第 7 卷第 7 期
1996 年 7 月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 7, No. 7
Jul. 1996

一种新的面向参数化绘图的约束管理技术*

陈立平 涂重斌 罗 浩 周 济

(华中理工大学 CAD 中心 武汉 430074)

摘要 参数化设计技术是当代 CAD 技术的核心. 作为该技术基础的几何约束系统的建模与求解,要求对约束进行方便、有效的管理. 为此,本文基于自由度分析、图论、稀疏矩阵及非线性方程等理论,提出了几何约束最大归约理论,实现了几何约束系统的最大分解,并以归约树的形式清晰地表达了系统内在的串、并、耦合机制,并成功地应用于参数化绘图系统中至关重要的约束一致性检查、快速求解等约束管理问题.

关键词 参数化绘图,自由度分析,约束管理,归约.

基于约束的参数化技术是现代 CAD 系统的核心,而几何约束系统的建模及求解是该项技术的关键. 在几何约束系统的建模及求解过程中,如何对约束进行方便、有效、一致性地分解、管理及快速求解是非常重要的问题. 约束管理的优劣将直接影响系统求解的正确性和效率. 对参数化技术产生重要影响的变量几何[1]将图形的约束映射为以特征点坐标为变量的非线性方程组,使几何约束问题完全转化为代数问题. 最终导致其约束分解的可释性较差. 基于产生式规则的几何推理研究[2]虽有良好的可释性,但效率极低,且无效于环路约束. 基于自由度传播的几何约束机研究[3]意识到几何约束系统的最大分解的重要性,然其链路搜索和环路搜索无法实现复杂约束的进一步分解,即其约束机并未能实现最大分解的初衷. 笔者认为一种综合上述方法之长处的新的几何约束理论对于参数化技术具有特别意义.

1 表达与定义

1.1 二元几何约束系统的图表达

在几何约束应用领域,几何约束即关于几何实体二元关系的描述,如平行、垂直、距离、夹角、共面、共线. 因此,几何约束满足问题(GCSP)可以无向图结构描述为:

$$GCG = \langle G, R \rangle$$

其中 GCG 称为几何约束图;$G=\{g \mid g$ 为几何实体$\}$;$R=\{GR\}$;$GR=\{\langle g_i, g_j \rangle \mid g_i, g_j$ 为不同的几何实体且二者之间至少存在一个约束描述$\}$.

---

* 作者陈立平,1964 年生,博士生,主要研究领域为并行工程,智能设计,参数化. 涂重斌,1972 年生,硕士生,主要研究领域为参数化设计. 罗浩,1969 年生,博士生,主要研究领域为参数化设计,人工智能. 周济 1946 年生,教授,博士导师,主要研究领域为智能设计,计算机辅助设计,*CIMS*.

本文通讯联系人:陈立平,武汉 430074,华中理工大学 *CAD* 中心

本文 1995—04—20 收到修改稿

用图的结构来表达一个几何约束系统，不但直观、清晰，而且图的有关算法稳定性好、效率高，应用十分广泛．所以本算法也将采用这种方式．图中的每个顶点表示 1 个几何体，顶点间的弧表示 2 个实体之间存在的几何约束．图 1 给出了二维空间的一组铰接结构及其 GCG．

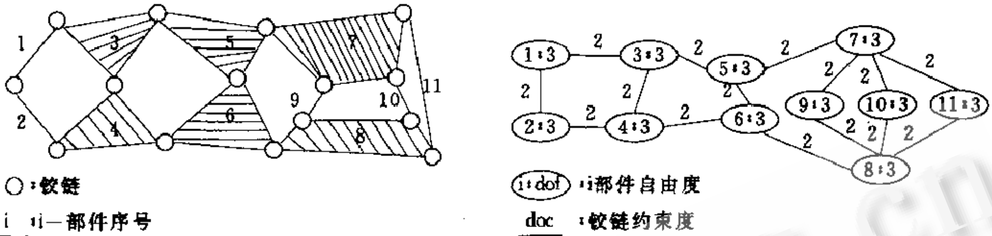

图1　铰接结构及其GCG

1.2　概念与定义

在指定的几何空间中，自由几何体 g 的独立运动数目称为自由几何体的自由度 DOF (degree of freedom)．自由度也可以解释为：描述自由几何体 g 在指定几何空间中的方位的最少独立参量数，称为自由几何体的几何形位参数(Geometric Configuration Parameters)．

几何约束是对几何体间相对位置的限制．不同类型的几何约束对几何体所限制的独立运动的数目不同．在本文中，将这一数目称为该几何约束的约束度 DOC(degree of constraint)．显然，对于由 n 个几何体构成的几何约束系统，该系统自由度 F 可表达为(假定 n 个几何体间存在 m 个几何约束)：

$$F=\sum_{i=1}^{n} DOFi-\sum_{j=1}^{m} DOCj$$

DOF 与 DOC 可分别以顶点权值和弧权值形式记录在 GCG 中(见图 1)．这样的几何约束图 GCG 等价于几何约束网络．

定义 1.　完备几何约束系统 (Complete Geometric Constraint System)

假设在自由空间中，刚体的自由度为 DOR(degree of rigid)．对于由 n 个几何实体，m 个几何约束构成的几何约束系统，如果存在

$$F=\sum_{i=1}^{n} DOFi-\sum_{j=1}^{m} DOCj=DOR$$

的关系，并且对于该几何约束系统中的任一子集(不妨假定该子集包括 p 个几何体和 q 个几何约束)，同时满足

$$\sum_{i=1}^{p} DOFi-\sum_{j=1}^{q} DOCj\geq DOR$$

的关系，则称该几何约束系统为完备几何约束系统．很明显，一个具有确定解的几何约束系统，应该是一个完备几何约束系统．

定义 2.　归约集 RS(reduction set)

如果在一个几何约束图 GCG 中存在一个完备子图，则该子图称为归约集．

归约集的完备性致使归约集中的所有几何体可视为一个几何体，该几何体称为归约体，记为 RG．产生归约体的过程称为归约(Reduction)．归约的具体操作即在无向图 GCG 上，用一个新的结点(归约体)替代归约集 RS 的原有结点，归约体将继承原归约集与其补集的所有弧联系．这样，无向图中的一个结点既可以表示一个单独的几何体，也可表示由多个几何

体构成的归约体.特别指出的是一个完备GCG是其上的最大归约集.可见,归约操作使GCG的规模减小.

定义3. 简单归约集SRS(simple reduction set)

如果在归约集中,除其自身外,不存在任何子集满足完备条件,则称该归约集为简单归约集SRS.由于简单归约集内不可能继续归约,所以简单归约集可视为归约的最小单位,也即约束满足求解的最小单位,所以,若GCG的所有归约操作均为简单归约操作,则称GCG获得了最大分解.

定义4. 单纯完备几何约束系统(Pure Complete Geometric Constraint System)

如果完备GCG中仅存在一简单归约集,则称该GCG是单纯完备的.

定义5. 复合完备几何约束系统(Compound Complete Geometric Constraint System)

如果完备GCG中同时存在2个以上(含2个)简单归约集(见图2),则称该GCG是复合完备的.

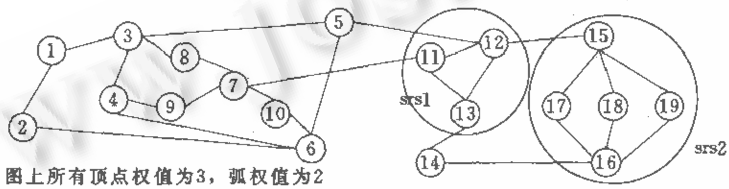

图2 复合完备几何约束系统

定义6. 完全欠约束系统(Complete Underconstrainted Geometric Constraint System)

若在一致的GCG上不存在归约集,称GCG为完全欠约束GCG.

定义7. 基(Base)

在几何约束系统中,被指定了几何形位参数,用作描述其他几何体形位参数的基准的几何体,称为基.

2 几何约束系统中约束的动态管理方法

2.1 归约算法

2.1.1 单纯完备几何约束系统的归约算法

在几何约束系统中的每个几何约束都可以映射为一组方程,其中与约束有关的2个几何体的几何形位参数即是方程变量.方程组中方程个数等于该约束的约束度DOC.把几何约束系统中的每个几何约束都映射为代数方程.联立所有这些方程,构成关于这个几何约束系统的方程组.然后用一个称为结构矩阵的布尔矩阵表明几何约束系统中各个几何体几何形位参数在方程中的存在情况.很明显,完备几何约束系统的结构矩阵列数较行数大DOR.

任意指定几何约束系统中的一个几何体为基,删除结构矩阵中该几何体的几何形位参数列.这样结构矩阵退变为一个方阵.用Duff.I.E的矩阵分块算法对该方阵进行处理[4],得到分块矩阵B,其中各分块矩阵B_i所涉及几何实体实际上描述了该几何系统的归约过程.很显然,取不同的几何体为基,最后得到的分块矩阵不尽相同,所以可从分块矩阵提取有关实体归约的信息.

2.1.2 复合完备几何约束系统的归约算法

根据前面的定义可知，在未经归约的复合完备几何约束系统中，至少存在 2 个简单归约集，使得类似单纯完备几何约束系统中的那种简单归约过程不复存在. 为此，我们引入完备几何约束系统的多层图归约算法来解决复合完备几何约束系统的归约.

把原始的几何约束系统表达为最底层图. 在该层次中寻找所有的简单归约体，如果有，则将它们分别归约成为新顶点，而取代原来的顶点，这样形成新的高一层次的图. 再在新的层次寻找简单归约体，重复原有步骤，直至将最底层图归约为一个顶点，形成最顶层图. 按照归约操作，完备 GCG 最终表达为树，即归约树，见图 5、图 6.

2.2　几何约束系统中约束的动态管理方法

由前面的定义可以看出，如果一个几何约束系统有确定解，则它一定是完备的. 标注的过程实际上是使几何约束系统趋于完备. 而所谓冗余约束可以理解为向一个完备的几何约束系统中增添的约束. 动态约束管理思想的核心就是：当增加标注时，立即寻找到与该约束相关的 2 个几何实体，判断它们是否属于一个归约集. 如果是，则提示用户，该约束为冗余约束，在具体处理上，既可以不予标注，也可以把该约束作为参考约束而记录下来但不参与最后的参数化运算；如果不是，则和通常一样增加该约束到系统中，然后再做一次归约运算，寻找归约体并记录下来，等待用户的下一个标注. 在删除约束时，所不同的只是把该约束从系统中删除，别的工作和增加约束时类似.

下面给出增加约束时的算法步骤：

(1)根据所给几何约束系统，建立初始无向图，即最底层无向图；图中的每 1 个结点表示 1 个实际几何实体，每 1 条弧表示 2 实体间的约束关系.

(2)分别指定无向图中的每个结点为基，做归约运算，将寻找到的各个不同归约体表达为新结点，以取代产生归约体中所包括的原有结点，形成高一层无向图.

(3)判断系统是否完备，如果完备，执行第 6 步.

(4)等待并提示用户进行标注，将标注转化为系统中某 2 个实体的约束，分别从这 2 个实体出发，追溯到最上一层无向图，判断出这 2 个实体是否属于同一归约体. 如果是，则给出提示，不予标注；反之，则允许标注，并记录下该约束.

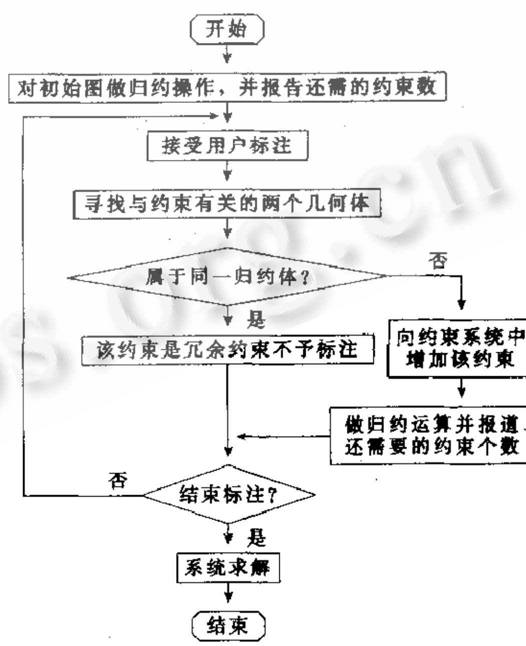

图3 基于归约的约束动态管理策略

(5)如果增加标注，执行第 3 步；否则，执行第 4 步.

(6)对系统求解.

图 3 给出了基于最大归约的约束动态管理流程图.

以下是该算法的类 PASCAL 语言描述.

算法：几何约束系统中约束的动态管理

```
输入:初始无向图 G.
中间变量:tempGraph
    procedure (G)
      begin
        for until 用户终止标注命令 do
          begin
            对 G 作归约运算;
            提示用户标注约束;
            分析与所标约束有关的 2 个几何体,判断 2 个几何体是否属于同一归约集;
            if (属于同一归约集)
              提示用户该约束为冗余约束;
            else
              向初始图 G 中增加该约束;
            end
    end
```

按照上述动态归约思想,处于最上层的 GCG(顶图)始终是完全欠约束的,增加约束的操作在顶图上进行:即一旦增加约束便寻找归约集,并将其做进一步的 SRS 划分.这样约束增加的过程即系统规模减小的过程.

2.3 实例说明

图4给出了一个完备的复合几何约束系统,图5为其 GCG 表达,图6即是基于上述思想对图5所示 GCG 的归约结果.图7则是尺寸 $d1$变动后产生的实例.显然,这种面向实体的系统分解具有良好的几何可释性,在此例中,框内的归约体 $RG11$表达了其2个子实体(2个完备的三角形)之间存在一组完备的标注($DOC=3$)($d7$,$d8$,$d9$),除此之外的其它归约体(集)的约束度均为2,在参数绘图中,方程数大于2的不可再分方程组多不存在封闭解,换言之,基于最大归约对图3 的求解仅需对框内归约体3个约束方程调用数值迭代过程,其余则可采用封闭(解析)求解.约束传播过程(以 $d1$变动为例)如下:约束传播从直接包容 $d1$的归约体 $RG1$开始,沿箭头方向经 $RG2$,$RG3$,$RG4$,$RG5$,$RG11$,$RG12$,$RG13$,到达 $RG14$.在此进程中,系统的局部变动在全局获得了满足.此外该进程包含了子节点向父节点串行传播以及归约体内(兄弟节点间)的耦合传播.当变动来自处于不同分支的归约体时,如 $RG1$,$RG6$内的约束同时变动时,在到达其共同的父辈节点 $RG11$之前,两路传播可并行进行.此例若用变量几何法[1]求解则至少需对6×6非线性方程进行数值迭代,且该方法系统规模随约束增加而增大.

3 结 论

本文以自由度分析、图论、稀疏矩阵分块等理论为基础,提出了在参数化设计中动态管理约束的新思想及算法,实现了几何约束的最大分解,揭示了几何约束系统内在的3种约束传播机制,解决了冗余约束的实时预报以及局部约束冗余判断等关键问题.文中给出了该算法的程序流程图和类 PASCAL 语言描述.该算法思路清晰、结构简单,并能扩展以应用于诸如参数化绘图、装配、实体造型、仿真等领域.该算法已经在 AutoCAD R12上实现,并已应用在参数化软件 PDA 中.

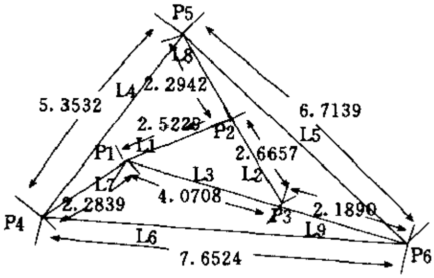

图4

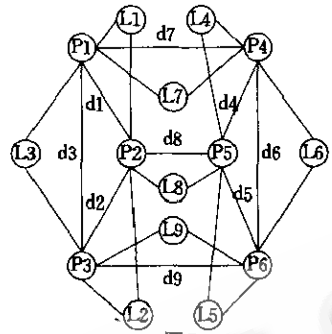

图5

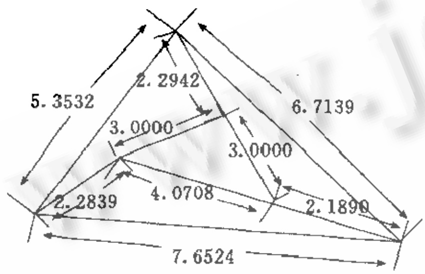

图7

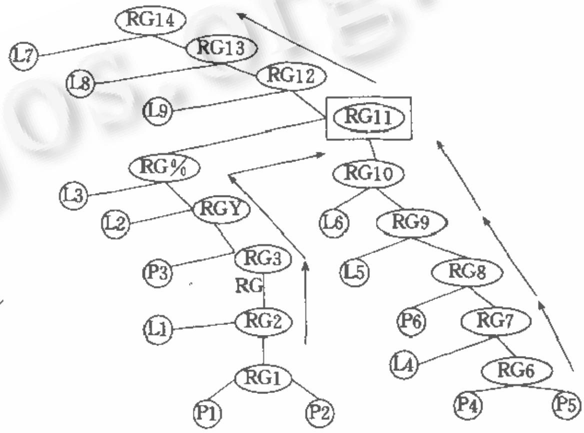

图6

参考文献

1 Light R, Gossard D. Modification of geometric model through variational geometric. CAD, 1982, **14**(4): 209～214.

2 Aldefeld B. Variation of geometric based on geometric reasoning method. CAD, 1988, **20**(3): 117～126.

3 Kramer G A. A geometric constraint engine. Artificial Intelligence, 1992, **58**: 328～355.

4 Duff I E. Direct method for sparse matrix. Oxford: Clarendon Press, 1986.

A NEW METHOD ABOUT CONSTRAINT MANAGEMENT OF PARAMETRIC DRAWING

Chen Liping　Tu Chongbin　Luo Hao　Zhou Ji

(*CAD Centre　Huazhong University of Science and Technology　Wuhan*　430074)

Abstract　Parametric design is the core of the current CAD technology. The way to manage the constraints conveniently and efficiently is required by the procedures to model and solve the geometric constraint system which is the base of parametric design. A new method called as MRA(maximal reduction algorithm) is presented in this paper. It owes

to the application about analysis of degree of freedom, graph theory and sparse matrix theory. The MRA is very effective for geometric constraint consistency checking, maximal decomposition of geometric constraint system and constraint management. It is worth that the MRA express the serial, parallel and coupling mechanism of constraint propagation with reducing tree.

Key words Parametric drawing, analysis of degree of freedom, constraint management, reduction.