EC, PO, TPP, NTPP, TPP^{-1}, NTPP^{-1}, EQ\}$ [3], 如图 1 所示. 1995 年 Egenhofer 和 Franzosa 应用 4-交集模型对拓扑关系作了更精细的刻画. [4]

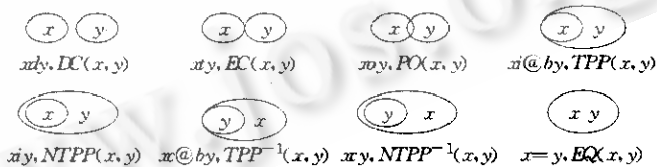


图1 基本拓扑关系

在这些工作中, RCC 的基础是连通性,其目的是建立完备而又尽可能简单的公理化逻辑理论,没有针对基本拓扑关系建立有效的模型. 4-交集模型虽然从集合论的角度给出了基本拓扑关系的模型,但只是在一般拓扑空间中考虑问题,难以得到具体简明的算法,也不便于应用. 在推导拓扑关系的完备集、概念邻域结构和复合表时,依据的是人的直觉. 这些问题

* 作者廖士中, 1964年生, 博士, 副教授, 主要研究领域为人工智能应用基础, 定性空间推理. 石纯一, 1935年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为人工智能应用基础, 知识工程.

本文通讯联系人: 廖士中, 大连 116029, 辽宁师范大学计算机科学系

本文 1997-01-21 收到修改稿

至今还没有得到解决.

Cohn 指出,概念邻域和复合表的自动计算是定性空间推理面临的挑战问题.^[5]对拓扑关系而言,给出有效模型,定义并推导出拓扑关系的完备集、概念邻域和复合表,是一项有意义的工作.

本文以拓扑学为基础,对拓扑推理有关的概念作了严格的定义,提出了拓扑关系的 (n, n) 完备集的概念,建立了拓扑关系的闭球模型,界定了闭球模型的适用范围.进而说明了复合表的推导方法.从而使 (n, n) 完备集上的拓扑推理问题可以归约为实数域上不等式区间的推导问题.

1 拓扑推理

本节定义与拓扑推理有关的概念,并简要介绍拓扑推理的代数方法.

1.1 基本概念

假设 $A, B, C \subseteq \mathbf{R}^n$ 是紧集(有界闭集), δ 是 \mathbf{R}^n 上的欧氏度量,下面定义一些基本概念.

定义 1. 在度量空间 (\mathbf{R}^n, δ) 上引入 δ 诱导的拓扑, A 与 B 的边界和内部相交/不相交的关系 φ 称为 A 与 B 的基本拓扑关系,并以 $A\varphi B$ 表示.若 ∂A 表示 A 的边界, A° 表示 A 的内部,则相交/不相交的关系指的是 $\partial A \cap \partial B, \partial A \cap B^\circ, A^\circ \cap \partial B, A^\circ \cap B^\circ$, 4 个集合分别为非空/空.

定义 2. 在度量空间 (\mathbf{R}^n, δ) 上引入 δ 诱导的拓扑, A 的 n 维体积不为 0, $n \geq 2$. 若 ∂A 同胚于

$$S_n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

则称 A 为 n 维实体.

定义 3. 在度量空间 (\mathbf{R}^n, δ) 上引入 δ 诱导的拓扑, K 是 \mathbf{R}^n 中满足一定性质的点集的集合, T_K 是基本拓扑关系的集合.若对任意 $A, B \in K, \exists \varphi \in T_K, A\varphi B$, 则称 T_K 对 K 是完备的; 若对任意 $\varphi \in T_K$ 都存在 $A, B \in K$ 满足 $A\varphi B$, 则称 T_K 对 K 是有效的.

定义 4. 令 T 是基本拓扑关系的集合, 则集合 T 称为复合拓扑关系, 定义为

$$ATB \equiv \bigvee_{\varphi \in T} A\varphi B$$

在不引起歧义的情况下,基本拓扑关系和复合拓扑关系可简称为拓扑关系.

定义 5. n 维实体间拓扑关系的完备集称为 (n, n) 完备集. 有效的 (n, n) 完备集记为 $T_{(n, n)}$.

拓扑推理是空间推理的基础,是关于拓扑关系的推理,可用于推断出隐含的拓扑关系或发现不相容性,同其它空间关系结合可以实现复杂的空间关系的推理.^[1]

1.2 代数方法

拓扑推理的代数方法是把拓扑关系作为项来处理.

定义 6. 设 T_K 对 K 是完备的. 对 $A, B, C \in K, r, s \in T_K$, 若 ArB, BsC , 则 A 和 C 之间可能的拓扑关系由 r 和 s 的复合运算给出. r 和 s 的复合运算

$$r \circ s \equiv \{\varphi \in T_K \mid \exists A, B, C \in K (ArB \wedge BsC \wedge A\varphi C)\}.$$

并称为 $r \circ s$ 为 r, s 在 T_K 上关于 K 的复合运算.

复合运算可用复合表表示,见表 1.

表 1 基本拓扑关系的复合表

	d	t	o	$i@b$	i	$c@b$	c	$=$
d	T	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{d\}$
t	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{d,t,o,i@b,c@b,=\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{t,o,i@b,i\}$	$\{o,i@b,i\}$	$\{d,t\}$	$\{d\}$	$\{t\}$
o	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{d,t,o,i@b,c\}$	T	$\{o,i@b,i\}$	$\{o,i@b,i\}$	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{o\}$
$c@b$	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{t,o,c@b,c\}$	$\{o,c@b,c\}$	$\{o,i@b,c@b,=\}$	$\{o,i@b,i\}$	$\{c@b,c\}$	$\{c\}$	$\{c@b\}$
c	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{o,c@b,c\}$	$\{o,c@b,c\}$	$\{o,c@b,c\}$	$\{o,i@b,i,c@b,c,=\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$i@b$	$\{d\}$	$\{d,t\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{i@b,i\}$	$\{i\}$	$\{d,t,o,i@b,c@b,=\}$	$\{d,t,o,c@b,c\}$	$\{i@b\}$
i	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	$\{i\}$	$\{i\}$	$\{d,t,o,i@b,i\}$	T	$\{i\}$
$=$	$\{d\}$	$\{t\}$	$\{o\}$	$\{i@b\}$	$\{i\}$	$\{c@b\}$	$\{c\}$	$\{=\}$

其中 $T = \{d,t,o,c@b,c,i@b,i,=\}$

一般地,令 $A, B, C \in K$ 且 $U, V, W \subseteq T_K$,若 AUB, BVC, AWC 则

$$W = U \cdot V = \bigcup_{u \in U, v \in V} u \cdot v$$

可见,拓扑推理代数方法的基础是拓扑关系的完备集和复合表.

2 闭球模型

4-交集模型从点集的边界、内部交集的 16 种组合中筛选出基本的拓扑关系,见表 2. 然而,只有明确了点集所在的空间和空间上的拓扑,才能确定点集的边界和内部. 4-交集模型只在一般的拓扑空间中考虑问题,因而不得不借助于人的直觉判断可能的基本拓扑关系,推导复合表.

表 2 4-交集模型的 16 种组合及 8 个基本拓扑关系的定义

	$\partial X \cap \partial Y$	$X^\circ \cap Y^\circ$	$\partial X \cap Y^\circ$	$X^\circ \cap \partial Y$	$X \phi Y$
0	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	d
1	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	t
2	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	\emptyset	无定义
3	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$=$
4	\emptyset	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	无定义
5	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	无定义
6	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	i
7	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	$i@b$
8	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	无定义
9	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	无定义
10	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	c
11	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	$c@b$
12	\emptyset	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	无定义
13	$\rightarrow \emptyset$	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	无定义
14	\emptyset	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	无定义
15	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	$\rightarrow \emptyset$	o

定理 1. 在度量空间 (\mathbb{R}^n, δ) 上引入 δ 诱导的拓扑,若 $T_{(n,n)}$ 是有效的 (n, n) 完备集, B_n 是 \mathbb{R}^n 中非空闭球间拓扑关系的有效的完备集,则 $T_{(n,n)} = B_n$.

证明: 由于闭球是 n 维实体,因而 $B_n \subseteq T_{(n,n)}$.

对任意 n 维实体 $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$,不失一般性,可以只考虑 B 对 ∂A 的可达性.

由加强的 Jordan 曲线定理得

$$[u \circ v]_M = \{\varphi \in T_{(n,n)} \mid \exists A, B, C \in M (AuB \wedge BvC \wedge A\varphi C)\}.$$

由于 $M \subset N$, 由上可知 $[u \circ v]_M \subseteq [u \circ v]_N$.

令 $\varphi \in [u \circ v]_N$, 则有 $A, B, C \in N$ 满足 $AuB, BvC, A\varphi C$. 即在 $A\varphi C$ 的情况下, 存在 $B \in N$, 使得 B 与 $\partial A, \partial C$ 的可达关系及 ∂B 与 A, C 的交集关系满足 AuB 且 BvC .

由定理 1 及 $A\varphi C$, 存在 $m_A, m_C \in M$ 满足 $m_A \varphi m_C$.

由加强的 Jordan 曲线定理知, 存在 $m_B \in M$ 使得 m_B 与 $\partial m_A, \partial m_C$ 之间的可达关系和 B 与 $\partial A, \partial C$ 的可达关系相同, 且 ∂m_B 与 m_A, m_C 的交集, 在空/不空的意义上, 和 ∂B 与 A, C 的交集相同, 即 $m_A u m_B$ 且 $m_B v m_C$.

因而 $[u \circ v]_N \subseteq [u \circ v]_M$. 故 $[u \circ v]_N = [u \circ v]_M$.

因而, $T_{(n,n)}$ 上关于 n 维实体的复合表推导问题可以归约为 $T_{(n,n)}$ 上关于闭球的复合表推导问题. 为了方便, $B(x, r_x) \varphi B(y, r_y)$ 简记为 $x \varphi y$. 由表 3 可以给出 $T_{(n,n)}$ 中基本拓扑关系的等价定义. 其中拓扑关系“=”记作“e”.

- $xdy \equiv \delta(x, y) > r_x + r_y,$
- $xty \equiv \delta(x, y) = r_x + r_y,$
- $xoy \equiv |r_x - r_y| < \delta(x, y) < r_x + r_y,$
- $xc@by \equiv \delta(x, y) = r_x - r_y \wedge r_x > r_y,$
- $xcy \equiv 0 \leq \delta(x, y) < r_x - r_y \wedge r_x > r_y,$
- $xi@by \equiv \delta(x, y) = r_y - r_x \wedge r_y > r_x,$
- $xiy \equiv 0 \leq \delta(x, y) < r_y - r_x \wedge r_y > r_x,$
- $xey \equiv \delta(x, y) = 0 \wedge r_x = r_y.$

利用这些基本拓扑关系的定义, 可以得到复合表的推导算法:

输入: $t_1, t_2 \in T_{(n,n)}$

输出: $t_1 \circ t_2$.

步骤 1: 列出 $A t_1 B, B t_2 C$ 的定义.

步骤 2: 列出下式:

$$0 \leq |\delta(A, B) - \delta(B, C)| \leq \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C) < +\infty.$$

步骤 3: 应用 $A t_1 B, B t_2 C$ 的定义推导 $\delta(A, C)$ 的区间, 加上已知或引入的 r_A, r_C 的约束.

步骤 4: 在 $0, (0, |r_A - r_C|), |r_A - r_C|, (|r_A - r_C|, r_A + r_C), r_A + r_C, (r_A + r_C, +\infty)$ 上分解 $\delta(A, C)$ 的区间, 加上 r_A, r_C 的约束, 查表 3 得到基本的拓扑关系.

步骤 5: $t_1 \circ t_2$ 为步骤 4 的基本拓扑关系的集合.

步骤 6: 返回 $t_1 \circ t_2$.

这样, $T_{(n,n)}$ 上关于 n 维实体的复合表的推导问题最终归约为实数域上不等式区间的推导问题.

例 1: $d \circ d$ 的推导.

- (1) $\delta(A, B) > r_A + r_B.$
- (2) $\delta(B, C) > r_B + r_C.$
- (3) $0 \leq |\delta(A, B) - \delta(B, C)| \leq \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C) < +\infty.$
- (4) $\delta(A, C) < +\infty.$ ((1), (2), (3))
- (5) $|\delta(A, B) - \delta(B, C)| = \max\{\delta(A, B) - \delta(B, C), \delta(B, C) - \delta(A, B)\}.$
- (6) $\delta(A, C) \geq 0$ ((1), (2), (5))
- (7) $0 \leq \delta(A, C) < +\infty.$ ((4), (6))
- (8) $d \circ d = \{d, t, o, c @ b, c, i @ b, i, =\}.$ (查表 3)

例 2: $d \circ c @ b$ 的推导.

- (1) $\delta(A, B) > r_A + r_B$.
- (2) $\delta(B, C) = r_B - r_C \wedge r_B > r_C$.
- (3) $0 \leq |\delta(A, B) - \delta(B, C)| \leq \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C) < +\infty$.
- (4) $\delta(A, C) < +\infty \wedge r_B > r_C$.
- (5) $|\delta(A, C) - \delta(B, C)| = \max\{\delta(A, B) - \delta(B, C), \delta(B, C) - \delta(A, B)\}$
 $\begin{cases} > r_A + r_C \wedge r_B > r_C, \\ < -r_C - r_A. \end{cases}$ (1), (2)
- (6) $r_A + r_C < \delta(A, C) < +\infty$. (4), (5)
- (7) $d \circ c @ b = \{d\}$.

例 3: $i \circ c @ b$ 的推导.

- (1) $0 \leq \delta(A, B) < r_B - r_A \wedge r_B > r_A$.
- (2) $\delta(B, C) = r_B - r_C \wedge r_B > r_C$.
- (3) $0 \leq |\delta(A, B) - \delta(B, C)| \leq \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C) < +\infty$.
- (4) $\delta(A, C) < +\infty$. (1), (2), (3)
- (5) $|\delta(A, B) - \delta(B, C)| = \max\{\delta(A, B) - \delta(B, C), \delta(B, C) - \delta(A, B)\}$
 $\begin{cases} < r_C - r_A, \text{需 } r_C > r_A, \\ > r_A - r_C, \text{需 } r_A > r_C. \end{cases}$ (1), (2)
- (6) $\begin{cases} \delta(A, C) \geq 0 \wedge r_C > r_A, \\ \delta(A, C) > r_A - r_C \wedge r_A > r_C. \end{cases}$ (5)
- (7) $\begin{cases} 0 \leq \delta(A, C) < +\infty \wedge r_C > r_A, \\ r_A - r_C < \delta(A, C) < +\infty \wedge r_A > r_C. \end{cases}$ (4), (6)
- (8) $i \circ c @ b = \{d, i, o, i @ b, i\}$. (查表 3)

应用上述步骤可以推导出 $T_{(n,n)}$ 上完整的复合表, 见表 1.

4 结 语

无论在理论上还是在实践中, 拓扑关系和拓扑理论都日益受到人们的重视.^[3,5,7] 在定性空间推理中, 空间物体间的拓扑关系常用点集拓扑来刻画^[1,2]; 对数字图象也建立了数字拓扑理论.^[6] 在此基础上建立拓扑推理的计算理论和计算模型, 不仅是可行的也是必须的.

本文针对拓扑关系的 4-交集模型存在的问题, 以拓扑学理论为基础, 提出 (n, n) 完备集的概念, 建立了 n 维实体间拓扑关系的闭球模型, 并证明了有效的 (n, n) 完备集及其上关于 n 维实体的复合运算可以归约为闭球模型中的问题. 基于闭球模型可直接得到有效的 (n, n) 完备集及其概念邻域结构, 也可以应用文中给出的推导方法推导出复合表. 这些结果表明, 闭球模型为拓扑推理的研究建立了理论基础, 闭球模型是一个合适的拓扑关系的模型.

进一步工作有: (1) 不同维对象的拓扑推理研究. 空间推理研究的对象大都是物体的投影, 它们可能是不同维的. 文献[4]中考虑了这一问题, 但没有建立严格完整的理论. (2) 数字拓扑推理的研究. 闭球模型的理论基础之一是加强的 Jordan 曲线定理. 数字拓扑理论已经证明, 在 2D 和 3D 的一些数字图象中, (加强的) Jordan 曲线定理成立.^[6] 因而, 闭球模型有可能推广到数字图象领域. (3) 拓扑关系及其它空间关系的集成. 集成拓扑关系和朝向关系可以给出位置的定性描述和推理方法.^[1] 集成拓扑关系和邻近关系, 从而给出形状的定性表示和推理方法, 是一项有希望的研究工作.

参考文献

- 1 Hernandez D. Qualitative representation of spatial knowledge. LNAI 804, Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- 2 Egenhofer M J, Franzosa R D. Point-set topological spatial relations. International Journal of Geographical Information Systems, 1991, 5(2):161~174.
- 3 Randell D A, Cui Z, Cohn A G. A spatial logic based on regions and connection. In: Proceedings of KR'92, 1992. 165~176.
- 4 Egenhofer M J, Franzosa R D. On the equivalence of topological relations. International Journal of Geographical Information Systems, 1995, 9(2):133~152.
- 5 Cohn A G. The challenge of qualitative spatial reasoning. ACM Computing Surveys, 1995, 27(3):323~325.
- 6 Kong T Y, Rosenfeld A. Digital topology: introduction and survey. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1989, 48(2):367~393.
- 7 Fleck M M. The topology of boundaries. Artificial Intelligence, 1996, 80(1):1~27.

CLOSED BALL MODEL AND COMPOSITION TABLE DERIVATION FOR TOPOLOGICAL RELATIONS

LIAO Shizhong

(Department of Computer Science Liaoning Normal University Dalian 116029)

SHI Chunyi

(Department of Computer Science and Technology Tsinghua University Beijing 100084)

Abstract Egenhofer and Franzosa's 4-set model for topological relations is the most common one in qualitative spatial reasoning. However, it is hard to derive the complete set, concept neighborhood, and composition table for topological relations based on 4-set model. In this paper, based on fundamental topology theories, the concept of (n, n) complete set is proposed and the closed ball model is constructed. It is easy to get (n, n) complete set and concept neighborhood, and possible to derive composition table for topological relations based on closed ball model. It is shown that closed ball model is a valid model for topological relations and is simpler than 4-set model.

Key words Composition table, topological model, topological inference, qualitative spatial reasoning.

Class number TP18