一类表达式及其典型形式的推广

郭福顺 黄仲伟 罗昕

(哈尔滨工业大学计算机科学系，哈尔滨 150006)

THE EXPANSION OF AN EXPRESSION CLASS AND ITS CANONICAL FORM

Guo Fushun, Huang Zhongwei and Luo Xin

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150006)

Abstract REP expression class and its canonical form are presented in [1]. This paper expands this class and proves that there exists canonical form for it.

摘要 文 [1] 给出了 REP 表达式类及其典范形式. 本文推广了这类表达式并证明其存在的典范形式.

§1. 引 言

文 [1] 的 REP 表达式可写成 $\sum P_i * \exp(E_i)$ 的形式. 其中， P_i 是有理系数多项式， E_i 是 REP 表达式. 文 [2] 推广了这类表达式，将 $\log(x)$ 等引入表达式，不足之处是没有研究表达式的典范形式和典范化简. 本文以 CAVINESS 猜想为依据，构造新的表达式类；其表达式是以 EXP(< 表达式 >)(亦可写为 $e**$ < 表达式 >) 为“基”, 以分式为“系数”的“多项式”$\sum F_i * e * * E_i$, 称为分式指数多项式，简写成 FEP (Fractional Exponential Polynomial); 其中， F_i 是分式， E_i 是 FEP 表达式.

§2. FEP 表达式类

此类表达式形式描述如下：

< 表达式 >::=< 项 > |+ < 项 > | < 表达式 > + < 项 > | < 表达式 > − < 项 >;

< 项 >::=< 因式 > | < 项 > * < 因式 >;

< 因式 >::=< 系数 > |exp(< 指数 >);

< 系数 >::=<p 式 > |(< 表达式 >)| < 分式 >;

本文 1990 年 6 月 4 日收到， 1990 年 10 月 28 日定稿. 作者 **郭福顺**， 教授，主要从事人工智能，并行处理理论、技术方面的研究工作. **黄仲伟**， 助教， 1989 年硕士毕业于哈尔滨工业大学，主要从事计算机代数，分布式计算系统方面的研究工作. **罗昕**， 助教， 1988 年硕士毕业于哈尔滨工业大学，主要从事并行程序设计环境，人工智能方面的研究工作.

< 指数 >::=<p 式 > | < 分式 > | < 表达式 >;
< 分式 >::= (< 表达式 >)/ <p 式 >;
<p 式 >::= 以 x 为实变元的有理系数多项式；

例如： $x*\exp(1+x)+((4x**2+5)/(5x**3+x**2+1))*\exp(1+x)+3*\exp(1+x+5)/(7x+1))+x+(x+1)/(3x**2+x+1)$ 即属于所描述的表达式类.

由于机器能力的限制，我们所能化简的实际上是此类表达式的一个有限子集.

在讨论 FEP 表达式的典范形式时，我们仍沿用文 [1] 中等价、等同两个概念，简要介绍如下：

设 I 表示一个表达式类．其中的表达式仅有一个变元 x．表达式可解释为某定义域 D 上的函数．若 E 是 I 中的一个表达式，则 $E(x)$ 是 E 所表达的函数.

定义 1: 设 $E_1, E_2 \in I$, 若对 X 的一切可取值，恒有 $E_1(x)=E_2(x)$, 则称 E_1(函数) 等价于 E_2, 记为 $E_1 \backsim E_2$.

定义 2: 设 $E_1, E_2 \in I$, 若 E_1 和 E_2 是相同的字符串，则称 E_1 与 E_2 等同，记为 $E_1 \equiv E_2$.

我们用下列运算定义该类表达式的一个变换 f_1:

(1) $\frac{p_1}{q_1}*\exp(E_1)*\frac{p_2}{q_2}*\exp(E_2)\to\frac{p_3}{q_3}\exp(E_1+E_2)$,

其中， p_1 、 p_2, q_1 、 q_2 为纯多项式，且 $\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_1*p_2}{q_1*q_2}$

(2) $x**0\to 1$; $\exp(0)\to 1$;

(3) $0*\exp(E_1)\to 0$; $0*E\to 0$; $1*E\to E$; $1*\exp(E)\to\exp(E)$

(4) $x**d_1*x**d_2\to x**(d_1+d_2)$;

(5) 展开项之积；

(6) 合并同类项；

(7) p_1 和 p_2 为纯多项式时，用带余除法和欧几里德算法将 p_1/p_2 化成 $p+q/s$, 其中 q/s 是既约分式.

(8) 变换某些因式的位置，以及交换某些项的位置.

这样定义的 f_1 显然可以将任意给定的该类表达式转换成如下形式：

$$\sum(p_i+q_i/s_i)*\exp(E_i)\ \text{或}\ 0 \tag{*}$$

其中： p_i, q_i 不同时等价于 0, s_i 不等价于 0, 并且都是典范的纯多项式 (典范多项式的定义见文 [1]); q_i/s_i 为既约分式；每个 E_i 都是互异的 (*) 形的表达式.

由于这些运算都是函数等价运算，因此有 $f_1(E)\backsim E$; 并且若 $E\backsim 0$, 则 $f_1(E)\equiv 0$. 称 f_1 是 FEP 表达式类上的一个标准型变换．将上述 f_1 之象集 $\left\{\sum(p_i+q_i/s_i)*\exp(E_i)\right\}\cup\{0\}$ 称为所定义表达式类的一个标准型类.

定义 3: 表达式 E 的深度，用 $d(E)$ 表示，递归定义如下：

若 E 是多项式 “0”, 则 $d(E)=0$;

若 E 是非 0 纯多项式，则 $d(E)=1$;

若 E 是有理分式，则 $d(E)=2$;

若 $E\equiv p+q/s$, 且 p 和 q 都不等价于 0, $d(E)=d(E*\exp(0))=3$;

若 $E \equiv (p_1 + q_1/s_1) * \exp(E_1) + (p_2 + q_2/s_2) * \exp(E_2) + \cdots + (p_n + q_n/s_n) * \exp(E_n)$, 则 $d(E) = \max(d(E_1), d(E_2), \cdots, d(E_n)) + 3$.

定义 4: 设 E_1, E_2 是两个既约分式：

$E_1 \equiv p_1/q_1$, $E_2 \equiv p_2/q_2$.

E_1 和 E_2 之间的代数序关系 $<-$ 定义如下： $E_1 < -E_2$ 当且仅当 $p_1 * q_2 < -p_2 * q_1$. 多项式代数序关系 $<-$ 的定义见文 [1].

§ 3. FEP 表达式的典范形式

定义 5: FEP 表达式的典范形式递归定义如下：

(1) 0 为典范表达式；

(2) 典范纯多项式为典范表达式；

(3) 既约分式为典范表达式；(分子分母为典范纯多项式).

(4) 若所有 E_i 都是典范表达式，且当 $i < j$ 时，按代数序关系 $<-$ 有 $E_i < -E_j$, 则 $\sum(p_i + q_i/s_i)\exp(E_i)$ 为典范表达式. 其中 p_i, q_i 是不同时等价于 0 的典范纯多项式； q_i/s_i 为既约分式；而 FEP 类的代数序关系 $<-$ 定义如下：

(4.1) 若 $d(E_1) = d(E_2) = 1$, 且 E_1, E_2 都是典范纯多项式，则 E_1 和 E_2 间的代数序关系 $<-$ 就是多项式之间的代数序关系 $<-$.

(4.2) 若 $d(E_1) = d(E_2) = 2$, 且 E_1 和 E_2 都是既约分式，则 E_1 和 E_2 间的代数序关系 $<-$ 就是既约分式间的代数序关系 $<-$.

(4.3) 若 $d(E_1) = d(E_2) \geq 3$, 且 E_1 和 E_2 都是典范表达式： $E_1 \equiv \sum(p_{1i} + q_{1i}/s_{1i}) * \exp(E_{1i})$; $E_2 \equiv \sum(p_{2i} + q_{2i}/s_{2i}) * \exp(E_{2i})$;

则 $E_1 < -E_2$, 当且仅当：

(4.3.1) $(E_{11}, E_{12}, \cdots E_{1n}) \lessdot (E_{21}, E_{22}, \cdots E_{2n})$; 或者

(4.3.2) $m = n$ 且 $E_{1i} \equiv E_{2i} (1 \leq i \leq n)$ 但 $(p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n}) \lessdot (p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2n})$ 或者

(4.3.3) $m = n$ 且 $E_{1i} \equiv E_{2i}$, $p_{1i} \equiv p_{2i} (1 \leq i \leq n)$ 但 $(q_{11}/s_{11}, q_{12}/s_{12}, \cdots q_{1n}/s_{1n}) \lessdot (q_{21}/s_{21}, q_{22}/s_{22}, \cdots, q_{2m}/s_{2m})$; 其中 $\lessdot$ 是根据代数序关系 $<-$ 定义的字典序关系.

(5) 若 $d(E_1) < d(E_2)$, 且 E_1 和 E_2 均是典范表达式，则 $E_1 < -E_2$.

显然，由此定义，任何一个该类表达式都可以化成与其等价的典范形式. 然而，对任意两个等价的该类表达式，它们的典范形成是否等同呢？为了回答这个问题，需引入 CAVINESS 猜想.

在探讨典范化简问题中，先后提出过多种猜想，如 Brown 猜想， CAVINESS 猜想等，这里只介绍一下 CAVINESS 猜想：

设 $c_1, c_2 \cdots, c_n$ 是所考虑的表达式类中互异的典范常量表达式，则 $\{e**c_1, e**c_2, \cdots, e**c_n\}$ 在有理数域上线性无关.

定理： 若 CAVINESS 猜想是正确的，则所定义的表达式类上存在典范型变换.

证明： 令 f_1 为所定义的标准型变换，我们在 f_1- 标准型类上定义一个排序变换 f_2 如下：

$$(p_1 + q_1/s_1) * \exp(E_1) + (p_2 + q_2/s_2) * \exp(E_2) + \cdots + (p_n + q_n/s_n) * \exp(E_n) -> (p'_1 + q'_1/s'_1) * \exp(E'_1) + (p'_2 + q'_2/s'_2) * \exp(E'_2) + \cdots + (p'_n + q'_n/s'_n) * \exp(E'_n)$$

其中 $(p_i'+q_i'/s_i')\in\{p_1+q_1/s_1, p_2+q_2/s_2,\cdots,p_n+q_n/s_n\}$, $E_i'\in\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$, 且当 $i<j$ 时， $E_i'<-E_j'$. 由此得到一个变换 $f=f_2*f_1$, 且 f 将任意该类表达式变换成其等价的典范表达式. 因此只需证明 f 是典范型变换，即对任给的两个该类表达式 E_1, E_2, 若 $E_1\backsim E_2$, 则 $f(E_1)\equiv f(E_2)$. 由 f 的定义易知，若 $f(E_1)-f(E_2)$ 经合并同类项和 $0*\exp(E')->0$ 操作后等同于 0, 则 $f(E_1)\equiv f(E_2)$. 于是证明下面的结论就足够了：若 E 是定义 5 中定义的典范表达式，且 $E\backsim 0$, 则 $E\equiv 0$.

施归纳法于 E 的深度 $d(E)$, 即可证明这个结论.

(1) 当 $d(E)=0,1,2,3$ 时，结论显然正确.

(2) 当 $d(E)=4$ 时，假设 $E=(p_1+q_1/s_1)*\exp(R_1)+(p_2+q_2/s_2)*\exp(R_2)+\cdots+(p_n+q_n/s_n)*\exp(R_n)\backsim 0$, 但 $E\not\equiv 0$. 则由于一个多项式只有有限个根，所以只有有限多个有理数 r, 使得 $i\neq j$, $R_i(r)=R_j(r)$. 因此有无穷多个有理数 r 使 $R_1(r), R_2(r),\cdots R_n(r)$ 是互异的，且 $p_i(r)\neq 0$ 或者 $p_i(r)+q_i(r)/s_i(r)\neq 0$ $(1\le i\le n)$. 但 $(p_1(r)+q_1(r)/s_1(r))*\exp(R_1(r))+(p_2(r)+q_2(r)/s_2(r))*\exp(R_2(r))+,\cdots,+(p_n(r)+q_n(r)/s_n(r))*\exp(R_n(r))=0$, 与 CAVINESS 猜想矛盾，所以 $E\equiv 0$.

(3) 假设结论对 $d(E)<k$ 成立，当 $d(E)=k\ge 5$ 时，假定 $E=(p_1+q_1/s_1)*\exp(E_1)+(p_2+q_2/s_2)*\exp(E_2)+\cdots+(p_n+q_n/s_n)*\exp(E_n)\backsim 0$, 但 $E\not\equiv 0$. 由于每个该类表达式表示一个完全解析函数，而解析函数被它任意闭区间 Z 上的无穷多个点上的值完全确定，于是根据归纳假设和一个多项式只有有穷多个有理数，易知存在一个有理数 $r\in Z$, 使得 $E_1(r), E_2(r),\cdots,E_n(r)$ 是互异的，且 $p_i(r)\neq 0$ 或 $p_i(r)+q_i(r)/s_i(r)\neq 0$ $(1\le i\le n)$, 但 $(p_1(r)+q_1(r)/s_1(r))*\exp(E_1(r))+(p_2(r)+q_2(r)/s_2(r))*\exp(E_2(r))+\cdots+(p_n(r)+q_n(r)/s_n(r))*\exp(E_n(r))=0$ 与 CAVINESS 猜想矛盾，故 $E\equiv 0$. 根据归纳法原理证毕.

§ 4. 后记

在计算机代数中，表达式的典范形式和典范化简是基本的，也是很重要的，因为它与代数 (因子) 域中的可计算问题密切相关. 事实上，由一个能行的典范化简器即可产生一个可判定的等价关系和在该关系定义的因子结构中进行计算的算法；反之，一个等价关系的判定过程保证能行典范化简器的存在. 上面在等同关系的意义下证明了 FEP 表达式类存在唯一的典范形式，也就证明了针对这类表达式有典范化简算法.

参考文献

[1] Guo Fushun, Luo Youjun and Xie Yuanhong, "On Canonical Forms and Simplication of REP Expressions", proc. of The First International Conference on Computers and Application, June, 1984, 633–639.

[2] 刘化明，符号微分与化简系统的实现，厦门大学学报， 1988. 3.

[3] B.F.Caviness, "On Canonical Forms and Simplication", J.ACM 17, 2 (Apr. 1970), 385–396.

[4] D.Richardson, "Some Unsolvable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable", J. Symb. Logic 33 (1968), 511–520.

[5] B.F.Cavines and R.Fateman, "Simplication of Radical Expressions", Proceedings of the 1976 ACM Symp. on Symbolic and Algebraic Computation, Aug. 1976, 329–338.

[6] W.S.Brown, "Rational Exponential Expressions and a Conjecture Concerning π and e", Amer. Math. Monthly 76 (Jan. 1969), 28–34.