第6卷第12期
1995年12月

软件学报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 6, No. 12
Dec. 1995

模态 K_4、D_4 系统的归结推理*

孙吉贵 李乔 刘叙华

(吉林大学计算机科学系,长春 130023)

摘要 本文将P. Enjalbert和L. Farinas del Cerro提出的模态归结推理方法推广到命题模态逻辑 K_4 和 D_4 系统,建立了 K_4 逻辑的归结推理 RK_4;D_4 逻辑的归结推理 RD_4,分别证明了 RK_4 和 RD_4 关于 K_4 和 D_4 的可靠性与完备性.

关键词 模态逻辑 K_4 和 D_4 系统,模态归结,自动推理.

模态逻辑在知识表示、问题求解、逻辑程序语言等计算机科学的许多重要领域显示了其优越性,同时它还是认知逻辑、动态逻辑以及时态逻辑的基础.因此,模态逻辑已成为计算机科学中最重要的一种非经典逻辑.然而,模态逻辑的自动演绎过程不如经典逻辑演绎过程那样简洁有效,这一不足反过来又限制了模态逻辑的进一步应用.因此,模态逻辑自动推理方法的研究是目前自动推理领域一个十分重要的研究课题.

1982年,L. Farinas del Cerro首次把经典逻辑的归结方法推广到命题模态逻辑 K 中[1].1985年,又建立了命题模态逻辑 T 系统的归结推理[2].文献[1,2]中的模态归结虽不完备,但演绎过程符号冗余较少,因此推理效率较高.1989年,P. Enjalbert和Farinas del Cerro重新建立了命题模态逻辑 K,T 的完备归结演绎系统,并推广到命题模态逻辑 $D(Q)$,S_4,S_5 和认知逻辑(epistemic logic)[3].1990年,Y. Auffray等人针对文献[3]中归结系统存在大量符号冗余这一缺点,提出了一些模态归结策略[4].我们在最近的研究中,提出了克服文献[3]中系统部分符号冗余的弱包含删除策略[5].1991年,Cialdea通过已建立的模态逻辑Herbrand定理[6],把命题模态归结推广到一阶模态逻辑D系统中[7].我们在文献[8]中指出了Cialdea系统的不完备性及其修正方法,并建立了一种符号冗余较少的一阶模态归结系统.

本文将文献[3]中的模态归结方法推广到命题模态逻辑 K_4 系统和 D_4 系统,建立了 K_4 和 D_4 的模态归结系统 RK_4 和 RD_4,证明了 RK_4 和 RD_4 分别关于 K_4 和 D_4 的可靠性与完备性.

文中用到的未解释的概念和记号,请参阅文献[3,4].

* 本文1994-06-06收到,1994-11-28定稿

本文是国家自然科学基金、863计划和国家攀登计划资助课题.作者孙吉贵,1962年生,副教授,主要研究领域为定理机器证明与自动推理.李乔,1973年生,硕士生,主要研究领域为模态推理.刘叙华,1937年生,教授,博士导师,主要研究领域为定理机器证明与自动推理.

本文通讯联系人:孙吉贵,长春130023,吉林大学计算机科学系

1 命题模态逻辑 K_4 的归结系统 RK_4 及其可靠性

命题模态逻辑 K_4,从语法上看,它是由命题模态逻辑 K 添加下述公理模式得到的模态逻辑系统:

$$\Box A \to \Box\Box A$$

其中 A 是任意模态公式.

从语义上看,它要求 Kripke 模型可能世界的可达关系 R 具有传递性. 因此 K_4 的模态归结系统必须有反映可达关系具有传递性的归结式计算规则.

下面是 K_4 的归结系统 RK_4 的公理,归结式计算规则和化简规则:

公理. (A_1) $\Sigma(\sim p, p) \to \bot$, (A_2) $\Sigma(\bot, A) \to \bot$

归结式计算规则:

Σ—规则:

$\vee$—规则: $\dfrac{\Sigma(A,B)\to C}{\Sigma(A\vee D_1, B\vee D_2)\to C\vee D_1\vee D_2}$

$\Box\Diamond$—规则: $\dfrac{\Sigma(A,B)\to C}{\Sigma(\Box A, \Diamond(B,E))\to \Diamond(B,C,E)}$

$\Box\Box$—规则: $\dfrac{\Sigma(A,B)\to C}{\Sigma(\Box A, \Box B)\to \Box C}$

$\Box\Diamond'$—规则: $\dfrac{\Sigma(\Box A,B)\to C}{\Sigma(\Box A, \Diamond(B,E))\to \Diamond(B,C,E)}$

$\Box\Box'$—规则: $\dfrac{\Sigma(\Box A,B)\to C}{\Sigma(\Box A, \Box B)\to \Box C}$

Γ—规则:

$\Diamond$—规则 1: $\dfrac{\Sigma(A,B)\to C}{\Gamma(\Diamond(A,B,F))\to \Diamond(A,B,C,F)}$

$\Diamond$—规则 2: $\dfrac{\Gamma(A)\to B}{\Gamma(\Diamond(A,F))\to \Diamond(A,B,F)}$

$\vee$—规则: $\dfrac{\Gamma(A)\to B}{\Gamma(A\vee C)\to B\vee C}$

$\Box$—规则: $\dfrac{\Gamma(A)\to B}{\Gamma(\Box A)\to \Box B}$

其中 A,B,C,D,D_1,D_2 为子句, E,F 为子句集.

化简规则:

(s_1) $\Diamond\bot\approx\bot$ (s_2) $\bot,E\approx\bot$ (s_3) $\bot\vee D\approx D$ (s_4) $A\vee A\vee D\approx A\vee D$

RK_4 的两条推理规则为:

$(R_1)\dfrac{C}{D}$如果 $\Gamma(C)\Rightarrow D$; $(R_2)\dfrac{C_1\quad C_2}{D}$如果 $\Sigma(C_1,C_2)\Rightarrow D$

其中 D 称为 C_1 和 C_2(或 C)的归结式. 即存在 C_1 和 C_2 的直接归结式 D',$\Sigma(C_1,C_2)\to D'$(或 $\Gamma(C)\to D'$),使得 D 是 D' 的完全化简式.

定理 1. RK_4 归结式是其父子句的 K_4 逻辑推论. 即

(1)若 $\Sigma(A,B)\Rightarrow C$,则 $\vdash_{K4} A\wedge B\to C$;

(2)若 $\Gamma(A)\Rightarrow C$,则 $\vdash_{K4} A\to C$.

证明:因为化简规则的两端是 K_4 逻辑等价的,所以我们只需证明 RK_4 的直接归结式是

其父子句的 K_4 逻辑推论.

注意到直接归结式的计算是递归定义的. 因此,可对 $\Sigma(A,B)\to C$(或 $\Gamma(A)\to C$)使用的归结式计算规则的次数 d 使用数学归纳法.

当 $d=1$ 时,只能是 $\Sigma(\sim p,p)\to\bot$ 或 $\Sigma(\bot,A)\to\bot$ 这两条公理. 显然 $\vdash_{K4}p\wedge\sim p\to\bot$,$\vdash_{K4}\bot\wedge A\to\bot$. 结论成立.

假设 $d\leqslant n$ 时结论成立;我们证明 $d=n+1$ 时结论成立.

可以对 $\Sigma(A,B)\to C(\Gamma(A)\to C)$ 最外层使用的归结式计算规则逐条验证. 这里仅以 $\Box\Diamond'$-规则为例,此时 A,B,C 的形式分别为 $\Box A'$,$\Diamond(B',E)$,$\Diamond(B',C',E)$,即

$$\Sigma(\Box A',\Diamond(B',E))\to\Diamond(B',C',E)$$

其中 $\Sigma(\Box A',B')\to C'$.

因为 $\Sigma(\Box A',B')\to C'$ 使用的归结式计算规则次数为 n,由归纳假设知

$$\vdash_{K4}\Box A'\wedge B'\to C'.$$

又因为在 K_4 系统中有

$$\vdash_{K4}\Box A'\to\Box\Box A' \qquad \vdash_{K4}\Box\Box A'\wedge\Diamond(B',E)\to\Diamond(\Box A',B',E)$$

所以

$$\vdash_{K4}\Box A'\wedge\Diamond(B',E)\to\Box\Box A'\wedge\Diamond(B',E)$$

$$\vdash_{K4}\Box\Box A'\wedge\Diamond(B',E)\to\Diamond(\Box A',B',E)$$

$$\vdash_{K4}\Diamond(\Box A',B',E)\to\Diamond(B',C',E)$$

从而

$$\vdash_{K4}\Box A'\wedge\Diamond(B',E)\to\Diamond(B',C',E)$$

即

$$\vdash_{K4}A\wedge B\to C$$

归纳完成.

2　RK_4 的完备性

为了得到 RK_4 的完备性,我们使用 Tableau 推理(或称 Gentzen 结果演算的对偶)[9,10]的方法生成子句集的 K_4-树.

定义 1. 设 S 为子句集,S 的 K_4-树为一树 u,u 的节点均为子句集,且 u 满足:

(1) u 的根为 S;

(2) u 的其它节点是交替使用下面操作 1 和操作 2 得到,直到满足终止条件.

操作 1:重复下列步骤直至不能再进行为止:

(1)选择 u 的一个叶节点 w 及 w 中形式为 $C_1\vee C_2$ 的子句 C;

(2)生成 w 的两个子节点 w_1,w_2:

$$w_1=(w-\{C\})\cup\{C_1\},\qquad w_2=(w-\{C\})\cup\{C_2\}$$

于是,在操作 1 不能应用时,每个叶节点均为单元子句集.

操作 2:对于 u 的每个叶节点 w,

(1)如果有命题变元 p,使得 p 和 $\sim p$ 均在 w 中,则不对其操作;

(2)如果 w 有一祖先节点 w',满足 $w\subset w'$ 或 $w=w'$,则不对其操作.

(3)如果 w 中没有可能算子$\Diamond$约束的单元子句,则不对其操作.

(4)如果 w 中含有可能算子$\Diamond$约束的单元子句,由于 w 为一单元子句集,故 w 为如下

形式：　　$w=L_1,\cdots,L_m,\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond E_1,\cdots,\Diamond E_q$

其中 $q>0$.

生成 w 的 q 个子节点 w_i 如下：

$$w_i=\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond E_i,A_1,\cdots,A_n\qquad(i=1,\cdots,q)$$

其中 E_i 为子句集，$i=1,\cdots,q$.

结束条件：操作 2 不再可应用.

命题 1. 子句集 S 的 K_4—树 u 有限.

证明：因为 u 中子节点中的公式都是其父节点中公式的子公式，所以 u 中任意节点中的公式都是 S 中公式的子公式. 考察 u 的一个分枝，注意到操作 2 的条件(2)，得此分枝中节点的公式集没有重复. 设 S 中有 n 个子句，每个子句的子公式数为 $m_i(i=1,\cdots,n)$，则 S 的所有子公式数为：

$$P=\sum_{i=1}^{n}m_i$$

于是 S 的所有子公式集的幂集的元素数上限为 2^P. 从而分枝长的上限为 2^P，即枝长有限. 再注意到 u 中每个节点的子节点个数有限，由 Konig 无限性引理得 u 有限.

定义 2. 对任一 K_4—树的任一节点，若对其使用了操作 1，则称之为 1 型节点，否则称之为 2 型节点.

定义 3. K_4—树中，节点 w 是封闭的，递归定义如下：

(1) w 中含有互补文字对；

(2) w 是 1 型节点，且 w 的所有子节点是封闭的；

(3) w 是 2 型节点，且存在 w 的子节点是封闭的.

一个 K_4—树称为封闭的，如果它的根节点是封闭的.

定理 2. 若子句集 S 是 K_4—不可满足的，则 S 的任一 K_4—树都是封闭的.

证明：我们证明其逆否命题：若 S 有未封闭的 K_4—树，则 S 存在 K_4—模型.

令 $u=(A,T,r)$ 为 S 的一个未封闭的 K_4—树，对 u 的深度使用数学归纳法可得存在 u 的一个子树 u' 满足：

(1) u' 的任一节点都是非封闭的；

(2) u' 中的 1 型节点在 u' 中仅有一个子节点；

(3) u' 中的 2 型节点在 u' 中子节点与在 u 中子节点相同.

设 w 是 u' 中由结束条件(3)所产生的叶节点，w' 为 w 的一个祖先节点，且 $w\subset w'$ 或 $w=w'$，则视 w 与 w' 为同一节点. 记 u' 经过上述等视处理后的有向图为 u''. 在 u'' 中，设 ρ 是包含序对 (w,w') 的最小等价关系，其中 w 为 1 型节点，且 wTw'. 记 w 所在的等价类为 $|w|$，所有等价类作成的集合为 W. 令 R_0 为 W 上满足下面条件的二元关系：对于任意 W 中的 $|w|$，$|w'|$，$|w|R_0|w'|$ 当且仅当有 $w_1\in|w|$，$w_1'\in|w'|$，使得 w_1Tw_1'. 下面以 W 为可能世界集，构造 K_4—模型 $\langle W,R,m\rangle$：

(1) R 为 R_0 的传递闭包；

(2) $|w|\in m(p)$ 当且仅当存在 $w_1\in|w|$，满足 $p\in w_1$.

下面证明 $\langle W,R,m\rangle$ 为 S 的 K_4—模型. 只需证明对 u'' 中的任一节点 w，及 w 中任一公式 A，有 $|w|\vDash A$；特别对根节点 $r=S$ 中的任一子句 C，有 $r\vDash C$，即 $\langle W,R,m\rangle$ 是 S 的 K_4—

模型.

对于 u''中任一叶节点 w,即不存在 W 中的可能世界$|w'|$,使$|w|R|w'|$.由于 w 是非封闭的,故 w 中没有互补文字对,w 中没有$\Diamond E$ 形式的单元子句.于是对于 w 中$\Box A$ 形式的单元子句,有$|w|\models\Box A$;对 w 中的文字 L,由模型$\langle W,R,m\rangle$的条件(2)知$|w|\models L$.结论成立.

对于 u''中非叶节点 w 中的公式 A,我们对 A 的度[9]$d(A)$使用归纳法(在此忽略符号'$\sim$'产生的度,因为'$\sim$'只约束子句公式中的命题变元).

当 $d(A)=0$ 时,A 为经典命题文字,则由模型$\langle W,R,m\rangle$的条件(2)知,结论成立.

假设 $d(A)\leqslant n$ 时结论成立;我们证明 $d(A)=n+1$ 时结论成立.

若 $A=A_1\vee A_2$,则 w 为 1 型节点,A_1 或 A_2 在 w 的某个后继 w'中,且 $w\rho w'$,不妨设 $A_1\in w'$,则由 $d(A_1)\leqslant n$ 及归纳假设得$|w'|\models A_1$.因为 $w\rho w'$,即$|w|=|w'|$,故$|w|\models A_1$.从而$|w|\models A$.

若 $A=\Diamond E_1$,则存在$|w|$中的 2 型节点 w',使得 $A\in w'$且有 w'的子节点 w'',满足 $E_1\in w''$.于是由 $d(E_1)\leqslant n$ 及归纳假设得$|w''|\models E_1$.因为$|w'|R|w''|$,$|w|=|w'|$,所以$|w|\models\Diamond E_1$.

否则 $A=\Box A_1$,注意到若$\Box A_1\in w$,则$\Box A_1$ 属于 w 的任一后继.若$|w|$中含有 u''的叶节点,则由前部分证明知$|w|\models A$.否则,恰存在一个 2 型节点 w',满足 $w\rho w'$或者 $w'=w$.对于 w'的任一子节点 w_1',有$|w|R|w_1'|$,$A_1\in w_1'$.由 $d(A_1)\leqslant n$ 及归纳假设得$|w_1'|\models A_1$.因为对 w'在 u''中的任一后继 w_2',有$|w|R|w_2'|$,且所有$|w_2'|$作成的集合恰是$|w|$所有可达的可能世界集,所以还需证明对任一$|w_2'|$,有$|w_2'|\models A_1$.注意到$\Box A_1$ 属于 w'在 u''中的每一个后继,故同上可以证明$|w_2'|\models A_1$.因此,$|w|\models A$.归纳完成.

因此,$\langle W,R,m\rangle$是 S 的 K_4—模型.

引理 1. 设 w 是含有 $C=C_1\vee C_2$ 的子句集,若 $w_1=(w-\{C\})\cup\{C_1\}$,$w_2=(w-\{C\})\cup\{C_2\}$都是 RK_4 可反驳的,则 w 是 RK_4 可反驳的.

证明:同经典逻辑归结方法对应结论的证明.

引理 2. 若 $A_1,\cdots,A_n\vdash_{RK4}B$,则$\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}\Box B$.

证明:只需在 $A_1,\cdots,A_n\vdash_{RK4}B$ 的演绎中,每个子句都加上必然算子约束,归结式的计算先使用$\Box\Box$—规则或$\Box$—规则即可.

引理 3. 若$\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}B$,则 $B=\Box B'$,其中 B'为一子句.

证明:对$\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}B$ 的演绎长度 l 使用归纳法.

当 $l=1$ 时,$B=\Box A_i$,$i\in\{1,\cdots,n\}$,结论显然.

假设 $l\leqslant m$ 时结论成立;下面证明 $l=m+1$ 时结论成立.

若演绎的最后一步是使用规则(R_1),$\Gamma(C)\Rightarrow B$,则由归纳假设得 $C=\Box C'$,从而 $B=\Box B'$.

若演绎的最后一步是使用规则(R_2),$\Sigma(B_1,B_2)\Rightarrow B$.即$\dfrac{B_1\quad B_2}{B}$

则由归纳假设知,$B_1=\Box B_1'$,$B_2=\Box B_2'$.注意到$\Box\Box$—规则和$\Box\Box'$—规则的归结式都是必然算子$\Box$约束的子句,故 $B=\Box B'$.归纳完成.

引理 4. 若 $A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n,Q_1,\cdots,Q_r\vdash_{RK4}B(r\geqslant1)$,并且演绎中至少使用了

一个 Q_j，则

当 $B\neq\bot$ 时，有 $\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\Diamond(B,Q_1,\cdots,Q_r,E)$. 其中 E 为子句集.

当 $B=\bot$ 时，有 $\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\bot$.

证明：显然第 2 个结论是第 1 个结论的推论，只需证明 $B\neq\bot$ 的情形. 分 3 种子情形：

(1)若 $A_1,\cdots,A_n,Q_1,\cdots,Q_r\vdash_{RK4}B$，则同文献[3]对 RK 系统证明(引理 2.9)

(2)若 $\Box A_1,\cdots,\Box A_n,Q_1,\cdots,Q_r\vdash_{RK4}B$，则有由(1)的结论得

$$\Box\Box A_1,\cdots,\Box\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\Diamond(B,Q_1,\cdots,Q_r,E).$$

记上述 $\Box A_i$ 前面新填加的必然算子为 $\bigcirc$，即

$$\bigcirc\Box A_1,\cdots,\bigcirc\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\Diamond(B,Q_1,\cdots,Q_r,E).$$

由(1)的证明知，演绎

$$\bigcirc\Box A_1,\cdots,\bigcirc\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\Diamond(B,Q_1,\cdots,Q_r,E)$$

中每一步归结的最外层归结式计算规则为 $\Box\Box$ —规则，$\Box\Diamond$ —规则或 Γ 中的规则.

将上述演绎中的 $\bigcirc$ 算子都去掉，把对 $\bigcirc$ 使用的 $\Box\Box$ —规则或 $\Box\Diamond$ —规则改为 $\Box\Box'$ —规则或 $\Box\Diamond'$ —规则，则得到演绎

$$\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\Diamond(B,Q_1,\cdots,Q_r,E)$$

(3)否则，$A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n,Q_1,\cdots,Q_r\vdash_{RK4}B$.

对得到 B 的演绎长度 l 使用归纳法.

当 $l=1$ 时，$B=Q_i(i\in\{1,\cdots,r\})$，结论显然. 假设 $l\leqslant m$ 时结论成立；我们证明 $l=m+1$ 时结论成立.

记 $A_1,\cdots,A_n$ 为 $\overline{A}$；$\Box A_1,\cdots,\Box A_n$ 为 $\Box\overline{A}$；$Q_1,\cdots,Q_r$ 为 $\overline{Q}$；$\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)$ 为 $\Diamond\overline{Q}$.

如果演绎的最后一步使用的推理规则为 (R_2)，则演绎形式如下：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overline{Q},\Box\overline{A},\overline{A}\\ \mid\\ C_1\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\overline{Q},\Box\overline{A},\overline{A}\\ \mid\\ C_2\end{array}}{B}$$

由已知条件得至少一个 $C_i(i=1,2)$ 依赖于 $\overline{Q}$. 又分为下面 3 种子情形：

(3.1) C_1 依赖于 $\overline{Q}$，且 $\overline{A}\vdash_{RK4}C_2$，则由引理 2 得 $\Box\overline{A}\vdash_{RK4}\Box C_2$. 由于推出 C_1 的演绎长度小于等于 m，故由归纳假设得 $\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(C_2,\overline{Q},E_1)$. 于是有

$$\Sigma(\Diamond(C_1,\overline{Q},E_1),\Box C_2)\Rightarrow\Diamond(B,C_1,\overline{Q},E_1)$$

令 $E=\{E_1,C_1\}$，则　$\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(B,\overline{Q},E)$

(3.2) C_1 依赖于 $\overline{Q}$，且 $\Box\overline{A}\vdash_{RK4}C_2$，则由引理 3 知，$C_2=\Box C_2'$. 由推出 C_1 的演绎长度 $\leqslant m$，及归纳假设得 $\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(B,C_1,\overline{Q},E_2)$. 于是，

$$\Sigma(\Box C_2',\Diamond(C_1,\overline{Q},E_2))\Rightarrow\Diamond(B,C_1,\overline{Q},E_2)$$

其中此步推理的归结式计算规则为 $\Box\Diamond'$ —规则. 因此，

$$\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(B,\overline{Q},E)$$

其中 $E=\{C_1,E_2\}$.

(3.3) C_1 和 C_2 都依赖于 $\overline{Q}$. 因为推出 C_1，C_2 的演绎长度都小于等于 m，故由归纳假

设知： $\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(C_1,\overline{Q},E_1)$， $\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(C_2,\overline{Q},E_2)$

用$\Diamond(C_1,\overline{Q},E_1)$代替演绎$\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(C_2,\overline{Q},E_2)$中的$\Diamond\overline{Q}$.（显然演绎$\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(C_2,\overline{Q},E_2)$的叶节点中只能有一个是$\Diamond\overline{Q}$）.则这样连接起来后的演绎为$RK_4$演绎，且演绎结果为 $\Diamond(C_1,C_2,\overline{Q},E_1,E_2)$

注意到 $\Gamma(\Diamond(C_1,C_2,\overline{Q},E_1,E_2))\Rightarrow\Diamond(B,C_1,C_2,\overline{Q},E_1,E_2)$，

其中用到$\Sigma(C_1,C_2)\Rightarrow B$.因此，$\Box\overline{A},\Diamond\overline{Q}\vdash_{RK4}\Diamond(B,\overline{Q},E)$

其中$E=\{C_1,C_2,E_1,E_2\}$.

如果演绎的最后一步使用的推理规则为(R_1)，则类似于上面的讨论可得到证明.

归纳完成.

综上，我们有 $\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\vdash_{RK4}\Diamond(B,Q_1,\cdots,Q_r,E)$

引理 5. 若$A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}\perp$，则

$$\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}\Box\perp.$$

证明：显然在演绎$A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}\perp$中，至少有一个$A_i(i\in\{1,\cdots,n\})$，参与归结（否则推不出$\perp$）.对此演绎树自叶节点向下做修改：

将叶节点中是A_i的子句改成$\bigcirc A_i(i=1,\cdots,n)$.必然算子记成$\bigcirc$只是为了与原演绎中的必然算子相区别，表达方便.归纳修改如下：

$\Sigma(\bigcirc C_1,\bigcirc C_2)\Rightarrow\bigcirc C$ 如果$\Sigma(C_1,C_2)\Rightarrow C$

$\Sigma(\bigcirc C_1,\Box C_2)\Rightarrow\bigcirc C$ 如果$\Sigma(C_1,\Box C_2)\Rightarrow C$

$\Gamma(\bigcirc C_1)\Rightarrow\bigcirc C$ 如果$\Gamma(C_1)\Rightarrow C$

其中右边条件为原来演绎中用到的归结.则修改后的树仍为RK_4演绎，且推出$\bigcirc\perp$.

推论 1. 若$\{A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n,Q_1,\cdots,Q_r\}$是$RK_4$可反驳的，则$\{\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\}$是$RK_4$可反驳的，其中$r>0$.

证明：若$\{A_1,\cdots,A_n,Q_1,\cdots,Q_r\}$的$RK_4$反驳中，至少用到一个$Q_i,i\in\{1,\cdots,n\}$，则由引理4知，$\{\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\}$是$RK_4$可反驳的.

否则，$A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}\perp$，于是，由引理5得$\Box A_1,\cdots,\Box A_n\vdash_{RK4}\Box\perp$.

令$\Box\perp$与$\Diamond(Q_1,\cdots,Q_n)$做归结得$\perp$.从而$\{\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond(Q_1,\cdots,Q_r)\}$是$RK_4$可反驳的.

定理 3. 若子句集S的K_4－树是封闭的，则S是RK_4可反驳的.

证明：对S的K_4－树深度d使用数学归纳法.

当$d=1$时，S本身为叶节点，由K_4－树是封闭的，故S中含有互补文字对，结论显然.

假设$d\leqslant m$时结论成立；我们证明$d=m+1$时结论成立.

若S为1型节点，则S中存在子句$C=C_1\vee C_2$，且S的子节点为$w_1=(S-\{C\})\cup\{C_1\}$，$w_2=(S-\{C\})\cup\{C_2\}$.因为S的K_4－树是封闭的，故节点w_1和w_2都是封闭的.由w_1和w_2的K_4－树深度都小于等于m，及归纳假设知，w_1和w_2都是RK_4可反驳的.于是，由引理1得S是RK_4可反驳的.

若S为2型节点，则由S是封闭的，故至少存在一个S的子节点w是封闭的，不妨设

$$S=L_1,\cdots,L_k,\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond E_1,\cdots,\Diamond E_q \qquad (q>0)$$

$$w = A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n,Q_1,\cdots,Q_r \qquad (r>0)$$

其中 $E_1=\{Q_1,\cdots,Q_r\}$. 由归纳假设及 w 的 K_4－树深度小于等于 m 得，w 是 RK_4 可反驳的. 再由推论 1 得 $\Box A_1,\cdots,\Box A_n,\Diamond E_1$ 是 RK_4 可反驳的. 从而，S 是 RK_4 可反驳的.

归纳完成.

定理 4. 若子句集 S 是 K_4 不可满足的，则 S 是 RK_4 可反驳的.

证明：由定理 2 和定理 3 即得.

3　命题模态逻辑 D_4 的归结系统 RD_4

命题模态逻辑 D_4 是由命题模态逻辑 K_4 添加如下公理模式形成的：$\Box A \to \Diamond A$. 其中 A 为任一命题模态公式. 从语义上讲，D_4 的 Kripke 模型具有连续性，即对于模型中的任一可能世界 w，都存在 w'，使得 w' 是 w 可达的.

D_4 的归结系统 RD_4 是对 RK_4 系统做如下修改得到的归结系统：

(1)删除 RK_4 中的公理(A_2)：$\Sigma(\bot,A)\to\bot$.

(2)在化简规则中增加一条规则(s_5)：$(s_5)\Box\bot\approx\bot$

这里由于增加了化简规则(s_5)，公理(A_2)成为不独立的冗余公理，当然把它保留在 RD_4 系统中也是可以的.

限于篇幅，在此不再写出详细证明，只简述 RD_4 可靠性与完备性结论的证明思想.

定理 5. RD_4 的归结式是其归结父子句的 D_4 逻辑推论，即

(1)若 $\Sigma(A,B)\Rightarrow C$，则 $\vdash_{D4} A\wedge B\to C$；

(2)若 $\Gamma(A)\Rightarrow C$，则 $\vdash_{D4} A\to C$

证明：化简规则(s_5)的两端是 D_4 系统逻辑等价的，它不影响系统的可靠性. 仍需归纳地对各条归结式计算规则证明其可靠性，只是注意到归结式计算规则的前提不再出现 $\Sigma(\bot,A)\to\bot$ 的形式，当出现空子句 $\bot$ 时，将被化简规则(s_1)，(s_2)，(s_3)和(s_5)所化简，或者归结式计算规则递归计算终结.

定理 6. 若子句集 S 是 D_4 不可满足的，则 S 是 RD_4 可反驳的.

证明：D_4 系统 Tableau 推理生成 D_4－树的过程，只需修改 K_4－树的操作 2 中的(3)为：如果 w 中没有可能算子约束的单元子句，而有必然算子约束的单元子句，不妨设

$$w=L_1,\cdots,L_m,\Box A_1,\cdots,\Box A_n (n>0)$$

则 w 仅生成 1 个子节点　　$w_1=A_1,\cdots,A_n,\Box A_1,\cdots,\Box A_n$.

同样证明子句集 S 是 D_4 不可满足的，则 S 的任一 D_4－树都是封闭的. 进而证明 S 是 RD_4 可反驳的.

4　结　语

粗略地说，模态逻辑的自动推理方法可分为两类：直接演绎和转换演绎. 转换演绎是把模态逻辑转换成一阶或高阶经典逻辑，再使用经典逻辑推理的方法；直接演绎是就模态逻辑本身建立起来的自动推理方法，例如，模态 Tableau 推理[9]，模态 Matrix 证明方法[10]. 模态归结是一种较易实现的直接演绎方法. 由于有多种模态逻辑系统，所以直接演绎总是要对不

同的模态系统建立不同的推理规则，且至少有一条推理规则是刻划各系统本身的特性的.本文是将模态归结推理推广到了模态系统 K_4，D_4，建立起了相应的归结推理规则，使得模态归结成为多种模态系统更广泛的推理方法.同时，本文的工作为我们统一地建立模态系统 K，K_4，D，D_4，T，S_4，S_5 更有效的带有模态算子串合一的归结推理方法做好准备.

参考文献

1 Farinas del Cerro L. A simple deduction method for modal logic. Information Processing Letters, 1982, **14**(**2**): 49—51.

2 Farinas del Cerro L. Resolution modal logics, in logics and models of concurrent systems. Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985. 27—55.

3 Enjalbert P, Farinas del Cerro L. Modal resolution in clause form. Theoretical Computer Science 65, 1989. 1—33.

4 Auffray Y, Enjalbert P, Hebrard J. Strategies for modal resolution: results and problems. Journal of Automated Reasoning 6, 1990. 1—38.

5 孙吉贵，刘叙华.模态归结弱包含删除策略.计算机学报，1994，**17**(**5**)：321—329.

6 Cialdea M, Farinas del Cerro L. A modal herbrand's property. Z. Math. Logic Grundlag. Math. 32, 1986. 523—530.

7 Cialdea M. Resolution for some first—order modal systems. Theoretical Computer Science 85, 1991. 213—219.

8 孙吉贵.基于广义归结的自动定理证明和非经典逻辑的自动推理研究[博士论文].吉林大学，1993.

9 Fitting M. Proof methods for modal and intuitionistic logics. Volume 169 of Synthese Library, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1983.

10 Wallen L A. Automated proof search in non—classical logics. The MIT Press, Cambridge (Massachusetts), London, England, 1989.

MODAL RESOLUTION FOR MODAL SYSTEMS K_4 AND D_4

Sun Jigui Li Qiao Liu Xuhua

(*Department of Computer Science, Jilin University, Changchun* 130023)

Abstract In this paper, the modal resolution method presented by P. Enjalbert and L. Farinas del Cerro is extended to modal systems K_4 and D_4. Then, the soundness and completeness of RK_4 relative to K_4 is proved, and also for RD_4 relative to D_4.

Key words Modal systems K_4 and D_4, Modal resolution, Automated reasoning.