第6卷第9期
1995年9月

软件学报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 6, No. 9
Sep. 1995

维护的证明论系统*

张玉平　　李未

(北京航空航天大学计算机系，北京 100083)

摘要　给定一阶语言及该语言的一个理论，假设需要在理论中添加一个与理论不和谐的语句，并要求保持理论的扩张是和谐的，就必须删除理论内的某些语句.删除理论中尽可能少的语句，即保留理论与需要添加语句和谐的一个极大子集，是构造理论扩张的一种方法.本文构造出了针对上述理论扩张的证明论.该证明论的可靠性及完全性刻划了一般形式的理论扩张与典型的理论扩张间的联系.对于命题逻辑，本文还给出了判定理论扩张的一种方法.

关键词　一阶语言，证明论，公理.

命题逻辑的理论变换有3种形式：扩充、收缩及修改.扩充是指在理论内以集合论的方式添加一些语句，收缩定义为在理论内删除一些语句，而修改的目的则是为了在理论内添加一个与理论不和谐的语句.在假定理论对逻辑结论封闭的前提之下，文献[1]给出了命题逻辑理论变换3种形式所满足的公理，并研究了它们与极大子集选择函数间的关系.假设γ是一个语句集，φ是一个语句，文献[1]定义$\gamma\perp\varphi$为$\{\gamma_0\subseteq\gamma\mid\gamma\nvdash\varphi\}$.应用$\gamma\perp\varphi$的元素，可以构造出理论的收缩函数及理论的修改函数.假设f是一个满足$f(\gamma\perp\varphi)\subseteq\gamma\perp\varphi$的函数.则收缩函数$\dot{-}$被定义为：$\gamma\dot{-}\varphi=\bigcap f(\gamma\perp\varphi)$.即收缩被定义为一些极大集合的交集.应用Levi等式，修改函数被定义为：$\gamma\dot{+}\varphi=Cn((\gamma\dot{-}\neg\varphi)\cup\{\varphi\})$.当命题逻辑理论$\gamma$与一个命题$\varphi$有矛盾，并且需要在理论内添加该命题时，最直接的方式是仅保留$\gamma\perp\varphi$的一个极大子集.但当要求理论对逻辑结论封闭时，这种修改理论的方式却有许多不合理之处.比如文献[1]中曾指出：当γ与φ不和谐时，$\gamma\dot{+}\varphi$总是完备的.为此，我们可以不再要求理论对逻辑结论是封闭的，并定义$\gamma\dot{+}\varphi$等于$\gamma_0\cup\{\varphi\}$，其中$\gamma_0\in\gamma\perp\varphi$.这种修改方法是在文献[2]中引进的，用于构造描述认识进程的R－重构.本文称被保留的极大子集是γ关于φ的一个维护.文献[2]在模型论及证明论的基础上，引进N－重构及R－重构的概念，并以这些概念为依据，当经验模型及假说给定之后，可以从假说开始构造出一个认识进程，它收敛于经验模型中成立的所有语句.在上述理论中，R－重构是最基本的概念，文献[3]给出了R－重构的构造性质.本文将给出上述意义下维护的一个证明论体系.该体系的公理是一些简单的维护，以这些公理为基础并引用类似于证明论中的规则，可以用证明论的方法构造出一般的维护.本文在研究维护

* 本文1994－04－05收到，1995－03－20定稿

本文是在863高技术及国家自然科学基金资助下完成的.作者张玉平，1966年生，副教授，主要研究领域为计算机科学.李未，1943年生，教授，主要研究领域为计算机科学.

本文通讯联系人：张玉平，北京100083，北京航空航天大学计算机系

的证明论系统时将在1个一阶语言的一阶逻辑系统中进行.关于一阶逻辑理论见文献[4,5].本文在讨论过程中将涉及文献[4]中有关Gentzen G证明论系统及Gentzen LK证明论系统的理论.

R—重构的理论是以如下的事实为基础的:若γ是一阶理论的公式集,φ是公式,假设$\gamma\vdash\varphi$,及$\nvdash\varphi$,则存在γ的一个子集γ_0使得:

$$\gamma_0\nvdash\varphi,\text{但对任意的}\ \psi\in\gamma\backslash\gamma_0,\text{有}\ \gamma_0,\psi\vdash\varphi.$$

即γ_0是γ的满足$\gamma_0\nvdash\varphi$的一个极大子集.集合$\gamma_0\cup\{\varphi\}$在文献[2]中被称为是γ关于φ的一个R—重构.子集γ_0的存在性可以有一个简单的证明:考虑偏序集$\langle\{\zeta|\zeta\subseteq\gamma\},\subseteq\rangle$,对于子集$\{\zeta|\zeta\subseteq\gamma,\zeta\nvdash\varphi\}$,从$\nvdash\varphi$可知它是不空的集合,同时对升链的封闭性质又是一阶逻辑紧致性定理的直接推论,因而集合论中的Zorn引理可以确保子集有1个极大元γ_0,并且对每个$\psi\in\gamma\backslash\gamma_0$,有$\gamma_0,\psi\vdash\varphi$.本文称上述集合是$\gamma$关于$\varphi$的一个维护,记作$\Gamma\Rightarrow^1(\varphi)^0$,其中$\Gamma=\{(\varphi)^0|\varphi\in\gamma_0\}\cup\{(\varphi)^1|\varphi\in\gamma\backslash\gamma_0\}$.记号$\Rightarrow^1$的含义将在第2节中有详细的讨论.将语言$\mathscr{L}$的公式附加上标0或1的目的在于指明在构造维护时该保留的公式及需要删除的公式,上标0表示被标号的公式该保留,上标1表示被标号的公式需要被删除.

有一类维护的形式比较简单:假设一阶逻辑的理论γ与语句$\neg\varphi$矛盾,同时$\varphi\in\gamma$,$\gamma-\{\varphi\}\nvdash\varphi$,则$\gamma-\{\varphi\}$就是$\gamma$关于$\varphi$的一个维护.本文将探讨一般形式的维护与这些典型的维护间的关系,此目的的实现是在建立一个类似于证明论的RE—证明论的基础上.RE—证明论将以上述较为简单形式的维护的推广形式为公理,并且具有类似于证明论推导规则的RE—规则,同时在此理论中还可以定义RE—证明树及RE—可证的等概念.可以证明:RE—证明论具有可靠性及完备性,正是此性质可以确保:从比较简单的维护可以构造出一般形式的维护.因而本文用证明论的形式给出了理论修改(即理论扩张)与典型理论修改之间的关系.在文献[1]中,Gärdenfors曾用公理化的形式刻划了这种关系.本文还给出判定维护的一个算法,这为有效构造理论修改及R—重构提供了理论基础.

以下用实例说明定义RE—证明论的直观背景.为了便于讨论,在叙述中,用Gentzen G系统中的可证性(简称为可证性)表示关系$\vdash$.

假设p,q,r,s是4个不同的命题变元,则$p,\neg p\vee q,\neg q\vee r,s\rightarrow r$是可证的.从维护的定义可知$(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(\neg\vee r)^1,(s)^0\Rightarrow^1(r)^0$,记该事实为$v$.$v$成立是因为$p,\neg p\vee q,s\rightarrow r$是不可证的.从$p,\neg p\vee q,\neg q\vee r,s\rightarrow r$的可证性可以推得$p,\neg p\vee q,\neg q,s\rightarrow r$及$p,\neg p\vee q,r,s\rightarrow r$都是可证的,同时$(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(\neg q)^1,(s)^0\Rightarrow^1(r)^0$及$(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(r)^1,(s)^0\Rightarrow^1(r)^0$,这两个事实分别被记为$v_1,v_2$.假设关于维护有这样的运算规则,

$$\frac{(\varphi_1)^0,\cdots,(\varphi_m)^0,(\psi)^1,(\theta_1)^0,\cdots,(\theta_n)^1\Rightarrow^1(\delta)^0\quad(\varphi_1)^0,\cdots,(\varphi_m)^0,(\psi')^1,(\theta_1)^0,\cdots,(\theta_n)^1\Rightarrow^1(\delta)^0}{(\varphi_1)^0,\cdots,(\varphi_m)^0,(\psi\vee\psi')^1,(\theta_1)^0,\cdots,(\theta_n)^0\Rightarrow^1(\delta)^0},\qquad(*)$$

则v可以通过将此规则作用在两个形式较v简单的事实v_1,v_2上而得到.容易看出,上面的规则与证明论中的$\vee$:*left*规则在形式上类似.

对于上述的v_1,若要通过将类似于$\vee$:*left*的规则作用在两个事实上得到,则应当有事实v_1^1,v_1^2,其中$v_1^1\equiv(p)^0,(\neg p)^0,(\neg q)^1,(s)^0\Rightarrow^1(r)^0$,$v_1{}^2\equiv(p)^0,(q)^0,(\neg q)^1,(s)^0\Rightarrow^1(r)^0$.但是$v_1^1$不成立,这是因为$p,\neg p,s\rightarrow r$是可证明的.为此,需要引进关系$\Rightarrow^0$表示此类情况,并改进上述的规则(*),使之适应此情况.这些将在第1节中有详细的定义.

对前一段中的 v_1^2，当把它改写成 $(p)^0,(q)^0,(s)^0\Rightarrow^1(r)^0,(q)^1$ 时，则 v_1^2 可以依据与类似于 $\neg:left$ 的规则作用上述事实（记之为 v_3）而得. 为此，需要推广维护的定义，这也将在第 1 节中给出. 本文在第 1 节中还将给出 RE－有效性、RE－公理、RE－规则、RE－证明树及 RE－可证性的定义. 同时，还构造出了判定 RE－有效性的归结方法. 第 2 节研究了 RE－证明论的可靠性及完全性的证明. 与相关工作的比较在第 3 节中给出.

在定义 RE－证明论系统之前，先将给定语言 $\mathscr{L}$ 的一阶概念做如下推广.

若 φ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，则称 $(\varphi)^i$ 是 RE－公式，$i\in\{0,1\}$. 以下约定以 i,j,k,l 表示自然数子集 $\{0,1\}$ 的元素，并定义 $i\oplus j=\max\{i,j\}$. 为了便于叙述，采用以下的记号：

$(\varphi)^i\vee(\psi)^j\equiv(\varphi\vee\psi)^{i\oplus j}$,

$(\varphi)^i\wedge(\psi)^j\equiv(\varphi\wedge\psi)^{i\oplus j}$,

$(\varphi)^i\supset(\psi)^j\equiv(\varphi\supset\psi)^{i\oplus j}$,

$\neg(\varphi)^i\equiv(\neg\varphi)^i$,

$\exists x(\varphi)^i\equiv(\exists x\varphi)^i$,

$\forall x(\varphi)^i\equiv(\forall x\varphi)^i$,

$(\varphi)^i[t/x]\equiv(\varphi[t/x])^i$.

本文以 $A,B,C,\cdots$ 表示 RE－公式，RE－公式的序列以 $\Gamma,\Delta,\Lambda,\cdots$ 表示，序列 $\langle A_1,\cdots,A_m\rangle$ 也被简记为 $A_1,\cdots,A_m$. 以 $\varphi,\psi,\cdots$ 表示语言 $\mathscr{L}$ 的公式，语言 $\mathscr{L}$ 的公式序列以 $\gamma,\lambda,\cdots$ 表示. 序列 $\langle\varphi_1,\cdots,\varphi_m\rangle$ 也被简记为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$. 当 γ,λ 是语言 $\mathscr{L}$ 的公式时，$\gamma\vdash\bigvee_{\varphi\in\lambda}$ 也简记为 $\gamma\vdash\lambda$. 定义 $ind((\varphi)^i)=i$. 当 Γ 是 RE－公式的序列时，定义 $(\Gamma)_{res}=\langle\varphi\mid(\varphi)^0\in\Gamma\rangle$. 当 Γ,Λ 是 RE－公式的序列，$i=0,1$ 时，称 $\Gamma\rightarrow^i\Lambda$ 是 RE－序列. RE－序列常以 v 附加上下标表示. 记号 $\rightarrow^i$ 是关系 $\Rightarrow^i$ 在 RE－证明论中的形式化.

1　RE－证明论的基本概念

在经典逻辑的证明论中，首先定义由公式序列所构成的列 $\gamma\rightarrow\lambda$，某些列的形式比较简单，被称为公理. 不同的证明论体系有不同的公理，最简单的公理是这样的列 $\gamma\rightarrow\lambda$，其中 γ 及 λ 包含有相同的公式. 证明论中的另一个概念是推导规则. 以公理为基础，引用推导规则定义证明树，就可以构造出复杂形式的列 $\gamma\rightarrow\lambda$，并称 $\gamma\rightarrow\lambda$ 是可证明的，此时 $\gamma\models\bigvee_{\varphi\in\lambda}\varphi$. 另一方面，当 $\gamma\models\bigvee_{\varphi\in\lambda}\varphi$ 时，$\gamma\rightarrow\lambda$ 是可证明的. 这些性质被称为是可靠性及完全性. 其中关系"$\models$"是一阶模型论中的模型与公式间的满足关系. 当 $\gamma\models\bigvee_{\varphi\in\lambda}\varphi$ 时，也称 $\gamma\rightarrow\lambda$ 是一个有效的列. 当证明论系统具有可靠性及完全性时，每个可证的列都是有效的. 同时存在一个过程，使得当输入的列是有效的时，此过程将终止并给出该列的一个证明树. 本文的 RE－证明论系统是在推广经典逻辑证明论的上述概念基础上建立的，正如在引言中所要求的，本文定义 RE－证明论的目的在于指出：从比较简单的维护可以构造出一般形式的维护，即若假定存在 RE－公理的一个递归枚举，则存在一个过程，使得当输入的 RE－序列 $\Gamma\rightarrow^i\Lambda$ 是一个维护时，该过程将终止并给出该 RE－序列的一个构造过程. 为此，需要定义 RE－证明论中这样的一些概念：RE－公理、RE－规则、RE－证明树及 RE－有效性. 因为 RE－证明论的目的在于刻划维护，因而我们用两个刻划维护的关系"$\Rightarrow^i$"$(i=0,1)$描述 RE－证明论中的有效

性，它们对应于经典逻辑模型论中的关系"$\models$". 用关系$\Rightarrow$定义的有效性被称为 RE－有效性. 可以证明：在 RE－证明论中，RE－可证性与 RE－有效性是等价的，即 RE－证明论具有可靠性及完全性.

定义 1. 关系$\Rightarrow^i$

对任意 RE－公式序列 Γ,Λ，记 $\gamma_0=\{\varphi|(\varphi)^0\in\Gamma\}$，$\lambda_0=\{\varphi|(\varphi)^0\in\Lambda\}$. 称$(\Gamma,\Lambda)$具有关系$\Rightarrow^i$，$i=0,1$，若以下条件成立，

(1)若$(\varphi)^1\in\Gamma$，则 $\gamma_0,\varphi\rightarrow\lambda_0$ 是可证的. 若$(\varphi)^1\in\Lambda$，则 $\gamma_0\rightarrow\lambda_0,\varphi$是可证的.

(2)当 $i=1$ 时，$\gamma_0\rightarrow\lambda_0$ 是不可证的.

当 Γ,Λ 具有关系$\Rightarrow^i$，$i=0,1$ 时，也记为 $\Gamma\Rightarrow^i\Lambda$，并称 $\Gamma\rightarrow^i\Lambda$ 是一个 RE－有效的 RE－序列.

从以上的定义可以看出，当 $\Lambda=\{(\varphi)^0\}$，$i=1$ 时，γ_0 正是本文开始时所定义的维护.

定义 2. RE－公理

假设 Γ,Λ 是 RE－公式的序列，记 $\gamma_0=\{\varphi|(\varphi)^0\in\Gamma\}$，$\lambda_0=\{\varphi|(\varphi)^0\in\Lambda\}$. 称 $\Gamma\rightarrow^i\Lambda$ 是 RE－证明论的一个 RE－公理，若以下条件成立：

(1)存在公式 φ，使得$(\varphi)^0\in\Gamma\cap\Lambda$，或者对任意的公式 φ 当$(\varphi)^1\in\Gamma$(或 Λ)时，$(\varphi)^0\in\Lambda$(或 Γ).

(2)当 $i=1$ 时，$\gamma_0\rightarrow\lambda_0$ 是不可证的.

易知当 $\Gamma\rightarrow^i\Lambda$ 是 RE－公理时，$\Gamma\Rightarrow^i\Lambda$.

例：(1)假设 p,q,r 是 3 个不同的命题变元，则

$$(p)^0,(q)^0\rightarrow^1(p)^1,(q)^1,(r)^0,\text{及}(p\wedge q)^0\rightarrow^0(p)^0,(q)^1$$

都是 RE－公理.

(2)假设 $R(x)$是语言 $\mathscr{L}$ 的一元关系符号，则

$$(R(x))^1\rightarrow^1(\exists\ xR(x))^0,(R(x))^0.$$

是 RE－公理.

类似于 Gentzen 证明论系统的证明论推导规则，如下定义 RE－证明论的 RE－规则. 正如本文开始时所指出的，这些规则是建立 RE－证明论所必须的. 它们的直观意义可以从第 2 节中的可靠性及完全性证明中更清楚地看出.

定义 3. RE－规则

假设 Γ,Σ 是任意的 RE－公式的序列，A,B 是任意的 RE－公式，以下关于 RE－序列的运算规则被称为是 RE－规则，每个规则都是由一个或多个前提及一个结论构成的.

Contraction：
$$\frac{A,A,\Gamma\rightarrow^i\Delta}{A,\Gamma\rightarrow^i\Delta}(left)\qquad\frac{\Gamma\rightarrow^i\Delta,A,A}{\Gamma\rightarrow^i\Delta,A}(right)$$

Exchange：
$$\frac{\Gamma,A,B,\Delta\rightarrow^i\Lambda}{\Gamma,B,A,\Delta\rightarrow^i\Lambda}(left)\qquad\frac{\Gamma\rightarrow^i\Delta,A,B,\Lambda}{\Gamma\rightarrow^i\Delta,B,A,\Lambda}(right)$$

$$\frac{\Gamma,A,B\rightarrow^i\Sigma}{\Gamma,(A\wedge B)\rightarrow^i\Sigma}(\wedge:left)$$

$$\frac{\Gamma\rightarrow^i\Sigma,A\quad\Gamma\rightarrow^j\Sigma,B\quad ind(A)=ind(B)}{\Gamma\rightarrow^{i\oplus j}\Sigma,(A\wedge B)}(\wedge:right)$$

$$\frac{\Gamma,A\rightarrow^i\Sigma\quad\Gamma,B\rightarrow^j\Sigma\quad ind(A)=ind(B)}{\Gamma,(A\vee B)\rightarrow^{i\oplus j}\Sigma}(\vee:left)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A, B}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, (A \vee B)}(\vee: right)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} A, \Lambda \quad B, \Gamma \rightarrow^{j} \Lambda \quad ind(A)=ind(B)}{\Gamma, (A \supset B) \rightarrow^{i\oplus j} \Lambda}(\supset: left)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow^{i} B, \Lambda}{\Gamma \rightarrow^{i} A \supset B, \Lambda}(\supset: right)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} A, \Sigma}{\Gamma, \neg A \rightarrow^{i} \Sigma}(\neg: left)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow^{i} \Sigma}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, \neg A}(\neg: right)$$

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \rightarrow^{i} \Sigma, \text{若 } i=1, ind(\forall\ xA)=0 \text{ 则} \forall\ xA \in \Gamma}{\Gamma, \forall\ xA \rightarrow^{i} \Sigma}(\forall\ : left)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A[y/x]}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, \forall\ xA}(\forall\ : right)$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \rightarrow^{i} \Sigma}{\Gamma, \exists\ xA \rightarrow^{i} \Sigma}(\exists\ : left)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A[t/x] \text{若 } i=1, ind(\exists\ xA)=0 \text{ 则} \exists\ xA \in \Sigma}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, \exists\ xA}(\exists\ : right)$$

在上述规则中，x 是任意的变元，y 在 A 中对 x 自由但不在 A 中自由除非 $y=x$. 项 t 对 A 中的 x 自由. 在($\forall$:*right*)及($\exists$:*left*)中，变元 y 在结论中不自由出现.

上述每个规则都是有一个或几个前提及一个结论组成的，其中 contraction，exchange，$\wedge$:*left*，$\vee$:*right*，$\supset$:*right*，$\neg$:*left*，$\neg$:*right*，$\forall$:*left*，$\forall$:*right*，$\exists$:*left*，$\exists$:*right* 被称为是单前提 RE—规则，其它规则被称为是双前提 RE—规则. 对任意 RE—公式序列 Γ,Σ，及任意 RE—公式 A,B，称

$$\frac{A,A,\Gamma \rightarrow^{i} \Delta}{A,\Gamma \rightarrow^{i} \Delta},\quad \frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow^{i} \Delta, A},\quad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow^{i} \Lambda}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow^{i} \Lambda},\quad \frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \rightarrow^{i} \Delta, B, A, \Lambda},\quad \frac{\Gamma, A, B \rightarrow^{i} \Sigma}{\Gamma, (A \wedge B) \rightarrow^{i} \Sigma},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A, B}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, (A \vee B)},\quad \frac{A, \Gamma \rightarrow^{i} B, \Lambda}{\Gamma \rightarrow^{i} A \supset B, \Lambda},\quad \frac{\Gamma \rightarrow^{i} A, \Sigma}{\Gamma, \neg A \rightarrow^{i} \Sigma},\quad \frac{A, \Gamma \rightarrow^{i} \Sigma}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, \neg A},\quad \frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A[y/x]}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, \forall\ xA},\quad \frac{\Gamma, A[y/x] \rightarrow^{i} \Sigma}{\Gamma, \exists\ xA \rightarrow^{i} \Sigma}$$

分别是 contraction left，contraction right，exchange left，exchange right，$\wedge$:*left*，$\vee$:*right*，$\supset$:*right*，$\neg$:*left*，$\neg$:*right*，$\forall$:*right*，$\exists$:*left* 的一个实例.

当 $ind(A)=ind(B)$ 时，

$$\frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A \quad \Gamma \rightarrow^{j} \Sigma, B}{\Gamma \rightarrow^{i\oplus j} \Sigma, (A \wedge B)},\quad \frac{\Gamma, A \rightarrow^{i} \Sigma \quad \Gamma, B \rightarrow^{j} \Sigma}{\Gamma, (A \vee B) \rightarrow^{i\oplus j} \Sigma},\quad \frac{\Gamma \rightarrow^{i} A, \Lambda \quad B, \Gamma \rightarrow^{j} \Lambda}{\Gamma, (A \supset B) \rightarrow^{i\oplus j} \Lambda}$$

分别被称为是 $\wedge$:*right*，$\vee$:*left*，$\supset$:*left* 的一个实例. 若 $i=1, ind(\forall\ xA)=0$，$\forall\ xA \in \Gamma$，则 $\frac{\Gamma, A[t/x] \rightarrow^{i} \Sigma,}{\Gamma, \forall\ xA \rightarrow^{i} \Sigma}$ 被称为是$\forall$:*left* 的一个实例. 若 $i=1, ind(\exists\ xA)=0$，$\forall\ xA \in \Sigma$ 则 $\frac{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, A[t/x]}{\Gamma \rightarrow^{i} \Sigma, \exists\ xA}$ 被称为是 $\exists$:*right* 的一个实例.

Gentzen 证明论系统中通过定义证明树的方法刻划同可证性，我们也可以如下定义 RE—证明树. 在下面的讨论中，为了简单起见，不区分树的结点与结点的标号.

定义 4. RE—证明树，RE—可证性

RE－证明树的集合是满足以下条件最小的集合 S，S 的每个元素都是树，且树的每个结点都是一个 RE－序列，

(1)若 $\Gamma\to^i\Sigma$ 是 RE－公理，则仅有一个结点的树 $\Gamma\to^i\Sigma$ 属于 S.

(2)若 $t\in S$，$\Gamma\to^i\Sigma$ 是 t 的根，$\dfrac{\Gamma\to^i\Sigma}{\Gamma'\to^i\Sigma'}$ 是某个单结点 RE－规则的一个实例，则树 t' 属于 S. 其中 t' 以 $v\equiv\Gamma'\to^i\Sigma'$ 为根，v 仅有一个子结点 $\Gamma\to^i\Sigma$，且 t' 的以 $\Gamma\to^i\Sigma$ 为根的子树与 t 同构.

(3)若 $t_1,t_2\in S$，$\Gamma_1\to_i\Sigma_1$，$\Gamma_2\to^i\Sigma_2$ 分别是 t_1,t_2 的根，$\dfrac{\Gamma_1\to^i\Sigma_1\quad\Gamma_2\to^i\Sigma_2}{\Gamma'\to^i\Sigma'}$ 是某个双结点 RE－规则的一个实例，则树 t' 属于 S. 其中 t' 以 $v\equiv\Gamma'\to^i\Sigma'$ 为根，v 仅有两个子结点 $\Gamma_j\to^i\Sigma_j$，且 t' 的以 $\Gamma_j\to^i\Sigma_j$ 为根的子树等同于 t_j，$j=0,1$.

当 $\Gamma\to^i\Sigma$ 是某个 RE－证明树的根时，称它是 RE－可证的.

以下的例子给出两个 RE－可证的 RE－序列.

例 1：假设 p,q,r 是 3 个不同的命题变元，则 $(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(\neg q\vee r)^1\to^1(r)^0$ 是 RE－可证的. 从定义可知，以下的 RE－序列是 RE－公理，

(1) $(p)^0\to^0(r)^0,(p)^0,(q)^1$,

(2) $(p)^0,(q)^0\to^1(r)^0,(q)^1$,

(3) $(p)^0,(r)^1\to^0(p)^0,(r)^0$,

(4) $(p)^0,(q)^0,(r)^1\to^1(r)^0$.

据($\neg$:*left*)及以上公理可知，

(5) $(p)^0,(\neg p)^0,(\neg q)^1\to^0(r)^0$,

(6) $(p)^0,(q)^0,(\neg q)^1\to^1(r)^0$,

(7) $(p)^0,(\neg p)^0,(r)^1\to^0(r)^0$,

(8) $(p)^0,(q)^0,(r)^1\to^1(r)^0$.

据(5)及(6)和($\vee$:*left*)可得(9)，据(7)及(8)和($\vee$:*left*)可得(10)，

(9) $(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(\neg q)^1\to^1(r)^0$,

(10) $(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(r)^1\to^1(r)^0$.

据(9)及(10)和($\vee$:*left*)可得：$(p)^0,(\neg p\vee q)^0,(\neg q\vee r)^1\to^1(r)^0$.

例 2：假设 p 是命题变元，$Q(x)$ 是一元谓词符号，则 RE－序列

$$(\exists x(p\supset Q(x)))^0,(p)^1\to^1(\exists zQ(z))^0,$$

是 RE－可证的. 这是因为，

(1) $(\exists x(p\supset Q(x)))^0,(Q(y))^0,(p)^1\to^0(Q(y))^0,(\exists zQ(z))^0$，及

(2) $(\exists x(p\supset Q(x)))^0,(p)^1\to^1(p)^0,(\exists zQ(z))^0$,

是 RE－公理. 将($\exists$:*right*)作用于(1)，可得以下的序列，

(3) $(\exists x(p\supset Q(x)))^0,(Q(y))^0,(p)^1\to^0(\exists zQ(z))^0$.

把($\supset$:*left*)作用于(2)及(3)，可得(4)，

(4) $(\exists x(p\supset Q(x)))^0,(p\supset Q(y))^0,(p)^1\to^1(\exists zQ(z))^0$.

因而 $(\exists x(p\supset Q(x)))^0,(p)^1\to^1(\exists zQ(z))^0$ 是 RE－可证的.

容易看出，RE－证明论的概念都是经典逻辑证明论中相应概念的推广. 可以证明 RE－

证明论也具有可靠性及完全性.这正是以下的定理,此定理的证明将在第 2 节中给出.

定理 1. RE—证明论具有可靠性及完全性,即对任意 RE—公式序列 Γ 及 Σ, RE—序列 $\Gamma\to^i\Sigma$ 是 RE—有效的当且仅当它是 RE—可证的,其中 $i=0,1$.

当 $\gamma\nvdash\varphi$ 时,若 $\gamma_0\subset\gamma$ 是一个维护,

$$\Gamma=\{(\varphi)_0\mid\varphi\in\gamma_0\}\cup\{(\varphi)^1\mid\varphi\in\gamma\setminus\gamma_0\},$$

则 $\Gamma\to^1(\varphi)^0$ 是可证的.另一方面,当 $\Gamma'\to^1(\varphi)^0$ 且 $\{\varphi\mid(\varphi)^i\in\Gamma,i=0,1\}=\gamma$ 时,$\gamma'=\{\varphi\mid(\varphi)^0\in\Gamma'\}$是 γ 关于 φ 的一个维护.正是因为 RE—证明论的可靠性及完全性,可以保证一般形式的维护可以从 RE—公理构造出.因而若假定存在 RE—公理的一个递归枚举,则维护的集合也是递归可枚举的.

针对命题逻辑,可以假设 RE—公理有较简单的形式.即:$\Gamma\to^i\Sigma$ 是 RE—公理,若它除了满足定义 2 中的条件外,还满足以下条件:当 $A\in\Gamma\cup\Lambda$ 时,存在命题变元 p 及 $i=0$ 或 1,使得 $A=(p)^i$.因而 RE—公理可以递归枚举,从而维护的集合也是递归可枚举的.事实上,针对命题逻辑,存在一个判定 RE—序列的 RE—有效性的算法.以下将给出这样的一个算法,它的基础是经典逻辑的归结理论.为此,采用这样的约定:以 $p,q,r,\cdots$表示命题变元,以 Γ 表示 RE—公式的集合而不再是一个序列.一个命题变元或命题变元的非被称为是文字,当 φ是文字时,定义

$$\neg\varphi=\begin{cases}\neg p, & 若\ \varphi=p,\\ p, & 若\ \varphi=\neg p.\end{cases}$$

并且假设

$$\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m\ 等同于\ \varphi_{\pi(1)}\vee\cdots\vee\varphi_{\pi(m)},$$
$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m\ 等同于\ \varphi_{\pi(1)}\wedge\cdots\wedge\varphi_{\pi(m)},$$

其中 π 是集合$\{1,\cdots,n\}$的一个置换.

<u>判定 RE—序列的 RE—有效性的归结方法</u>

对任意的 RE—序列 $\Gamma\to^i\Lambda$,以下给出判定它 RE—有效性的归结方法.据 RE—证明论的可靠性及完全性,可以假定:$\Lambda=\varnothing$.当$(\varphi)^0\in\Gamma$ 时,φ 是一个合取范式.当$(\varphi)^1\in\Gamma$ 时,φ 是一个析取范式.同时,若$(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n)^0\in\Gamma$,则可以将它用 RE—公式$(\varphi_1)^0,\cdots,(\varphi_n)^0$ 替换.若$(\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_n)^1\in\Gamma$,则可以将它用 RE—公式$(\varphi_1)^1,\cdots,(\varphi_n)^1$ 替换.因而,我们只需判定满足以下条件 RE—序列 $\Gamma\to^i$ 的 RE—有效性,

$$\begin{aligned}&(1)当(\varphi)^0\in\Gamma\ 时,存在文字\ \varphi_1,\cdots,\varphi_m,使得\ \varphi\equiv\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m.\\&(2)当(\varphi)^1\in\Gamma\ 时,存在文字\ \varphi_1,\cdots,\varphi_m,使得\ \varphi\equiv\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m.\end{aligned}\qquad(*)$$

定义 **f**,**g** 分别是满足以下条件的二元部分函数,

$$\mathbf{f}((\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m\vee\theta)^0,(\psi_1\vee\cdots\vee\psi_n\vee\neg\theta)^0)=(\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m\vee\psi_1\vee\cdots\vee\psi_n)^0.$$

$$\mathbf{g}((\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m\vee\theta)^0,(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\theta)^1)=\{(\varphi_k\wedge\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\theta)^1\mid k=1,\cdots,m\}.$$

如下定义 RE—公式的集合列$\{\Gamma_n\}\mid n\in\omega\}$:

$$\Gamma_0=\Gamma,$$

$$\Gamma_{n+1}=\{A\mid A\in\Gamma_n,ind(A)=0\}\cup\mathbf{f}(\Gamma_n\times\Gamma_n)\cup\mathbf{S},n\in\omega.$$

其中 $\mathbf{S}=\{(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_m)^1\in\bigcup\mathbf{g}(\Gamma_n\times\Gamma_n)\mid$不存在 ψ_k 使得$\neg\psi_k\in\{\psi_1,\cdots,\psi_m\}$或$(\neg\psi_k)^0\in\Gamma_n\}$, $n\in\omega$.

据经典逻辑的归结理论,可以证明以下的定理:

定理 2. 假设 $\Gamma \to^{1}$ 是一个满足条件(*)的RE－序列，则它是RE－有效的当且仅当存在 $n \in \omega$，使得 $\{A \mid A \in \Gamma_n, ind(A)=0\} = \{A \mid A \in \Gamma_{n+1}, ind(A)=0\}$
并且 Γ_n 内的每个公式的标号为0，同时不存在命题变元 p 使得 $p, \neg p \in \Gamma_n$.

2 可靠性及完全性的证明

RE－证明论的可靠性及完全性的证明分别是通过对RE－证明树及经典逻辑的证明树的结构复杂性归纳证明的. 为便于讨论，将可靠性及完全性的证明分为两个引理证明.

引理 1. RE－证明论的可靠性

假设 Γ, Δ 是RE－公式的序列，$i=0,1$. 若 $\Gamma \to^{i} \Delta$ 是RE－可证明的，则 $\Gamma \Rightarrow^{i} \Delta$.

证明：RE－证明论可靠性的证明类似于Gentzen G系统的可靠性的证明. 首先，若 $\Gamma \to^{i} \Delta$ 是RE－公理，从定义可知 $\Gamma \Rightarrow^{i} \Delta$，因而只需证明若 $\Gamma_1 \to^{i_1} \Delta_1, \Gamma_2 \to^{i_2} \Delta_2$ 则当

$$\frac{\Gamma_1 \to^{i_1} \Delta_1}{\Gamma \to^{i} \Delta}, \text{或} \frac{\Gamma_1 \to^{i_1} \Delta_1 \quad \Gamma_2 \to^{i_2} \Delta_2}{\Gamma \to^{i} \Delta}$$

是某个RE－规则的实例时，$\Gamma \Rightarrow^{i} \Delta$. 为此，以下仅讨论几个典型的情形. 即上述式子是 $\wedge$:*left*, $\wedge$:*right*, $\forall$:*left*, $\forall$:*right* 的实例的情形.

(1)若 $\Gamma, A, B \Rightarrow^{i} \Sigma$，则 $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow^{i} \Sigma$.

假设 $A=(\varphi)^{j}, B=(\psi)^{k}$，考虑以下子情形：

(1.1) $i=1, j=0, k=0$，此时 $A \wedge B = (\varphi \wedge \psi)^{0}$.

对每个 $(\theta)^{1} \in \Gamma$，从 $\Gamma, A, B \Rightarrow^{i} \Sigma$，可知 $(\Gamma)_{res}, \varphi, \psi, \theta \vdash (\Sigma)_{res}$. 对每个 $(\theta)^{1} \in \Sigma$，从 $\Gamma, A, B \Rightarrow^{i} \Sigma$，可知 $(\Gamma)_{res}, \varphi, \psi \vdash (\Sigma)_{res}, \theta$. 又因为 $(\Gamma)_{res} \nvdash (\Sigma)_{res}$，从而 $\Gamma, A \wedge B, A \Rightarrow^{i} \Sigma$.

(1.2) $i=1, j=0, k=1$，此时 $A \wedge B = (\varphi \wedge \psi)^{1}$.

从 $\Gamma, A, B \Rightarrow^{i} \Sigma$，可知 $(\Gamma)_{res}, \varphi \nvdash (\Sigma)_{res}$，因而 $(\Gamma)_{res} \nvdash (\Sigma)_{res}$，另一方面，从 $(\Gamma)_{res}, \varphi, \psi \vdash (\Sigma)_{res}$ 又可知 $(\Gamma)_{res}, \varphi \wedge \psi \vdash (\Sigma)_{res}$. 又因为当 $(\theta)^{1} \in \Gamma$ 时，$(\Gamma)_{res}, \varphi \wedge \psi, \theta \vdash (\Sigma)_{res}$. 当 $(\theta)^{1} \in \Sigma$ 时，$(\Gamma)_{res}, \varphi \wedge \psi \vdash (\Sigma)_{res}, \theta$. 从而 $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow^{i} \Sigma$.

(1.3) $i=0, j=0, k=1$，此时 $A \wedge B = (\varphi \wedge \psi)^{1}$.

从 $(\Gamma)_{res}, \varphi, \psi \vdash (\Sigma)_{res}$，可知 $(\Gamma)_{res}, \varphi \wedge \psi \vdash (\Sigma)_{res}$. 当 $(\theta)^{1} \in \Sigma$ 时，$(\Gamma)_{res}, \varphi \wedge \psi \vdash (\Sigma)_{res}, \theta$. 因而 $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow^{i} \Sigma$.

(1.4) 当 (i,j,k) 是三元组(1,1,1)，(1,1,0)，(0,0,0)，(0,1,0)，(0, 1,1)时的子情形可以用类似的方法证明.

(2) 若 $\Gamma \Rightarrow^{i} \Sigma, A, \Gamma \Rightarrow^{j} \Sigma, B, ind(A) = ind(B)$，则 $\Gamma \Rightarrow^{i \oplus j} \Sigma, A \wedge B$.

假设 $A=(\varphi)^{k}, B=(\psi)^{l}$，考虑以下子情形：

(2.1) $i=0, j=0, k=0, l=0$.

此时只需证明当 $(\theta)^{1} \in \Gamma$(当 $(\theta)^{1} \in \Sigma$ 时可以类似讨论) $(\Gamma)_{res}, \theta \vdash (\Sigma)_{res}, \varphi \wedge \psi$. 它成立是因为 $(\Gamma)_{res}, \theta \vdash (\Sigma)_{res}, \varphi, \quad (\Gamma)_{res}, \theta \vdash (\Sigma)_{res}, \psi$.

(2.2) $i=0, j=0, k=1, l=1$.

此时 $A \wedge B = (\varphi \wedge \psi)^{1}$. 从 $(\Gamma)_{res} \vdash (\Sigma)_{res}, \varphi$，及 $(\Gamma)_{res} \vdash (\Sigma)_{res}, \psi$，可知 $(\Gamma)_{res} \vdash (\Sigma)_{res}, \varphi \wedge \psi$. 因而 $\Gamma \Rightarrow^{i \oplus j} \Sigma, A \wedge B$.

(2.3) $i=0, j=1, k=0, l=0$.

从$(\Gamma)_{res}\nvdash(\Sigma)_{res},\psi$,可知$(\Gamma)_{res}\nvdash(\Sigma)_{res},\varphi\wedge\psi$. 因而$\Gamma\Rightarrow^{i\oplus j}\Sigma,A\wedge B$.

(2.4) $i=0$, $j=1$, $k=1$, $l=1$.

从 $\Gamma\rightarrow^1\Sigma,A$ 可知$(\Gamma)_{res}\nvdash(\Sigma)_{res}$从 $\Gamma\rightarrow^1\Sigma,A$ 及 $\Gamma\rightarrow^1\Sigma,B$ 可知$(\Gamma)_{res}\vdash(\Sigma)_{res},\varphi$及$(\Gamma)_{res}\vdash(\Sigma)_{res},\psi$. 另一方面,当$(\theta)^1\in\Gamma$时,$(\Gamma)_{res},\theta\vdash(\Sigma)_{res},\varphi$及$(\Gamma)_{res},\theta\vdash(\Sigma)_{res},\psi$. 当$(\theta)^1\in\Sigma$时,$(\Gamma)_{res}\vdash(\Sigma)_{res},\varphi,\theta$及$(\Gamma)_{res}\vdash(\Sigma)_{res},\psi,\theta$. 从而$\Gamma\Rightarrow^{i\oplus j}\Sigma,A\wedge B$.

(2.5) 当(i,j)是二元组$(1,0)$或$(1,1)$时的子情形可以类似地证明.

(3) 若 $\Gamma\Rightarrow^i\Sigma,A[y/x]$,则 $\Gamma\Rightarrow^i\Sigma,\forall xA$.

假设 $A[y/x]=(\varphi[y/x])^j$,考虑以下子情形:

(3.1) $i=0$

此时只需应用 Gentzen G 系统的($\forall$:*right*)规则即可证明.

(3.2) $i=1$, $j=0$

从 $\Gamma\rightarrow^1\Sigma,A[y/x]$可知,$(\Gamma)_{res}\nvdash(\Sigma)_{res},\varphi[y/x]$,因而$(\Gamma)_{res}\nvdash(\Sigma)_{res},\forall x\varphi$. 当$(\theta)^1\in\Gamma$时,$(\Gamma)_{res},\theta\vdash(\Sigma)_{res},\forall x\varphi$. 当$(\theta)^1\in\Sigma$时,$(\Gamma)_{res}\vdash(\Sigma)_{res},\theta,\forall x\varphi$. 据此可知 $\Gamma\Rightarrow^i\Sigma,\forall xA$.

(3.3) 当 $i=1$, $j=1$ 的情形可以类似地证明.

(4) 若 $\Gamma,A[t/x]\Rightarrow^i\Sigma,i=1,\forall xA=(\forall x\varphi)^0,\forall xA\in\Gamma\cup\Sigma$,则 $\Gamma,\forall xA\Rightarrow^i\Sigma$.

从假设可知$(\Gamma)_{res},\varphi[t/x],\forall x\varphi\nvdash(\Sigma)_{res}$,因而$(\Gamma)_{res},\forall x\varphi\nvdash(\Sigma)_{res}$,从而 $\Gamma,\forall xA\Rightarrow^i\Sigma$.
□

RE—证明论也具有完全性,本文的完全性是指对任意的 RE—公式序列 Γ,Σ,当 $\Gamma\Rightarrow^i\Sigma$ 时,$\Gamma\rightarrow^i\Sigma$. 此种完全性可以据对 RE—序列的复杂性归纳来证明. 具体的证明方法可以简述为:从 $\Gamma\Rightarrow^i\Sigma$ 可知$\{\varphi|(\varphi)^i\in\Gamma,i=0,1\}\rightarrow\{\varphi|(\varphi)^i\in\Sigma,i=0,1\}$ 在 Gentzen LK 系统中有一个 cut free 证明,依据此证明的 LK—证明树可以构造出 $\Gamma\Rightarrow^i\Sigma$ 的 RE—证明树. Gentzen LK 系统所具有的 weakening 规则是 RE—证明论系统中所没有的. 在一个 LK—证明树中若用到了 weakening 规则,比如结点 v 是据对主公式 A 作 weakening 后得到的,在依据此树构造 RE—证明树时,在以 v 为根的子树的每个结点内添加公式 A,这种公式在以下的证明中外加方扩号以示区别. 这时,所得的证明树的叶 $\Gamma'\rightarrow^i\Sigma'$中可能有标号为 1 的公式$(\varphi)^1$但$(\varphi)^0$不在此叶中出现. 若此种情况出现,则在树的叶 $\Gamma'\rightarrow^i\Sigma'$上添加一个子树,它是用上述的方式从$\{\varphi|(\varphi)^i\in\Gamma',i=0,1\}\rightarrow\{\varphi|(\varphi)^i\in\Sigma',i=0,1\}$的 LK—证明树构造出的. 此时再考察树的每个叶,若某个叶中有标号为 1 的公式$(\varphi)^1$但$(\varphi)^0$不在此叶中出现,则仍用上述方法通过在叶上添加子树得到扩树. 上述的扩张过程将在有现步内终止,据所得树即可以构造一个 RE—证明树.

引理 2. RE—证明论的完全性

假设 Γ,Δ 是 RE—公式的序列,$i=0,1$. 若 $\Gamma\Rightarrow^i\Delta$ 成立,则 $\Gamma\rightarrow^i\Delta$ 是 RE—可证明的.

证明:为证明此定理,先将 RE—公式的概念作这样的推广:若 φ 是语言 $\mathscr{L}$ 的公式,则$\langle\varphi\rangle^1$ 及$[(\varphi)^i]$都是 RE—公式. 在定义 RE—证明论的概念时,比如:RE—可证性,RE—证明树等,视$\langle\varphi\rangle^1$ 与$(\varphi)^1$ 是等同的. 当 Γ 是 RE—公式的序列时,定义$(\Gamma)=\{\varphi|(\varphi)^i\in\Gamma,i=0,1\}$.

对于 RE—公式的序列,以下的引理成立,

引理. 假设 Γ,Λ 是 RE—公式的序列,$i=0$ 或 1,且 $\Gamma\Rightarrow^i\Lambda$,则存在树 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_{\Gamma\Rightarrow^i\Lambda}$,它的每

个结点都是一个 RE－序列，且最多有两个子结点. 树 **T** 以 $\Gamma \to^{i} \Lambda$ 为根. **T** 的结点 v 仅有一个结点 v_1，则$\frac{v_1}{v}$是某个单前提 RE－规则的一个实例. **T** 的结点 v 仅有两个结点 v_1, v_2，则$\frac{v_1 v_2}{v}$是某个双前提 RE－规则的一个实例. 当 v 是 **T** 的叶时，

存在语言 $\mathscr{L}$ 的公式 φ，使得$(\varphi)^0 \in \Gamma \cap \Lambda$，或者$(\varphi)^1 \in \Gamma$(或 Λ)，且$(\varphi)^0 \in \Lambda$(或 Γ).

引理的证明：从 $\Gamma \Rightarrow^{i} \Lambda$ 可知$(\Gamma) \vdash (\Lambda)$，因而$(\Gamma) \to (\Lambda)$在 Gentzen LK 证明论系统中有一个 cut free 证明. 假设此证明的证明树是 **t**. 以下将从 **t** 定义一个树 **T**，首先构造树 **t′**，树 **t** 将通过函数 F 与树 **t′** 同构 $F: F((\Gamma) \to (\Lambda)) = \Gamma \to^{i} \Lambda$. 同构 F 的性质可以用以下条件刻划：

(1) 假设结点 v 仅有一个结点 v_1，$\frac{v_1}{v}$是 LK 的以下规则的实例时，

contraction，*exchange*，$(\neg; left)$，$(\neg; right)$，$(\forall\ ; right)$，$(\exists\ ; left)$，

则从 $F(v)$可以构造出 $F(v_1)$使得$\frac{F(v_1)}{F(v)}$是 RE－证明论系统的相应 RE－规则的一个实例. 比如当$\frac{v_1}{v} = \frac{(\Sigma) \to (\Lambda), A, (\Delta)}{(\Sigma, \neg A) \to (\Lambda), (\Delta)}$且 $F(v) \equiv \Sigma, \neg A \to^{i} \Lambda, \Delta$ 时，$F(v_1) \equiv \Sigma, \to^{i} \Lambda, A, \Delta$.

(2) 假设结点 v 仅有一个结点 v_1，$\frac{v_1}{v} = \frac{\varphi, (\Sigma) \to (\Delta)}{\varphi \wedge \psi, (\Sigma) \to (\Delta)}$是 LK 的$(\wedge; left)$的实例时，若 $F(v) \equiv (\varphi \wedge \psi)^i, \Sigma \to^{i} \Delta$，则 $F(v_1)$是 RE－列$(\varphi)^k, (\psi)^l, \Sigma \to^{i} \Delta$，其中 i, k, l 满足以下的条件：

当 $i=0$ 时，$k=l=0$.

当 $i=1$ 时，若 $\varphi, (\Sigma) \nvdash (\Delta)$则 $k=0, l=1$. 若 $\psi, (\Sigma) \nvdash (\Delta)$，$k=1, l=0$. 否则 $k=1, l=1$.

当$\frac{v_1}{v}$是 LK 的$(\wedge; right)$的实例时，可以用类似的方式从 $F(v)$定义 $F(v_1)$.

(3)假设结点 v 仅有一个结点 v_1，$\frac{v_1}{v} = \frac{\varphi[t/x], (\Sigma) \to (\Delta)}{\forall x\varphi, (\Sigma) \to (\Delta)}$是 LK 的$(\forall\ ; left)$的实例时，假设 $F(v) \equiv \forall xA, \Sigma \to^{i} \Delta$ 且 $A = (\varphi[t/x])^j$，如下定义 $F(v_1)$，

当 $i=0$ 时或 $i=1$ 且 $ind(\forall xA)=0$ 时，$F(v_1) \equiv [\forall xA], A[t/x], \Sigma \to^{i} \Delta$. 对其它的情形 $F(v_1) \equiv A[t/x], \Sigma \to^{i} \Delta$.

当$\frac{v_1}{v}$是 LK 的$(\exists\ ; right)$的实例时，可以用类似的方式定义 $F(v)$.

(4)假设结点 v 仅有一个结点 v_1，$\frac{v_1}{v}$是 LK 的 weakening 规则的实例，比如$\frac{v_1}{v} = \frac{\Sigma \to (\Delta)}{(A, \Sigma) \to (\Delta)}$时，若 $F(v) \equiv A, \Sigma \to^{i} \Delta$，定义 $F(v_1) \equiv [A], \Sigma \to^{i} \Delta$.

(5)假设 v 有两个结点 v_1, v_2，且$\frac{v_1 \quad v_2}{v} = \frac{(\Sigma_1) \to (\Delta_1), \varphi \quad (\Sigma_2) \to (\Delta_2), \psi}{(\Sigma) \to (\Delta), \varphi \wedge \psi}$. 假设 $F(v)$是 RE－列 $\Sigma \to^{i} \Delta, (\varphi \wedge \psi)^j$，则 $F(v_1)$及 $F(v_2)$是满足以下条件的 RE－序列，

(5.1)若 $i=0$，或 $i=1, j=1$，则 $F(v_1) = \Sigma \to^{i} \Delta, (\varphi)^j$，$F(v_2) = \Sigma \to^{i} \Delta, (\psi)^j$.

(5.2)$i=1, j=0$.

从$(\Sigma)_{res} \nvdash (\Delta)_{res}, \varphi \wedge \psi$，可以不妨假设$(\Sigma) \nvdash (\Delta), \varphi$，此时 $F(v_1) \equiv \Sigma \to^{1} \Delta, (\varphi)^0$，$F(v_2) \equiv \Sigma \to^{0} \Delta, (\psi)^0$.

当$\frac{v_1 \quad v_2}{v}$是$(\vee; left)$，$(\supset; left)$，$(\supset; right)$，$(\supset; right)$的实例时，可以用类似的方式定义 $F(v)$.

以下从树 $\mathbf{t}'$ 构造树 $\mathbf{T}$:将 $\mathbf{t}'$ 的每个结点中的公式$[A]$替换成公式 A,若 $\mathbf{t}'$ 的叶 $v:\Sigma\rightarrow\Delta$ 满足:存在语言 $\mathscr{L}$ 的公式 φ,$(\varphi)^0\in\Sigma\cap\Delta$,则将 v 中的每个型如$\langle\varphi\rangle^1$ 的公式替换成$(\varphi)^1$. 若 $\mathbf{t}'$ 的叶 $v:\Sigma\rightarrow\Delta$ 满足不存在语言 $\mathscr{L}$ 的公式 φ, $(\varphi)^0\in\Sigma\cap\Delta$,则将 Σ 中的每个形如$(\varphi)^1$ 且$(\varphi)^0\in\Delta$ 的 RE－公式替换成$\langle\varphi\rangle^1$,并在 Σ 中添加$\langle\varphi\rangle^0$. 将 Δ 中的每个形如$(\varphi)^1$ 且$(\varphi)^0\in\Delta$ 的 RE－公式替换成$\langle\varphi\rangle^1$,并在 Δ 中添加$\langle\varphi\rangle^0$. □

引理 2 的证明:假设 Γ,Λ 是 RE－公式的序列,$i=0$ 或 1,且 $\Gamma\Rightarrow^i\Lambda$,以下构造树的序列$\langle\mathbf{T}_n:n\in\omega\rangle$,其中 ω 是自然数集合.

$\mathbf{T}_0=\mathbf{T}_{\Gamma\Rightarrow^i\Lambda}$.

若 $\mathbf{T}_n$ 已定义,定义 $\mathbf{T}_{n+1}$是将 $\mathbf{T}_n$ 的满足如下条件的叶 $v:\Sigma\rightarrow^i\Delta$ 替换成 $\mathbf{T}_v$后所得的树.

(1)不存在 $\mathscr{L}$ 的公式 φ,$(\varphi)^0\in\Sigma\cap\Delta$.

(2)存在 $\mathscr{L}$ 的公式 φ,$(\varphi)^1\in\Sigma\cup\Delta$.

易知$\langle\mathbf{T}_n:n\in\omega\rangle$是树的升链,因而$\bigcup_{n\in\omega}\mathbf{T}_n$ 是一个树. 若该树有一个无限的枝$\langle v_n\mid n\in\omega\rangle$,其中 $v_n\equiv\Gamma_n\rightarrow^{i_n}\Lambda_n$,则从树序列的定义过程可知对每个自然数 n,存在公式 φ_n 使得$(\varphi_n)^1\in\Gamma_n\cup\Lambda_n$. 但每个$(\varphi_n)^1$ 都是 $\Gamma\cup\Lambda$ 中的某个上标为 1 的公式的一个子公式或子公式关于某个自由变元的一个替换,并且当公式的一个子公式或子公式关于某个自由变元的一个替换属于 $\Gamma_{n+1}\cup\Lambda_{n+1}$,则此公式本身已不属于 $\Gamma_{n+1}\cup\Lambda_{n+1}$. 因而存在 n 使得 $\mathbf{T}_n=\mathbf{T}_{n+1}$. 这时,将 $\mathbf{T}_n$ 的每个结点中的$\langle\varphi\rangle^i$ 都替换成$(\varphi)^i$,则从所得的这个树就可以构造出 $\Gamma\rightarrow^i\Lambda$ 的证明树. □

3 结　论

本文讨论了一阶逻辑理论修改的证明论性质,并用维护的概念刻划理论修改. 在建立 RE－证明论的基础上,用 RE－证明论的可靠性及完全性给出了一般的维护与典型的维护之间的关系. 同时还给出了判定维护的归结方法. 本文在研究理论修改时不假定理论对逻辑结论具有封闭性,这有别于文献[1]中对理论修改的研究. 文献[1]在假定理论对逻辑结论具有封闭性的前提下,研究了用公理化方式定义的修改及收缩与保留一个极大集的修改及收缩间的关系,其结论仅局限在命题逻辑,而本文的结论适应于一阶逻辑的任何理论. 正如在文章开始时所指出的,文献[2]所定义的 R－重构在本文被一个带上标的公式序列表示,因而,本文关于维护判定性的研究为研究 R－重构的构造理论提供了基础,指出了任意的 R 重构都可以从一些典型的 R－重构构造出. 这个性质有别于文献[3]中所得的结论,文献[3]中曾用 R－演算的技巧给出了 R－重构的构造理论.

参考文献

1 Alchourrón C E, Gärdenfors R, Makinson D. On the logic of theory change. Journal of Symbolic Logic, 1985,**50**(**2**):510－530.

2 李未. 一个开放的逻辑系统. 中国科学(A), 1992,**21**(**10**):1103－1114.

3 Li W, Shen N, Wang J. R－calculus: A logical approach for knowledge base maintenance. Sixth International Conference on Tools with Artificial Intelligence, 1994.

4 Gallier J H. Logic for computer science, foundation of automatic theorem proving. John Wiley and Sons, 1987.

5 Chang C C, Keisler H J. Model theory. North-Holland, 1973.

A PROOF THEORY FOR BELIEF REVISION

Zhang Yuping Li Wei

(*Department of Computer Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)

Abstract A deduction system, called RE-proof system, is constructed for generating the revisions of first order belief sets. When a belief set is rejected by a given fact, all maximal subsets of the belief set consistent with the fact can be deduced from the proof system. The soundness and completeness of the RE-proof system are proved, which imply that there exist a resolution method to decide whether a revision retains a maximal subset of a belief set.

Key words First order language, proof theory, axiom.