第 8 卷第 6 期
1997 年 6 月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 8, No. 6
Jun. 1997

寻找无向图中回路的并行算法*

*马 军 **岩间一雄 *马绍汉

*(山东大学计算机系 济南 250100)

**(九州大学工学部计算机科学与通信工程系 日本国福冈 820)

摘要 对无向简单图 $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$,给出对下述问题的 NC 算法:(1) 寻找 G 中最短回路;(2) 寻找 G 中最短偶(奇)长度回路;(3) 求解 C_k, $k=3,4$,这里 C_k 表示 G 中长度为 k 的回路.

关键词 图论算法,回路,最短回路,并行算法.

中图分类号 TP301

无向图 $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$,中的最短回路为 G 中最少边数的回路,其边数被称为 G 的围长(girth).[1]图论中许多定理和概念均与围长有关.[1]在研究二分图的边匹配,和近来对图论问题的并行计算等方面,最短回路又有许多新应用.

Anstee 和 A. Itai, Rodeh 在研究两个二分图的完美匹配之间的关系时,分别独立地给出在 $O(nm)$ 时间内求解 G 中最短回路算法.[2,3]B. Monien 又给出 $O(n^2\min\{A(n),e(G)\})$ 时间内,求 G 中最短偶长度回路的算法,其中 $A(n)$ 为逆 Ackerman 函数,$e(G)$ 为回路的边数.[4]D. Richard 又进一步讨论了在平面图上,在 $O(n\log n)$ 时间内求解 G 中最短回路算法.[5]

与之相关的问题是找出 G 中的 C_k, $k>2$. A. Itai 和 Rodeh 给出 3 个算法来寻找 C_3[3],其时间复杂性分别为 $O(m^{3/2})$, $O(nm)$ 和 $O(n^b)$, $b<2.496$. Chiba, Nishizeki D. Richard 又在平面图上给出了求解 C_3, C_4 的 $O(n)$ 算法.[6]然而至今,对 $k>6$,还没有求解 C_k 的算法解. C_k 可帮助我们在 G 上求解近似的 Hamiltonian 回路和近似最小顶点覆盖等应用问题.[7,8]

文献[9]曾给出一使用 p 台处理机,$1\le p\le n^2$, $O(n^3/p)$ 时间求解有向图中最短回路的并行算法,然而该算法不是 NC 算法,也不适合于无向图. 目前尚未见到对上述问题的 NC 算法. 本文在 CREW PRAM 并行计算模型上,给出使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机,时间为 $O(\log^2 n)$ 的求解 G 中最短回路的并行算法,对该算法稍加修改,又得到具有同样时间与处理

* 本文研究得到国家自然科学基金、国家 863 高科技项目基金、山东省自然科学基金和日本学术振兴会论搏基金资助. 作者马军,1956 年生,副教授,主要研究领域为算法,人工智能,并行处理. 岩间一雄,1951 年生,教授,博士导师,主要研究领域为算法,人工智能,并行处理. 马绍汉,1938 年生,教授,博士导师,主要研究领域为算法分析与设计,人工智能,并行处理.

本文通讯联系人:马军,济南 250100,山东大学计算机系

本文 1996-06-07 收到修改稿

机个数的求解 G 中最短偶(奇)长度回路算法.我们又讨论了使用 $O(mn/\log n)$ 处理机,在 $O(\log n)$ 时间内,求解 C_k, $k=3,4$,的费用最佳算法.从而证明了上述问题均属于 NC 类.

1 基本术语

我们用 P_{ab} 表示 G 中顶点 a,b 之间的最短路径.设 G' 为 G 的一子图,$V(G')$,$E(G')$ 分别表示 G' 的顶点集和边集.$BSF(a)$ 表示以顶点 a 为根的,G 的逆向广度优先生成树,$BSF(a)$ 上的边被定向为沿该边的顶点到根 a.对 $BSF(a)$ 中 3 个不同的顶点 v,w 和 u,u 被称为是 w,v 在 $BSF(a)$ 上最小公共祖先,若在 $BSF(a)$ 上,u 为 P_{va},P_{wa} 上第 1 个共同顶点.$depth(v)$ 表示顶点 v 在生成树 $BSF(a)$ 上的深度.

PRAM 为并行随机存取机器的缩写,根据处理机对共享单元存取的约束,又分为可同时读写(CRCW),不可同时读写(EREW)和可同时读,但不能同时写(CREW)3 种类型.一问题若在 PRAM 上存在使用多项式个数处理机,时间复杂性为 $O(\log^k n)$ 的算法,称该问题属于 NC 类.若一并行算法的费用 $Cost(n)=T_p(n)\times p(n)=T_s(n)$,其中 $T_p(n)$,$p(n)$,$T_s(n)$ 分别表示并行时间、处理机个数和对同一问题最佳的串行算法的时间,则称该算法为最佳并行算法.

WT 调度原理[10],设 $W(n)$ 为在假设有无穷处理机的 CREW PRAM 上,在 $O(1)$ 时间内可完成的工作步数,则在有 p 台处理机的 CREW PRAM 上,$W(n)$ 工作步数可在 $O(W(n)/p)$ 时间内完成.

2 计算最短回路的并行算法

算法 1. (寻找通过顶点 a 的最短回路)

1. 计算并建立 $BSF(a)$;
2. for $e=(v,w)\in E$ *par-do*

   若 $e=(v,w)\notin E(BSF(a))$,且在 $BSF(a)$ 中,a 是 v,w 的最小公共祖先,则

   $L(a,e):=depth(a,v)+depth(a,w)+1$;

   否则

   $L(a,e):=\infty$;
3. $L(a,e_a):=\min\{L(a,e)\mid e=(v,w)\in E\}$;
4. 若 $L(a,e_a)<\infty$,且 $e_a=(v,w)$,则 P_{va},P_{wa} 与边 (v,w) 形成的回路为 G 中通过顶点 a 的最短回路.

算法 2. (寻找 G 中的最短回路)

1. 对所有 $a\in V$,并行地调用算法 1 去计算 $L(a,e_a)$;
2. $L(a_0,e_{a_0}):=\min\{L(a,e_a)\}$,$a\in V$;
3. 若 $L(a_0,e_{a_0})<\infty$,且 $e_{a_0}=(v,w)$,则 P_{va_0},P_{wa_0} 与边 (v,w) 形成的回路则为 G 的围长.

定理 2.1. 算法 1 正确地计算了 G 中通过顶点 a 的最短回路.

证明:因已知 $\forall\ e=(v,w)\notin E(BSF(a))$,在子图 $BSF(a)\cup\{e\}$ 上必有一回路,故此,若 $L(a,e_a)$ 为无穷,则 G 中无含有 a 的回路.

下设 G 中有经顶点 a 的回路,定义:

$$S(a,i)=\{v\in V\mid depth(a,v)=i\}$$

$$i_0=\min\{i\mid\exists\ u,v\in S(a,i):(u,v)\in E \text{ or } u\in S(a,i) \text{ and } v\in S(a,i+1):(u,v)\in E\}$$

显然 $S=\bigcup_{0\le i<i_0}S(a,i)$ 是 $BSF(a)$ 的一子树的顶点,并且依 i_0 的定义,S 在 G 的任意导出

子图中均无回路，但 $S'=\bigcup_{0\le i\le i_0} S(a,i)$ 的导出子图中，至少有一回路，设为 C. 显然 C 为一通过 a 的最小长度的回路. 因 C 中最多有 $|C|-1$ 条边在 $BSF(a)$ 上，必存在 C 上一边 $e=(v,w)$. 满足 $e\notin E(BSF(a))$，并且 a 为 v,w 的最小公共祖先. 根据算法 1 的步骤 2 和 3，显然 C 的长度 $\le L(a,e_a)$. 又因 $L(a,e_a)$ 为 S' 的最短回路的长度，故又有 $L(a,e_a)\le|C|$. 定理得证.

根据定理 2.1 及算法 2，可直接推得推论 2.1.

推论 2.1. 算法 2 正确地计算了 G 的最短回路.

引理 2.1. 在 CREW PRAM 并行模型上，使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机，n 棵 BSF 树可在 $O(\log^2 n)$ 时间内被建立起来.

证明：设 G 由图的邻接距阵 A 给出，$A(i,i)=0$；$0\le i\le n-1$；$A(i,j)=1$ 若 $(i,j)\in E$，否则为 ∞. 调用全源最短路径算法于 G，则 $depth(a,i)$ 为 a 到 i 的距离. 因已知在 EREW PRAM 上存在使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机，$O(\log^2 n)$ 时间的计算 G 中任意 2 点间距离的并行算法[11]，文献[9]又给出了在计算任意 2 点间距离时，利用二维距阵记录下路径的方法. 该方法使每个顶点 v，对任意 G 的顶点 a，均知 P_{av} 上的第 1 个顶点，故可利用倍增技术[10]，使用 $O(n^2)$ 处理机，在 $O(\log n)$ 时间内建立起以 G 的每个顶点为根的 BSF 树. 引理得证.

引理 2.2. 在 CREW PRAM 并行模型上，使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机，算法 1 可在 $O(\log^2 n)$ 时间内被完成.

证明：由引理 2.1，可知步骤 1 能在 $O(\log^2 n)$ 时间内被完成. 因在有根逆向树上，两顶点的最小公共祖先与函数 $depth(a,v)$，$a,v\in V$，在 CREW PRAM 上使用 $O(n^2/\log n)$ 处理机，均可在 $O(\log n)$ 时间内被计算完毕[10]，故步骤 2 能在 $O(\log n)$ 时间内被完成. 因已知在 EREW PRAM 上，使用 $O(n/\log n)$ 处理机，对 n 个数取最小值的操作可在 $O(\log n)$ 时间内完成，因此步骤 3 的执行时间为 $O(\log n)$. 显然步骤 4 的执行时间为 $O(1)$. 引理得证.

由引理 2.2 和对算法 2 进行类似于引理 2.1 的时间复杂性分析，我们可直接推得定理 2.2.

定理 2.2. 在 CREW PRAM 并行模型上，使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机，在 $O(\log^2 n)$ 时间内，可求出 G 中最短回路.

3　计算 G 中具有最短偶(奇)长度回路的并行算法

让我们先讨论一下 G 中最短偶长度回路的一些性质.

设 Γ 为 G 中最小偶长度回路的集合. $\forall C\in\Gamma$，若 $\exists\ v,w\in V(C)$，P_{vw} 为与 C 内部顶点不交路径，满足 $1\le|P_{vw}|<|C|/2$，称 P_{vw} 为 C 的一弦路(*chord path*). 令 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，其中 $\Gamma_1=\{C|C\in\Gamma$ 且存在 C 中 2 顶点 u 和 v，u 与 v 之间存在一弦路$\}$，$\Gamma_2=\Gamma-\Gamma_1$.

则用类似于定理 2.1 的证明方法，不难推得下面引理.

引理 3.1. $\forall\ C\in\Gamma_2$，$\forall\ v\in V(C)$，$\exists\ e=(u,w)$，$e\in E(C)$，$e\notin BSF(v)$，满足 $|depth(v,u)-depth(v,w)|=1$.

下面让我们讨论 $\forall\ C\in\Gamma_1$，C 所具有的性质.

引理 3.2. $\forall\ C\in\Gamma_1$，C 中不存在 2 条或 2 条以上不相交的弦路.

证明：设 C 中存在两互不相交的弦路 P_{xy}，P_{uv}，如图 1 所示.

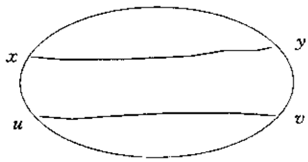

图1

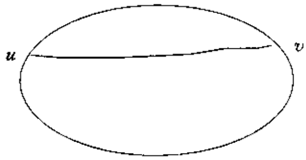

图2

情况 1：$|P_{xy}|$与$|P_{uv}|$均为奇(偶)数，则必有弧P_{xay}，P_{ubv}的长度均为偶(奇)数，故可推出由顶点x,u,v,y围成的回路长度为$|C|-|P_{xay}|-|P_{uby}|+|P_{xy}|+|P_{uv}|$为偶数，显然该回路是长度小于$|C|$的一偶回路，与$C\in\Gamma_1$矛盾.

情况 2：$|P_{xy}|$为偶数，$|P_{uv}|$为奇数，则弧P_{xay}的长度为奇数. 弧P_{ubv}的长度为奇数，故由顶点x,u,v,y围成的回路长度为$|C|-|P_{xay}|-|P_{uby}|+|P_{xy}|+|P_{uv}|$为偶数，显然该回路为长度小于$|C|$的一偶回路，又与$C\in\Gamma_1$矛盾.

同理可证$|P_{uv}|$为偶数，$|P_{xy}|$为奇数的情况. 引理得证.

引理 3.3. $\forall C\in\Gamma_1,\exists a\in V(C),\exists e=(u,w),e\in E(C),e\notin BSF(a)$，满足$|depth(a,u)-depth(a,w)|=1$.

证明：由引理 3.2 及在$BSF(a)$中，可认为最多有一条弦路影响$BSF(a)$，不失一般性，$\forall C\in\Gamma_1$，可假设C中只有一条弦路. 如图 2 所示.

P_{uv}为C的一条弦路，若$|P_{uv}|$为偶数，则推出$|P_{uv}|\geq 2$，P_{xay}为C的一条弧，满足$|P_{uav}|<|C|/2$，并且a满足$|P_{ua}|=|P_{av}|+1$，对这样的顶点a，可使得在$BSF(a)$上，弦路P_{uv}最多有$|P_{uv}|-1$条边在$BSF(a)$，并且C中有$|C|-1$条边在$BSF(a)$，故存在$e=(v,w)\in E(C)$，并且$e\notin BSF(a)$，有$|depth(a,u)-depth(a,w)|=1$.

若$|P_{uv}|$为奇数，P_{uav}为C的一条弧，满足$|P_{uav}|$为偶数并且$|P_{uav}|\leq|C|/2$，设$a\in V(C)$，满足$|P_{ua}|=|P_{av}|$，a的选择，使得弦路P_{uv}最多有$|P_{uv}|-1$条边在$BSF(a)$上，并且C中有$|C|-1$条边在$BSF(a)$上，故存在$e=(v,w)\in E(C)$，并且$e\notin BSF(a)$，有$|depth(a,u)-depth(a,w)|=1$. 引理得证.

定理 3.1 小结了引理 3.1 和 3.3.

定理 3.1. $\forall C\in\Gamma,\exists a\in V(C),\exists e=(u,w),e\in E(C),e\notin BSF(a)$，满足$|depth(a,u)-depth(a,w)|=1$.

由定理 3.1，可保证下面计算G中最短偶长度回路的并行算法的正确性.

算法 3. **(寻找G中最短偶长度回路)**

1. $\forall a\in V$，并行地计算$BSF(a)$；
2. 对每一$BSF(a)$并行地做下面计算：
   2.1 $\forall e=(v,w)\in E$，若$e=(v,w)\notin E(BSF(a))$，在$BSF(a)$中，a是v,w的最小公共祖先，并且$|depth(a,v)-depth(a,w)|=1$则$L(a,e):=depth(a,v)+depth(a,w)+1$；
   否则$L(a,e):=\infty$；
   2.2 $L(a,e_a):=\min\{L(a,e)|e\in E\}$；
3. $L(a_0,e_{a_0}):=\min\{L(a,e_a)\},a\in V$；
4. 若$L(a_0,e_{a_0})<\infty$，$e_{a_0}=(v,w)$，则P_{va}，P_{wa}与边(v,w)形成的回路则为G中通过顶点a_0的具有最小偶长度回路.

不难看出，只需把算法 3 的步骤 2.1 改为

$\forall\ e=(v,w)\in E$，若 $e=(v,w)\notin E(BSF(a))$，在 $BSF(a)$ 中，a 是 v,w 的最小公共祖先，并且 $depth(a,v)=depth(a,w)$ 则 $L(a,e):=depth(a,v)+depth(a,w)+1$；

否则 $L(a,e):=\infty$

则修改后的算法为计算 G 中最小奇长度回路. 综上所述，我们有

定理 3.2. 在 CREW PRAM 并行模型上，使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机，计算 G 中具有最小长度偶（奇）回路问题，可在 $O(\log^2 n)$ 时间内被完成.

4 求解 C_3,C_4 的并行算法

首先讨论求解 C_3，我们用 $Star(v)$ 表示 G 中以 v 中心的星型子图，满足 $V(Star(v))=\{x\mid x=v,(v,x)\in E\}$；$E(Star(v))=\{(x,v)\mid(x,v)\in E\}$；

算法 4.（**求解 C_3 的并行算法**）

1. $\forall\ a\in V$，并行地建立 $Star(a)$；
2. 对每一 $Star(a)$ 并行地做下面计算：
   $\forall\ e=(v,w)\in E$，若 $e=(v,w)\notin E(Star(a))$，并且 $v,w\in V(Star(a))$，
   则 $L(a,e):=3$ 否则 $L(a,e):=\infty$；
3. $L(a_0,e_{a_0}):=\min\{L(a,e_a)\},a\in V$；
4. 若 $L(a_0,e_{a_0})=3,e_{a_0}=(v,w)$，则顶点 a_0,v,w 围成一 C_3.

算法的正确性是显然的，下面讨论其计算时间.

定理 4.1. 在 CREW PRAM 并行模型上，使用 $O(nm/\log n)$ 处理机，在 G 中寻找 C_3 可在 $O(\log n)$ 时间内被完成.

证明：因在步骤 1、步骤 2 中，有可在 $O(1)$ 时间内并行完成的 $O(mn)$ 个计算步，根据 WT 调度原理，若设使用 $O(nm/\log n)$ 处理机，步骤 1、2 可在 $O(\log n)$ 时间内完成. 因已知，步骤 3 中的求最小值操作，可使用 $O(m/\log n)$ 处理机，在 $O(\log n)$ 时间内被完成. 定理得证.

算法 5.（**求解 C_4 的并行算法**）

1. $\forall\ a\in V$，并行地建立 $Star(a)$；
2. 对每一 $Star(a)$ 并行地做下面计算：
   $\forall\ v\in V-V(Star(a))$，若存在 $e1=(v,w)\notin E(Star(a))$，$e2=(v,u)\notin E(Star(a))$，并且 $v,u\in V(Star(a))$，
   则 $L(a,e):=4$ 否则 $L(a,e):=\infty$；
3. $L(a_0,e_{a_0}):=\min\{L(a,e_{a_0})\},a\in V$；
4. 若 $L(a_0,e_{a_0})=4,e_{a_0}=(v,w)$，顶点 a_0,v,w 围成一 C_4.

类似于对定理 4.1 的证明，我们有定理 4.2.

定理 4.2. 在 CREW PRAM 并行模型上，使用 $O(nm/\log n)$ 处理机，在 G 中寻找 C_4 在 $O(\log n)$ 时间内被完成.

基于算法 4 和 5，不难得到枚举出 G 中所有 C_3,C_4 的并行算法，这只需通过对顶点加标记，和在第 3 步通过排序，然后在删除重复的回路即可. 因已知使用 $O(m)$ 处理机，可在 $O(\log n)$ 时间内完成排序，其导出算法的时间仍为 $O(\log n)$.

5 结束语

本文分别对无向图 G 中，寻找 G 中最短回路、最短偶（奇）长度回路和求解 $C_k,k=3,4$，

给出了 NC 算法，从而证明了上述问题均易于被并行计算. 对于 $G(V,E,W)$ 为一赋权有向简单图，并且权为正整数的更一般的情况，可利用并行的矩阵乘法[11]，文献[9]对全源最短路径的计算方法和本文算法 1～3，同样不难得到一个在 CREW PRAM 上，使用 $O(n^3/\log n)$ 处理机，时间复杂性为 $O(\log^2 n)$ 的计算 G 中最短赋权回路、最短偶(奇)长度回路的并行算法，这里 C 的长度应定义为 C 的边权之和.

C. Thomassen 研究了有向图中存在长度为偶数的圈的充分与必要条件，并给出相应的算法.[12]但如何在无向简单图上寻找一含有弦路的最短回路，仍是一尚未被解决的、具有实际应用价值的问题.[13]

致谢 本文作者感谢审稿先生对原稿提出的修改意见.

参考文献

1 Harary F. Graph theory. Addison-Wesley: Reading MA, 1972.
2 Anstee R P. Shortest even cycle problem. Research Report, No. CORR 84-7, Univ. of Waterloo, 1984. 65～80.
3 Itai A, Rodeh M. Finding a minimum circuit inagraph. SIAM J Comput., 1978, **7(4)**: 413～423.
4 Monien B. The complexity of determining a shortest cycle of even length. Computing, 1983, **31**: 355～369.
5 Richards D, Liestman A L. Finding cycles of a given length. Ann. Discrete Math., 1985, **27(1)**: 246～256.
6 Chiba N, Nishizeki T. Arboricity and subgraph listing algorithms. SIAM J. Comput., 1985, **14(1)**: 210～223.
7 Bar-Yehuda R, Even S. On approximating a vertex cover for planar graphs. Proc. 14th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, San Francisco, 1982. 303～309.
8 Chiba N, Nishizeki T, Saito N. Analgorithm for finding a large independent set in planar graphs. Networks, 1983, **13(3)**: 247～252.
9 Ma J, Takaoka T, Ma S. Parallel algorithms for a class of graph theoretic problems. Trans. of Info. Proc. Society of Japan, 1994, **35(7)**: 1235～1240.
10 JaJa J. An introduction to parallel algorithms. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1992. 26～29.
11 Dekel E, Nassimi D, Sahni S. Parallel matrixand graph algorithms. SIAM J. Comput., 1981, **10(4)**: 657～675.
12 Thomassen C. The even cycle Problem for planar digraphs. J. of Algorithms, 1993, **15(1)**: 61～75.
13 Grotschel M, Pulleybalank W R. Weakly bipartite graphsand max-cut problem. Oper. Res. Lett., 1981, **8(1)**: 23～27.

PARALLEL ALGORITHMS FOR FINDING CYCLES IN UNDIRECTED GRAPHS

*MA Jun **Kazuo Iwama *MA Shaohan

*(*Department of Computer Science Shandong University Ji'nan* 250100)

**(*Department of Computer Science and Communication Engineering Kyushu University Fukuoak Japan*)

Abstract Let $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$, be an undirected simple graph, NC algorithms are given for following problems: (1) finding a shortest circuit in G; (2) finding a shortest circuit of even (odd) length in G; and (3) finding a C_k, $k=3,4$, where C_k is the circuit in G of k edges.

Key words Graph algorithms, cycle, shortest circuits, parallel algorithms.

Class number TP301