λ演算中的第二不动点定理*

宋方敏

(南京大学计算机科学系　南京　210093)

摘要　作者研究λ演算中的第二不动点的性质.首先讨论关于第二不动点的3个命题之间的关系且证明了它们.然后为第二不动点组合子给以一个充分条件且作出一系列的第二不动点组合子.作者还提出和证明了多元第二不动点定理.

关键词　λ演算,第二不动点.

1　预备知识

我们假定读者具有初步的λ演算知识.现在把本文需要的术语列出,有关细节参见Hindley.[1]

(1) Λ表示所有λ项的集合:$\Lambda=V\mid\Lambda\Lambda\mid\lambda V\cdot\Lambda$,这里$V=v\mid V'$为变元集合$\{v,v',v'',...\}$.通常以$x,y,z...$等表示变元.

(2)Λ°表示闭项的集合.

(3)≡表示语法恒同(本文把α相等看成语法恒同).

(4)$=_\beta$表示λ项之间的β相等性,以下记$=_\beta$为=.

(5) $FV(F)$指F中的全体自由变元的集合.

(6)对于$n\in N$,$[n]\equiv\lambda xy.x^n y$.

(7)对于$M\in\Lambda$,$\#M$指M的自然数编码($\#M\in N$).

(8)对于$M\in\Lambda$,$[M]\equiv[\#M]$,即M的内部编码.

定义 1.1. $\langle M_1,\cdots,M_n\rangle\equiv\lambda x.xM_1\cdots M_n$,$U_i^n\equiv\lambda x_1\cdots x_n.x_i$

易见$\langle M_1,\cdots,M_n\rangle U_i^n=M_i(i\leqslant n)$.

S.C.Kleene曾证明

定理 1.2. 存在$E\in\Lambda^{\circ}$,对任何$M\in\Lambda^{\circ}$有$E[M]=M$.这样的E被称为枚举组合子.

证明:参见Barendregt的文章.[2,3]□

命题 1.3. 存在$T,N\in\Lambda^{\circ}$,使对任何$P,Q\in\Lambda$

$$T[P][Q]=[PQ],N[P]=[[P]]$$

证明:参见Hindley的文章[1],第4章.□

---

* 作者宋方敏,1961年生,副教授,主要研究领域为理论计算机科学.

本文通讯联系人:宋方敏,南京210093,南京大学计算机科学系

本文1995—10—05收到修改稿

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

记号 $T^nXY_1\cdots Y_n$ 被定义为 $T^1XY_1\equiv TXY_1, T^{n+1}XY_1\cdots Y_{n+1}\equiv T(T^nXY_1\cdots Y_n)Y_{n+1}$

引理 1.4. $$T^n[X][Y_1]\cdots[Y_n]=[XY_1\cdots Y_n]$$
$$T^n[X](N[Y_1])\cdots(N[Y_n])=[X[Y_1]\cdots[Y_n]]$$

定义 1.5. 设 $F\in\Lambda$，$X\in\Lambda$.

(1) X 为 F 的第一不动点(简称不动点)，指 $X=FX$；

(2) X 为 F 的第二不动点，指 $X=F[X]$，这里$[X]$ 为 X 的内部编码.

关于 λ—演算的著作都提到不动点定理，这是非常重要的性质，以此显示出它的能力，通常提到的结果是

定理 1.6. (1)$(\forall\ F\in\Lambda)(\exists\ X\in\Lambda)X=FX$

(2)$(\exists\ Y\in\Lambda^\circ)(\forall\ F\in\Lambda)YF=F(YF)$

(3)$(\forall\ F\in\Lambda)(\exists\ X\in\Lambda)X=F[X]$

(4)$(\exists\ \Theta\in\Lambda^\circ)(\forall\ F\in\Lambda^\circ)\Theta[F]=F[\Theta[F]]$

然而，对于第二不动点的研究很少. 本文将深入讨论第二不动点的性质. 作者给出关于第二不动点的几个命题，在得到它们之间的强弱关系之后证明了它们，然后作者研究第二不动点组合子(定义见后)，得出关于第二不动点组合子的一个充分条件，这是一个有意义的结果，由此可以作一系列第二不动点组合子. 作者还作出一些其它类型的不动点组合子. 最后作者建立和证明了多元形式的不动点定理.

通过本文的研究，我们对于第二不动点有了更深的了解.

2 第二不动点定理

在本节中，我们先给出关于第二不动点的几个命题，然后研究它们之间的关系，最后证明这些命题.

$(A)\cdots\cdots(\forall\ F\in\Lambda)(\exists\ X\in\Lambda)X=F[X]$

$(B)\cdots\cdots(\forall\ F\in\Lambda^\circ)(\exists\ X\in\Lambda^\circ)X=F[X]$

$(C)\cdots\cdots(\exists\ \theta\in\Lambda^\circ)(\forall\ F\in\Lambda^\circ)\theta[F]=F[\theta[F]]$

定理 2.1. $(C)\Rightarrow(B)\Rightarrow(A)$.

证明：$(C)\Rightarrow(B)$：设 $\theta[F]=F[\theta[F]]$，令 $X\equiv\theta[F]$即可. $(B)\Rightarrow(A)$：对于 $F\in\Lambda$，设 $FV(F)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 令 $G\equiv\lambda zx_1\cdots x_n.F(T^nz[x_1]\cdots[x_n])$，这里 T 的定义见上节. 从而 $G\in\Lambda^\circ$. 由(B)知，有 $X\in\Lambda^\circ$ 使 $G[X]=X$. 因此 $Xx_1\cdots x_n=G[X]x_1\cdots x_n=F(T^n[X][x_1]\cdots[x_n])=F[Xx_1\cdots x_n]$，这里利用引理 1.3，我们有 $Xx_1\cdots x_n$ 为 F 的第二不动点，从而(A)成立.□

定理 2.2. 若(B)成立，则$(\forall\ F\in\Lambda^\circ)(\exists\ X\in\Lambda^\circ)X=FX$(即任何闭项皆有不动点).

证明：假设(B)成立，对于 $F\in\Lambda^\circ$，令 $G\equiv\lambda x.F(Ex)$这里 E 为枚举组合子，从而 $G\in\Lambda^\circ$. 由(B)知，存在 X 使 $G[X]=X$，从而 $X=G[X]\equiv(\lambda x.F(Ex))[X]=F(E[X])=FX$. 因此 $X=FX$.□

定理 2.3. 命题(C)成立.

证明：令 $W\equiv\lambda xy.Ey(T^2x(Nx)(Ny))$，$\Theta_2=W[W]$. 这里 E,T,N 已由上节定义. 易见 $\Theta_2\in\Lambda^\circ$. 对于 $F\in\Lambda^\circ$，

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$\because \Theta_2[F] \equiv W[W][F] = E[F](T^2[W](N[W])(N[F])) = F(T^2[W][[W]][[F]]) = F([W[W][F]]) \equiv F([\Theta_2[F]]) \therefore \Theta_2[F] = F([\Theta_2[F]])$. □

注释:(1)不存在 $\theta \in \Lambda^o$,使对任何 $F \in \Lambda^o$,$\theta F = F[\theta F]$. 这是因为如果分别取 F 为 I 和 **I**,从而$[\theta(\mathbf{I})] = (\mathbf{I})[\theta(\mathbf{I})] = \theta(\mathbf{I}) = \theta \mathrm{I} = \mathrm{I}[\theta \mathrm{I}] = [\theta \mathrm{I}]$,因此$\#(\theta \mathbf{I}) = \#(\theta \mathrm{I})$,矛盾!

(2)而且 $F \in \Lambda^o$ 不能改为 $F \in \Lambda$.

在命题(C)得证之后,由定理 2.1 知,命题(A)和(B)也得证.

命题 2.4. $(\forall F \in \Lambda^o)(\exists X \in \Lambda^o) FX[X] = X$

证明:采用反推形式:

$FX[X] = X \Leftarrow F(E[X])[X] = X \Leftarrow (\lambda x. F(Ex)x)[X] = X \Leftarrow (B)$ □

推论 2.5. $(\forall F \in \Lambda)(\exists X \in \Lambda) FX[X] = X$

证明:由上命题和定理 2.1. 的方法可得. □

3 第二不动点组合子

定义 3.1. 设 $\theta \in \Lambda^o$,称 θ 为第二不动点组合子,指$(\forall F \in \Lambda^o)\theta[F] = F[\theta[F]]$.

在上节中,Θ_2为一个第二不动点组合子,事实上存在许多这样的组合子. 本节为第二不动点组合子提供一个充分条件,并且作出一系列的第二不动点组合子.

命题 3.2. 令 $G \equiv \lambda xy. Ey(Tx(Ny))$,若 θ 为 G 的第二不动点,则 θ 为第二不动点组合子.

证明:设 θ 为 G 的第二不动点,即 $\theta = G[\theta]$. 因为对于任何 $F \in \Lambda^o$,有 $\theta[F] = G[\theta][F] = E[F](T[\theta]N[F]) = F(T[\theta][[F]]) = F[\theta[F]]$,所以 θ 为第二不动点组合子. □

易验证上节的 Θ_2 满足 $\Theta_2 = G[\Theta_2]$,因为 $\Theta_2 \equiv W[W]$,$G[\Theta_2] = \lambda y. Ey(T[\Theta_2](Ny)) = \lambda y. Ey(T_2[W](N[W])(Ny)) = W[W] = \Theta_2$,故 Θ_2为 G 的第二不动点.

命题 3.3. 令 $\theta_0 \equiv \Theta_2$,$\theta_{n+1} \equiv \theta[G]$,则 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n \cdots$都是第二不动点组合子.

证明:对 n 归纳,证明 θ_n 为第二不动点组合子. $n=0$ 时,$\theta_0 \equiv \Theta_2$ 为第二不动点组合子. 假设 θ_n 为第二不动点组合子,从而 $\theta_n[G] = G[\theta_n[G]]$,$\theta_{n+1}$因此 $\theta_{n+1} = G[\theta_{n+1}]$为 G 的第二不动点,由命题 3.2. 知,θ_{n+1}为第二不动点组合子. □

命题 3.4. 设 $M_1 \in \Lambda^o$,令 $Z_1 \equiv \lambda xz_1y. Ey(T^3x(Nx)(Nz_1)(Ny))$,$\theta_{M_1} \equiv Z_1[Z_1][M_1]$,则 θ_{M_1}为第二不动点组合子.

证明:因为 $\theta_{M_1} \equiv Z_1[Z_1][M_1] = \lambda y. Ey(T[Z_1[Z_1][M_1]](Ny)) = \lambda y. Ey(T[\theta_{M_1}](Ny)) = G[\theta_{M_1}]$,所以 θ_{M_1} 为第二不动点组合子. □

易将命题推广成

命题 3.5. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_n \in \Lambda^o$,令 $Z_n \equiv \lambda xz_1 \cdots z_n y. Ey(T^{n+2}x(Nx)(Nz_1)\cdots(Nz_n)(Ny))$,则 $\theta_{M_1,\cdots,M_n} \equiv Z_n[Z_n][M_1]\cdots[M_n]$为第二不动点组合子.

4 多元第二不动点定理

我们将给出 n 元第二不动点定理,先讨论二元情形.

命题 4.1. $(\forall F, G \in \Lambda)(\exists X, Y \in \Lambda) X = F[X][Y] \& Y = G[X][Y]$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

证明：令 $H\equiv\lambda z.<F(Tz[U_1^2])(Tz[U_2^2]),G(Tz[U_1^2])(Tz[U_2^2])>$，由命题($A$)知，$(\exists Z\in\Lambda)Z=H[Z]$，从而 $Z=<F[ZU_1^2][ZU_2^2],G[ZU_1^2][ZU_2^2]>$，$ZU_1^2=F[ZU_1^2][ZU_2^2]$，$ZU_2^2=G[ZU_1^2][ZU_2^2]$，因此令 $X\equiv ZU_1^2$，$Y\equiv ZU_2^2$ 即可. □

对于一元情形，人们可以通过第二不动点组合子一致地得出第二不动点. 对于二元情形也有类似的结果.

命题 4.2. $(\exists\ \rho\in\Lambda^\circ)(\forall\ F,G\in\Lambda^\circ)$

$\rho[F][F][G]=F[\rho[F][F][G]][\rho[G][F][G]]$

$\rho[G][F][G]=G[\rho[F][F][G]][\rho[G][F][G]]$

证明：令 $H\equiv\lambda uzxy.Ez(T^3u(Nx)(Nx)(Ny))(T^3u(Ny)(Nx)(Ny))$

由命题(B)知，$(\exists\ \rho\in\Lambda^\circ)\rho=H[\rho]$，从而 $\rho=\lambda zxy.Ez(T^3[\rho](Nx)(Nx)(Ny))(T^3[\rho](Ny)(Nx)(Ny))$，因此

$\rho[F][F][G]=F[\rho[F][F][G]][\rho[G][F][G]]$

$\rho[G][F][G]=G[\rho[F][F][G]][\rho[G][F][G]]$ □

事实上，若 θ 为第二不动点组合子，则可令 $\rho\equiv\theta[H]$. 对于一般的情形，我们有

命题 4.3. $(\forall\ F_1,\cdots,F_n\in\Lambda)(\exists\ X_1,\cdots,X_n)(\forall\ i\leqslant n)X_i=F_i[X_1]\cdots[X_n]$

命题 4.4. $(\exists\ \rho\in\Lambda^\circ)(\forall\ F_1,\cdots,F_n\in\Lambda^\circ)(\forall\ i\leqslant n)X_i=F_i[X_1]\cdots[X_n]$，这里 $X_i\equiv\rho[F_i][F_1]\cdots[F_n](i=1,2,\cdots,n)$.

以上 2 个命题的证明类似于二元情形.

参考文献

1 Hindley J R, Seldin J P. Introduction to combinators and λ—calculus. Cambridge University Press, 1986.

2 Barendregt H. Self—interpretation in lambda calculus. J. of Functional Programming, 1(2):229～234.

3 Barendregt H. The lambda calculus: its syntax and semantics. North Holland, 1984.

THE SECOND FIXED—POINT THEOREMS IN λ—CALCULUS

Song Fangmin

(*Department of Computer Science* *Nanjing University* *Nanjing* 210093)

Abstract The properties of the secondary fixed—points in λ—calculus are discussed in this paper. The author first shows the relationship among three propositions for the secondary fixed—points and proves these propositions, and then formulates a sufficient condition for the so—called secondary fixed—point combinators and gives a series of such combinators. At last, the author establishes the second fixed—point theorem in the n—ary version.

Key words λ—calculus, the second fixed—point.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn