Institution 中自由理论态射的合成*

应明生

（南京航空航天大学计算机科学与工程系　南京　210016）

摘要　本文在一定的条件下建立了 Institution 中理论态射的粘合与各因子态射的自由性之间的联系，并证明了自由理论态射的复合仍为自由的.

关键词　代数语义学，抽象模型论，范畴论.

中图法分类号　TP311.1，O154

初始与终结语义是抽象数据类型的 2 种最为重要的语义模型，它们为对应于所考虑的数据类型的理论提供标准的解释. 可是，在许多实际问题中，我们需要一些其模型并不（按同构意义）唯一的宽松的规范说明，其一类重要的特殊情况就是诸如 $SET[X]$，$LIST[X]$ 等的参数化标准数据类型，这里规范说明的某些部分相对于其它部分（即在其它部分的解释给定后）具有标准的解释：此处初始与终结语义就不再适用.[1] 基于这样的考虑，Reichel H[2] 提出了“Canons”的概念；作为其稍微的扩充，Burstall R 与 Goguen J[3] 在规范说明语言 Clear 中引入了“数据约束”；其后，他们又进一步将其推广为 Institution 中的自由理论态射.[4] 为了使自由理论态射能够在大规模程序设计中得到应用，下述 2 个重要的问题是必须解决的：

(1) 模块化技术是否可施用于自由理论态射的处理，即自由理论态射的粘合是否仍为自由的，反之如何?

(2) 可否采用逐步求精的方法说明自由理论态射，即自由理论态射的复合是否仍为自由的，反之如何?

本文在一般性的逻辑框架 Institution 中讨论了这 2 个问题，对于一类特殊的粘合方式肯定地回答了上述问题(1)（见下述定理 1、2），并在一般情况下肯定地回答了上述问题(2)（见定理 3、4）.

设 $\&$ 是一个 Institution，$F:T\rightarrow T'$ 是理论态射．若对于任意 T-模型 A，存在 T'-模型 $A^\$$ 与 $\underline{Mod}(T)$ 中的态射 $\eta_A:A\rightarrow F(A^\$)$ 具有如下泛性：任给 T'-模型 B 及 $\underline{Mod}(T)$ 中的态射 $f:A\rightarrow T(B)$，存在 $\underline{Mod}(T')$ 中唯一的态射 $f^\#:A^\$\rightarrow B$ 使 $f=A;F(f^\#)$，则 F 称为自由的. 此时，$A^\$$，$f^\#$ 分别称为 A 与 f 沿 F 的自由扩张，η_A 称为 A 的泛态射（见文献[4]的定义 15).

引理 1. 设 F,G,H 与 H' 是 4 个理论态射使图 1 交换，且设 $\underline{Mod}(H)$ 对于态射既满又单

---

* 本文研究得到国家自然科学基金和国家 863 高科技项目基金资助. 作者应明生，1964 年生，教授，主要研究领域为数理逻辑及其应用，模糊数学.

本文通讯联系人：应明生，南京 210016，南京航空航天大学计算机科学与工程系

本文 1996-10-16 收到修改稿

而$\underline{Mod}(H')$对于对象和态射都满.对任意S-模型A,

(1)若$A^{\$_G}$是$A$沿$G$的自由扩张,则$H'(A^{\$_G})$是$H(A)$沿$F$的自由扩张;

(2)若$\eta^G_A:A\to G(A^{\$_G})$是$A^{\$_G}$的泛态射,则$H(\eta^G_A)$是$H'(A^{\$_G})$的泛态射$\eta^F_{H(A)}$;

(3)若$f:A\to G(B)$沿G的自由扩张为$f^\#$,则$H'(f^{\#_G})$是$H(f)$沿F的自由扩张$H(f)^{\#_F}$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "F"] \arrow[d, "H"'] & T' \arrow[d, "H'"] \\ S \arrow[r, "G"'] & S' \end{tikzcd}$$

图1

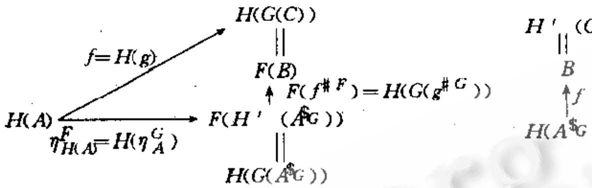

图2

证明:记$\eta^F_{H(A)}=H(\eta^G_A):H(A)\to H(G(A^{\$_G}))=F(H'(A^{\$_G}))$,往证其为$(H(A))^{\$_F}=H'(A^{\$_G})$的泛态射.对于任意$B\in|T'^*|$及任意$T^*$中的态射$f:H(A)\to F(B)$,因为$\underline{Mod}(H'):S'^*\to T'^*$关于对象是满的,存在$C\in|S'^*|$使$B=H'(C)$.这样,$F(B)=F(H'(C))=H(G(C))$且$f:H(A)\to H(G(C))$.因为$\underline{Mod}(H)$关于态射是满的,存在$S^*$中的态射$g:A\to G(C)$使$f=H(g)$.现在有$S'^*$中的态射$g^{\#_G}:A^{\$_G}\to C$使$g=\eta^G_A;G(g^{\#_G})$.令$f^{\#_F}=H'(g^{\#_G})$,则$\eta^F_{H(A)};F(f^{\#_F})=H(\eta^G_A);F(H'(g^{\#_G}))=H(\eta^G_A);H(G(g^{\#_G}))=H(\eta^G_A;G(g^{\#_G}))=H(g)=f$)(见图2).

此外,若$f^\#:H'(A^{\$_G})\to H'(C)$是$T'^*$中的态射且$f=\eta^F_{H(A)};F(f^\#)$,则存在$S'^*$中的态射$g^\#:A^{\$_G}\to C$使$f^\#=H'(g^\#)$(注意$\underline{Mod}(H')$关于态射是满的),从而$H(g)=f=H(\eta^G_A);F(H'(g^\#))=H(\eta^G_A);H(G(g^\#))=H(\eta^G_A;G(g^\#))$.进一步地,由于$\underline{Mod}(H)$关于态射是单的,我们有$g=\eta^G_A;G(g^\#)$,$g^\#=g^{\#_G}$且$f^\#=f^{\#_F}$. □

设$\Sigma\in|\underline{\mathrm{Sign}}|$,$m,s,u,v\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$,$f:m\to u$,$g:s\to v$都是$\underline{Mod}(\Sigma)$中的态射.若存在$\underline{Mod}(\Sigma)$中的同构$i:m\to s$与$j:u\to v$使$f;j=i;g$,则称$f$与$g$同伦,并记$f\approx g$(见文献[6]的定义5).

引理2. 若$A^\$$与A'是A沿F的2个自由扩张,$\eta_A:A\to F(A^\$)$与$\S_A:A\to F(A')$分别是$A^\$$与A'的泛态射且$f^\#$与f'是$f:A\to F(B)$分别按η_A与$\S_A$沿F的自由扩张,则$A^\$\cong A'$,$\eta_A\approx\S_A$且$f^\#\approx f'$.

证明:由泛性不难得知. □

设$\underline{Th}$是&的理论范畴,$C,D:G\to\underline{Th}$是$\underline{Th}$中2个具有相同形状G的diagrams,其中对每个$n\in|G|$,$C_n=\langle\Sigma_n,E_n\rangle$,$D_n=\langle\Pi_n,F_n\rangle$.若$C'=C;\mathrm{Sign}$,$D'=D;\mathrm{Sign}:G\to\underline{\mathrm{Sign}}$分别有余极限$\alpha':C'\Rightarrow\Sigma$与$\beta':D'\Rightarrow\Pi$,令$E=(\bigcup_{n\in|G|}\alpha'_n(E_n))^\bullet$,$F=(\bigcup_{n\in|G|}\beta'_n(F_n))^\bullet$且对于每个$n\in|G|$,$\alpha_n=\alpha_n'$,$\beta_n=\beta'_n$,则由文献[4]中定理11知$\alpha:C\Rightarrow\langle\Sigma,E\rangle$与$\beta:D\Rightarrow\langle\Pi,F\rangle$分别为$C$与$D$的余极限.进一步地,设对于每个$n\in|G|$有理论态射$\varnothing_n:C_n\to D_n$使得对于$G$中每条从$n$到$n'$的边$e$,图3交换;(此时称$\bar\varphi=\langle\varphi_n|n\in|G|\rangle$相对$C$与$D$是相容的).现在,对于每个$n\in|G|$令$\beta^*_n=\varphi_n;\beta_n$,则$\beta^*:C\Rightarrow\langle\Pi,F\rangle$是$\underline{Th}$中$C$上的一个锥.因为$\alpha$是$C$的余极限,则存在唯一的理论态射$\varphi:\langle\Sigma,E\rangle\to\langle\Pi,F\rangle$使得对于每个$n\in$

$$\begin{tikzcd} D_n \arrow[r, "D(e)"] & D_{n'} \\ C_n \arrow[u, "\varphi_n"] \arrow[r, "C(e)"'] & C_{n'} \arrow[u, "\varphi_{n'}"'] \end{tikzcd}$$

图3

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_n \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[r, "\varphi_n"] & \Pi_n \arrow[dr, "\beta_n"] & \\ \Sigma & & & \Pi \\ & \Sigma'_n \arrow[ul, "\alpha_{n'}"] \arrow[uu] \arrow[r, "\varphi_{n'}"'] & \Pi'_n \arrow[ur, "\beta_{n'}"'] \arrow[uu] & \end{tikzcd}$$

图4

$|G|$, $\beta_n^* = \alpha_n;\varphi$; 我们称 φ 为 $\bar{\varphi}$ 的粘合理论态射(见图4).

为方便计,以下我们列出一些文献[5,6]中引入的、在下文中有用的概念;它们的直观意义参见原文. 若在 & 中对于任意 $\Sigma\in|\underline{Sign}|$ 及 $m,s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$, $m\cong s$ 蕴涵 $m\equiv s$, 这里≡表示初等等价,即 $m\equiv s$ 当且仅当 $\{m\}^*=\{s\}^*$, 则称 & 是正规的(见文献[6]的定义3). 设 $D:G\to\underline{Sign}$ 是$\underline{Sign}$ 中的 diagram, 称 $\bar{m}=\langle m_n\in|\underline{Mod}(D_n)|\,\|\,n\in|G|\rangle$ 与 D 相容,若对于 G 中任意一条从 n 到 n' 的边 e, $m_n\equiv D(e)(m_{n'})$; 称 $\bar{\varphi}=\langle\varphi_n|n\in|G|\rangle$(其中 $\varphi_n:m_n\to s_n$ 是$\underline{Mod}(D_n)$中的态射)与 D 相容,若对于 G 中任意一条从 n 到 n' 的边 e, $\varphi_n\approx D(e)(\varphi_{n'})$(见文献[5]的定义2;文献[6]的定义6). 再设 D 在$\underline{Sign}$ 中有余极限 $\alpha:D\Rightarrow\Sigma$. 若对于任意与 D 相容的 $\langle m_n\in|\underline{Mod}(D_n)|\,|n\in|G|\rangle$, 总存在 $m\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$ 使对每个 $n\in|G|$, $m_n\equiv\alpha_n(m)$, 则称 & 是 D-模型可粘合的;若对于任意 $m,s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$ 及与 D 相容的 $\langle\varphi_n|n\in|G|\rangle$(其中 $\varphi_n:\alpha_n(m)\to\alpha_n(s)$ 是$\underline{Mod}(D_n)$中的态射),总存在$\underline{Mod}(\Sigma)$中的态射 $\varphi:m\to s$ 使对每个 $n\in|G|$, $\varphi_n=\alpha_n(\varphi)$, 则称 & 是 D-态射可粘合的(见文献[5]的定义3;文献[6]的定义7);若对于任意 $m,s\in|\underline{Mod}(\Sigma)|$ 及$\underline{Mod}(\Sigma)$中的态射 $f,g:m\to s$, 当对每个 $n\in|G|$ 都有 $\alpha_n(f)=\alpha_n(g)$ 时 $f=g$ 成立,则称 & 是 D-态射可分支化的(见文献[6]的定义4).

定理1. 设 & 是正规、D;Sign-模型可粘合、C;Sign 与 D;Sign-态射可粘合与可分支化的. 若对于每个 $n\in|G|$, $\varphi_n:C_n\to D_n$ 是自由理论态射,且对于 G 中的每条边 e, $\underline{Mod}(C(e))$ 对于态射既满又单而$\underline{Mod}(D(e))$对于对象与态射都满,则 $\bar{\varphi}=\langle\varphi_n|n\in|G|\rangle$ 的粘合理论态射 φ 也是自由的.

证明:对于任意 $A\in E^*$, 由于 α_n 是理论态射,我们有 $\alpha_n(A)\in E_n^*$, 又因为 φ_n 是自由的,存在 $\alpha_n(A)$沿 φ_n 的一个自由扩张 $(\alpha_n(A))^\$$ 及一个泛态射 $\eta_{\alpha_n(A)}:\alpha_n(A)\to\varphi_n((\alpha_n(A))^\$)$. 现在,我们有

(1) $\langle(\alpha_n(A))^\$\,|n\in|G|\rangle$ 与 $D'=D$;Sign 相容.

事实上,对于 G 中任意一条从 n 到 n' 的边 e, $C(e)$ 关于态射既单又满且 $D(e)$ 关于对象与态射都满,由引理1(1)得知 $(\alpha_n(A))^\$=(C(e)(\alpha_{n'}(A)))^\$\cong D(e)((\alpha_{n'}(A))^\$)$. 这样,由 & 的正规性知 $(\alpha_n(A))^\$\equiv D(e)((\alpha_{n'}(A))^\$)$.

因为 & 是 D;Sign-模型可粘合的,存在 $B\in|\underline{Mod}(\Pi)|$ 使 $(\alpha_n(A))^\$\equiv\beta_n(B)$ 对于每个 $n\in|G|$ 成立. 对于每个 $n\in|G|$, 由于 $(\alpha_n(A))^\$\models F_n$, 我们有 $B\models\beta_n(F_n)$, 进而 $B\models F$. 以下我们证明 B 是 A 沿 φ 的一个自由扩张. 对于 G 中任意一条从 n 到 n' 的边 e, 由引理1,2(2),我们有 $\eta_{\alpha_n(A)}=\eta_{C(e)(\alpha_{n'}(A))}\approx C(e)(\eta_{\alpha_{n'}(A)})$. 这样,

(2) $\langle\eta_{\alpha_n(A)}:\alpha_n(A)\to\varphi_n((\alpha_n(A))^\$)=\varphi_n(\beta_n(B))=\alpha_n(\varphi(B))\,|n\in|G|\rangle$ 与 D;Sign-相容.

因为 & 是 C;Sign-态射可粘合的,存在 E^* 中的态射 $\eta_A:A\to\varphi(B)$ 使对于每个 $n\in|G|$, $\eta_{\alpha_n(A)}=\alpha_n(\eta_A)$. 现在我们往证 η_A 是 B 的泛态射. 对任意 $C\in F^*$ 及 E^* 中的态射 $f:A\to\varphi(C)$, $\alpha_n(f):\alpha_n(A)\to\alpha_n(\varphi(C))=\varphi_n(\beta_n(C))$. 由 $\eta_{\alpha_n(A)}$ 的泛性,我们有 F_n^* 中的态射 $(\alpha_n(F))^\#:\alpha_n(A)^\$\to\beta_n(C)$ 使图5交换.

由引理1、2(3),有 $(\alpha_n(f))^\#=(C(e)(\alpha_{n'}(f))^\#\approx D(e)((\alpha_{n'}(f))^\#)$. 因为 & 是 D;Sign-态射可粘合的,存在 $f^\#:B\to C$ 使对每个 $n\in|G|$, $(\alpha_n(f))^\#=\beta_n(f^\#)$. 这样,任给$n\in|G|$,

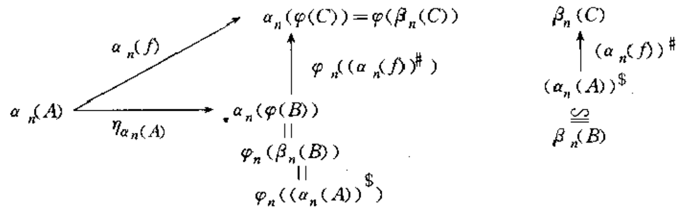

图5

$$\alpha_n(\eta_A;\varphi(f^{\#}))=\alpha_n(\eta_A);\alpha_n(\varphi(f^{\#}))$$
$$=\eta_{\alpha_n(A)};\varphi_n(\beta_n(f))^{\#})$$
$$=\eta_{\alpha_n(A)};\varphi_n((\alpha_n(f))^{\#})=\alpha_n(f).$$

注意到&是C;Sign-态射可分支化的,我们有$f=\eta_A;\varphi(f^{\#})$.另一方面,若F^*中的态射$f':B\to C$使$f=\eta_A;\varphi(f')$,则对每个$n\in|G|$,$\alpha_n(f)=\eta_{\alpha_n(A)};\varphi_n(\beta_n(f'))$,$\beta_n(f')=(\alpha_n(f))^{\#}=\beta_n(f^{\#})$.由&的$D$;Sign-态射可分支化性,即知$f'=f^{\#}$. □

若$n\in|G|$没有任何由它出发的边,则称n为G的一个根.如果对每个$n\in|G|$,总有G的唯一的根n'与由n到n'的唯一通路,则G称为树丛(见文献[5]的定义4).

定理2. 设G为树丛,&是C;Sign-模型可粘合的,且对于G的每个根n,C_n和谐,即存在$A_n\in|\underline{Mod}(\Sigma_n)|$使$A_n\models E_n$.若$\bar{\varphi}=\langle\varphi_n|n\in|G|\rangle$的粘合理论态射是自由的,则对于$G$的每个根$n$,当$\underline{Mod}(\alpha_n)$对于态射既满又单且$\underline{Mod}(\beta_n)$对于对象与态射都满时,$\varphi_n$也是自由的.

证明:设n为G的根且$A_n\in E_n^*$.对其它的根p,任取$A_p\in E_p^*$.由文献[5]中定理2及&的C;Sign-模型可粘合性,存在$A\in E^*$使得对G的每个根p,$A_p\equiv\alpha_p(A)$.因为φ是自由的,有A沿F的自由扩张及$A^{\$}$的泛态射$\eta_A$.注意到$\alpha_n;\varphi=\varphi_n;\beta_n$,由引理1知$\beta_n(A^{\$})$是$A_n$沿$\varphi_n$的自由扩张. □

定理3. 若$F:T\to T'$与$F':T'\to T''$是2个自由理论态射,则$F;F':T\to T''$也是自由的.

证明:由图6易知$A^{\$\$'}$是$A$沿$F;F'$的自由扩张且$\eta_A;F^*(\eta'_{A^{\$}})$是$A^{\$\$'}$的泛态射. □

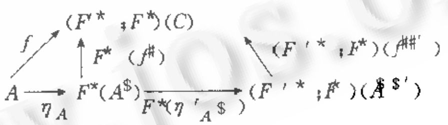

图6

定理4. 设$F:T\to T'$与$F':T'\to T''$是2个理论态射且$F;F':T\to T''$是自由的.

(1)若$\underline{Mod}(F')$对于对象与态射都是满的,则F是自由的;

(2)若$\underline{Mod}(F)$对于态射既是满的又是单的,则F'是自由的.

证明:(1)设$A\in|T^*|$,因为$F;F'$是自由的,有A沿$F;F'$的自由扩张$A^{\$}$及$A^{\$}$的泛态射$\eta_A:A\to F(F'(A^{\$}))$,易证$F'(A^{\$})$是$A$沿$F$的自由扩张且$\eta_A$是$F'(A^{\$})$的泛态射.

(2)设$B\in|T'^*|$,因为F是理论态射,有$F(B)\in|T^*|$.由于$F;F'$自由,存在$F(B)$沿$F;F'$的自由扩张$(F(B))^{\$}\in|T''^*|$及$T^*$中的态射$\eta_{F(B)}$为$(F(B))^{\$}$的泛态射.因为$\underline{Mod}(F)$关于态射是满的,存在$T'^*$中的态射$\eta_B$使$\eta_{F(B)}=F(\eta_B)$.下证$(F(B))^{\$}$是$B$沿$F'$的自由扩张且$\eta_B$是$(F(B))^{\$}$的泛态射.对于任意$C\in|T''^*|$及$T'^*$中的态射$g:B\to F'(C)$,有$T''^*$中的态射$(F(g))^{\#}:(F(B))^{\$}\to C$使$F(g)=\eta_{F(B)};F(F'((F(g))^{\#}))=F(\eta_B);F(F'((F$

$(g))^{\#}))=F(\eta_B;F'((F(g))^{\#})$. 又因为$\underline{Mod}(F)$关于态射是单的,则 $g=\eta_B;F'((F(g))^{\#})$.
现设有 T''^{*} 中的态射 $g':(F(B))^{\$}\to C$ 使 $g=\eta_B;F'(g')$,则 $F(g)=F(\eta_B;F'(g'))=F(\eta_B);F(F'(g'))=\eta_{F(B)};F(F'(g'))$. 由 $\eta_{F(B)}$的泛性知 $g'=(F(g))^{\#}$. □

参考文献

1 陆汝钤. 计算机语言的形式语义. 北京:科学出版社,1992.

2 Reichel H. Initially restricting algebraic theories. In: Dembinshi P ed. Mathematical Foundations of Computer Science, LNCS88, New York: Springer-Verlag, 1980. 504~514.

3 Burstall R, Goguen J. The semantics of clear, a specification language. In: Bjorner D ed. Proc. of the 1979 Copenhagen Winter School on Abstract Software Specification, LNCS 86, New York: Springer-Verlag, 1980. 292~332.

4 Goguen J A, Burstall R M. Institutions: abstract model theory for specification and programming. J. ACM, 1992, **39**(**1**):95~146.

5 Ying M S. Putting consistent theories together in institutions. J. of Comput. Sci. & Technol., 1995, **10**(**3**):260~266.

6 应明生. Institution 中合并理论的初始与终结语义. 软件学报, 1996, **7**(**6**):360~363.

PUTTING LIBERAL THEORY MORPHISMS TOGETHER IN INSTITUTIONS

YING Mingsheng

(Department of Computer Science and Engineering Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Nanjing 210016)

Abstract The relationship among liberalities of glued theory morphisms and factor theory morphisms in institutions is clarified under certain intuitive conditions, and liberality of the composition of liberal theory morphisms in institutions is shown.

Key words Algebraic semantics, abstract model theory, category theory.

Class numbers TP311.1, O154